Feuille d'exercices 27

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Topologie

Ex 1. Préciser si les domaines $D \subset \mathbb{R}^2$ suivants sont fermés ou non, ouverts ou non, bornés ou non.

1. $D = \mathbb{R}^2$.
2. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
3. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$.
4. $D = \{(x, y) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
5. $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 5\}$.
6. $D = \{(x, y) \,|\, 2x + 3y \leq 1\}$.

Ex 2 (Les disques fermés ne sont pas ouverts)**.** Soit $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.
Montrer que le *disque fermé* $\overline{D}(p, r) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \|z - p\| \leq r \right\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Ex 3 (Stabilité des ouverts)**.**

1. Soit I un ensemble quelconque et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que leur union $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $U_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |y| < \frac{1}{n} \right\}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_n est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, mais que leur intersection n'en est pas un.

Ex 4 (Injectivité et dimension)**.**
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'une fonction continue $U \to \mathbb{R}$ ne peut pas être injective.

Dérivées partielles de fonctions de deux variables

Ex 5. Déterminer la régularité des fonctions suivantes sur leur domaine et calculer leur gradient là où c'est possible.

1. $f(x, y) = xy$,
2. $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)$,
3. $f(x, y) = x^3 + 2y^2$,
4. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
6. $f(x, y) = e^x \cos(y)$,
7. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$,
8. $f(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{x + y}$,
9. $f(x, y) = x^y$,

Ex 6. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
Montrer que la fonction $\theta : t \mapsto f(t^2, t^3)$ est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles.

Ex 7. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

(a) $g(x,y) = f(y,x)$,

(b) $g(x) = f(x,x)$,

(c) $g(x,y) = f(y, f(x,x))$,

(d) $g(x) = f(x, f(x,x))$.

Ex 8. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, puis $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{xy} \varphi$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.

Ex 9 (Caractère C^1 de la norme)**.**
Montrer que la norme $N : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right.$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$, mais que sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe C^1. Donner ses dérivées partielles.

Ex 10 (Théorème d'Euler)**.**
Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $k \in \mathbb{N}$. Une fonction $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ est dite *homogène de poids* k si

$$\forall x \in U, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t\,x) = t^k\, f(x).$$

Montrer que cela se produit si et seulement si

$$\forall (a,b) \in U, \quad \langle (a,b), \nabla f(a,b) \rangle = k\, f(a,b),$$

où $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

Courbes de niveau

Ex 11 (Courbes de niveau)**.**
Tracer dans $\mathbb{R}^2$ l'allure des courbes de niveau des fonctions suivantes, par exemple pour les valeurs entières :

1. $f(x,y) = xy$.
2. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$.
4. $f(x,y) = x^2 - y$.
5. $f(x,y) = y^2 - x^2 + x^3$.

Dans ce dernier cas, on pourra s'aider de la calculatrice et constater la cohérence du résultat avec la direction et norme du gradient en quelques points.

Ex 12 (Un peu d'économie !)**.**
Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables ne s'annulant pas et admettant des dérivées partielles en un point (x_0, y_0) de D, on définit son *élasticité partielle* par rapport à la première variable en (x_0, y_0) comme suit :

$$\varepsilon_x f(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{h}{x_0}} = \frac{x_0}{f(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

1. Déterminer les élasticités partielles par rapport aux variables x et y de la *fonction de Cobb-Douglas* suivante : $f(x,y) = kx^\alpha y^\beta$, où k, α et β sont des constantes réelles positives, et observer qu'elles ne dépendent pas du point (x_0, y_0) choisi dans $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.
2. Tracer dans $(\mathbb{R}^{+\star})^2$ l'allure des lignes de niveau de la fonction $u(x,y) = xy^2$. Ce sont les *courbes d'indifférence* pour la fonction *utilité* u.

Changement de variables, équations aux dérivées partielles

Ex 13 (Fonctions radiales)**.** Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ *radiale*, c'est-à-dire telle que la valeur de $f(x,y)$ ne dépende que de $\sqrt{x^2+y^2}$.

Montrer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Ex 14 (Résolution d'une ÉDP)**.**

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Montrer que f vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement s'il existe $h \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = h(2x+y)$.
2. Trouver toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ telles que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) - 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a$.

Ex 15. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\quad 3\dfrac{\partial f}{\partial x} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.
On pourra utiliser le changement de variable $(u,v) = (x+y, 2x+3y)$.

Ex 16. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\quad y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.
On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Ex 17. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

1. $\nabla f(x,y) = (ye^{xy}+3, xe^{xy})$,
2. $\nabla f(x,y) = (\sin(xy), \cos(xy))$,
3. $\nabla f(x,y) = (e^x y, e^x + 2y)$,
4. $\nabla f(x,y) = (e^x + y\cos(xy), x\cos(xy))$.

Plan tangent et développement limité à l'ordre 1

Ex 18. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentée par f, au point de coordonnées $(0,0)$.

Ex 19. Soit $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2y - x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f. Est-ce un ouvert?
2. Déterminer et tracer la courbe de niveau $f(x,y) = 1$.
3. Écrire le DL1 de f en $(2,3)$. En déduire une valeur approchée de f en $(2.2,\ 2.9)$.

Ex 20. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y - 2x^2}$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f. Est-ce un ouvert?
2. Déterminer les courbes de niveau correspondant à 1, $-\dfrac{1}{2}$ et 0.
3. Calculer le gradient de f en tout point de D_f.
4. Déterminer un DL1 de f en $(1,1)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.1)$.

Optimisation

Ex 21. Déterminer les points critiques et les extrema locaux des fonctions définies, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

(a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$,

(b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$,

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3$,

(d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$,

(e) $f(x, y) = x^2 + y^3$,

(f) $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$,

(g) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$,

(h) $f(x, y) = x^2y^2(1 + x + 2y)$,

(i) $f(x, y) = 3x^3 + xy^2 - xy$,

(j) $f(x, y) = x^4 + y^8$.

Ex 22 (Points critiques et extrema locaux)**.** On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x\,e^y + y\,e^x. \end{array} \right.$

1. Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que f n'a pas d'extremum local.

Ex 23 (Contre-exemples)**.**

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (y - x^2)(y - 2x^2). \end{array} \right.$
   (a) Montrer que $(0, 0)$ est l'unique point critique de f, et que f n'admet pas en ce point de maximum local.
   (b) Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto f(tv)$ admet un minimum local en 0.
   (c) En examinant le comportement de f le long d'une parabole bien choisie, montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
   (d) Quelle idée reçue cet exemple contrecarre-t-il ?
2. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Quelle idée reçue cet exemple contrecarre-t-il ?

Ex 24. Dans les cas suivants, montrer que f admet un maximum sur K, et le déterminer :

(a) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$,

(b) $f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0, 1]^2$,

(c) $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y)$ et $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

Ex 25. Soit ABC un triangle. Montrer que la fonction $M \mapsto AM^2 + BM^2 + CM^2$ admet un minimum, et que celui-ci est atteint en un unique point.

Ex 26. Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_1 : (x, y) \mapsto \cos(x) + y^2$;
2. $f_2 : (x, y) \mapsto e^{3x}\,y^2 + e^x\,y$;
3. $f_3 : (x, y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y$;
4. $f_4 : (x, y) \mapsto \exp(x\,\arctan(y))$.

Ex 27. Soit f la fonction définie par $f(x, y) = (x + y - 2)^2 + \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$.

1. Donner le DL1 de f en $(2, 1)$. En déduire l'équation du plan tangent au point $(2, 1)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x, x) - 4(x - 1)^2$. Donner les extrema de g et préciser s'ils sont globaux.

Convexité

On commence par deux définitions :

- On dit qu'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est *convexe* s'il contient tous ses barycentres, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in D, \quad \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in D.$$

- Si D est un domaine convexe de $\mathbb{R}^2$ on dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction *convexe* si :

$$\forall x, y \in D, \quad \forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Ex 28. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \,|\, y \geq f(x)\}$, appelé *épigraphe de* f, est convexe.

Ex 29 (Convexité et optimisation)**.**
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1.

1. Montrer que : $\forall x, y \in U, \quad f(y) - f(x) \geq \nabla f(x) \cdot (y - x)$.
   Indication : on pourra considérer l'application $g : t \mapsto f((1-t)x + ty)$.
2. En déduire que si f admet un point critique, elle atteint un minimum global en ce point critique.
3. Montrer que si f admet un minimum local, c'est en fait un minimum global.
4. Montrer que si f admet un minimum global, l'ensemble des points en lequel f atteint ce minimum est convexe.
5. La fonction f peut-elle présenter un maximum global ? local ?

Multiplicateurs de Lagrange

Ex 30 (Optimisation sous contrainte)**.** Déterminer les extrema des fonctions suivantes en paramétrant l'espace de contraintes (dessin exigé).

1. $f(x, y) = 3x - y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$.
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 6$.
3. $f(x, y) = (xy)^a$ sous la contrainte $2x + 3y = 12$, où $a > 0$.

Ex 31 (Emballage économique)**.**
Quelle est la surface minimale d'un parallélépipède rectangle contenant un volume de $12m^3$?

Ex 32 (Premiers pas vers les multiplicateurs de Lagrange.)**.** On considère les deux problèmes d'optimisation suivants : déterminer les extrema de $f(x, y) = 3x + 7y$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 5$ et les extrema de $f(x, y) = x^2 + (y - 3)^2$ sous la contrainte $y - x^2 = -2$.

Pour chaque exemple, tracer les contraintes et quelques niveaux de la fonction à optimiser. Représenter le champ de gradient de f en quelques points ainsi que le gradient de la fonction définissant la contrainte le long de cette contrainte. Déterminer graphiquement les extrema considérés.

Ex 33 (Multiplicateurs de Lagrange)**.** 1. Calculer $V(c) = \max x^2 y$ sous la contrainte $4x^2 + y^2 = c$, pour $c > 0$. Vérifier que $V'(c)$ correspond au multiplicateur de Lagrange associé au point réalisant le maximum.

2. Déterminer $\min x^2 - y^2 + z^2$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ puis approcher à l'ordre 1 la quantité $\min x^2 - 1.1y^2 + z^2$ sous les contraintes $x + y + 1.1z = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$.