Feuille d'exercices 2

SOMMES, PRODUITS ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

Sommes et produits

Ex 1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$:

a) $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 150^3 = ?$

b) $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{66} = ?$

c) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{29} = ?$

d) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = ?$

Ex 2. Calculer $\sum_{k=0}^{9}(k+1)^2$, d'une part en développant $(k+1)^2$, d'autre part en posant $l = k+1$.

Ex 3. Donner une expression simple, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, pour les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$

b) $\sum_{k=2}^{n}(k^2 + 2k + 1)$

c) $\sum_{p=3}^{n+2} 2^p(1+3^p)$

d) La somme des n premiers nombres impairs.

e) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)$

f) $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{2^{2\ell-1}}$

g) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{3^i}}{n+1}$

h) $\sum_{j=1}^{2n}(-1)^j j^2$

i) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1)$

Ex 4. Calculer les sommes suivantes en faisant apparaître une somme télescopique.

a) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k+1}$

b) $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

c) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

d) $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!}$

e) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Indication : pour f), déterminer des réels a, b, c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

Ex 5. Montrer par récurrence que les propositions suivantes sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$

b) $\prod_{k=1}^{n}(k+n) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

c) $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

Ex 6. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les produits suivants.

a) $\prod_{k=1}^{n} 2k$

b) $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$

c) $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

d) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

Ex 7. Soit $n \geq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3$.

Ex 8. Soit $n > 1$ un entier. Évaluer sans calcul $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right)$.

Ex 9. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer les inégalités suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \leq \frac{4}{3}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$

(c) $2^n \leq (n+1)! \leq (n+1)^n$

Ex 10. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)$

(b) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)^2$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} p$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} k$

(e) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 3^i$

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$

(g) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} \min(i,j)$

(h) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} |i-j|$

Ex 11. On considère deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ reliées par la relation

$$\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{(si bien que } S_0 = 0\text{)}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer a_n en fonction des valeurs de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide des valeurs de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ les sommes suivantes :

   (i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k$; (ii) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2a_k$; (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)$; (v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)$.

3. *Transformation d'Abel.* Montrer que si $(b_n)_{n\geq 1}$ est une autre suite, on a la relation suivante (équivalent discret de l'intégration par parties) :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_{k+1}-b_k).$$

4. En appliquant ce qui précède à la suite constante $(a_n) = (1)_{n\geq 1}$ et à la suite des sommes harmoniques $(b_n)_{n\geq 1} = (H_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$, démontrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1}-1).$$

Coefficients binomiaux

Ex 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{2^k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\binom{n}{n-k}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k+1}3^{-k}$

Ex 13. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

(b) En appliquant la formule ci-dessus pour $p = 1$ et $p = 2$, retrouver les formules donnant la somme des n premiers entiers et la somme des n premiers carrés.

Ex 14. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

Ex 15. À l'aide de la formule du binôme, démontrer que

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est multiple de 3.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est multiple de 6.

Ex 16. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer les inégalités suivantes :

(a) $2^n \geq n+1$ (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1+x)^n \geq 1+nx$ (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (x+y)^n \leq x^n + y^n$

Ex 17. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}4^k$.

Indication : introduire une somme auxiliaire J_n telle que $I_n + J_n$ et $I_n - J_n$ soient faciles à calculer.

Ex 18. Soit n dans $\mathbb{N}$. À l'aide de la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

Ex 19. Soient n dans $\mathbb{N}$ et k dans $[\![0, n]\!]$. Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}}$ et en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Ex 20. Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![k, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$.
2. En déduire que pour tout réel x, on a $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{i=\ell}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{\ell}$.