Feuille d'exercices 3

ÉTUDES DE FONCTIONS

Généralités

Ex 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Décrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. f atteint un minimum global en a.
2. f n'est pas minorée.
3. f n'admet pas de minimum.
4. f est de signe constant sur I.

Ex 2. Soit $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. On note $g : A \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto 2 - f(x)$. Par quelle transformation obtient-on le graphe de g à partir de celui de f ?
2. On note h la fonction $x \mapsto 2f\left(\frac{x}{2}\right)$. Quel est le domaine de définition de h ? Par quelle transformation obtient-on le graphe de h à partir de celui de f ?

Ex 3. Décrire pour quels $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes ont un sens, puis tracer rapidement le graphe des fonctions qu'elles définissent.

(a) $2\ln\dfrac{1}{2-x}$; (b) $\sqrt{3x-2} - 1$; (c) $\dfrac{4}{2x+1} + 3$.

Ex 4 (Stabilité de la monotonie)**.**

1. Remplir avec des flèches pour indiquer là où on connaît la croissance ou la décroissance :

f	g	$f+g$	$f-g$	$f\times g$	$f\circ g$	$\lambda f, \lambda > 0$	$\lambda f, \lambda < 0$
$\nearrow$	$\nearrow$						
$\nearrow$	$\searrow$						
$\searrow$	$\searrow$						
$\searrow$	$\nearrow$						

et démontrer rigoureusement quelques-unes des cases.

2. Déduire de ces propriétés la monotonie de la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\frac{\ln(2/3)}{\exp(x^3+x^5)} \end{cases}$.
3. Donner un exemple de produit de fonctions croissantes qui n'est ni croissant, ni décroissant.

Ex 5. Tracer le même tableau pour discuter de la parité de de la somme, du produit et de la composition de deux fonctions en fonction de leurs parités.
Que dire de $h \circ f$ et de $f \circ h$, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire (resp. impaire) et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est quelconque ?

Ex 6. 1. Montrer que la somme de deux fonctions minorées est minorée.

2. Montrer que le produit de deux fonctions bornées est borné.

Études de fonctions

Ex 7. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \ln(x^2 - 5x - 6), \qquad f_2 : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x^2) - 1}, \qquad f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{|x| - 3}}{\ln(x) - 1}.$$

Ex 8. Déterminer le domaine de définition puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \ln\big(\ln(x)\big), \qquad f_2 : x \mapsto \frac{1}{1 + \ln(x)^2}, \qquad f_3 : x \mapsto \ln\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big), \qquad f_4 : x \mapsto \big(\ln(1 + \mathrm{e}^x)\big)^3.$$

Ex 9. Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ?

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x^2) \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos^2(t) \end{array} \right. \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \right. \qquad i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{2y}{1+y^2} \end{array} \right.$$

Ex 10. Étudier, selon le plan vu en cours, les fonctions suivantes.

(a) $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

(b) $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$

(c) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$

(d) $x \mapsto \dfrac{\tan 2x}{\tan x}$

(e) $x \mapsto x \arctan \dfrac{1}{x}$

(f) $x \mapsto \sin(3x) + 3 \sin x$

Ex 11. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1} - x - 1$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et donner son tableau de variations de f.
3. Déterminer une équation pour la tangente de f à l'abscisse 0.
4. Tracer l'allure du graphe de f en s'aidant de la tangente en 0 et d'une tangente horizontale.

Ex 12. On étudie la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

1. Donner le domaine de définition de f, calculer sa dérivée et en en déduire son tableau de variation.
2. Préciser les limites de f aux bords de son domaine.
3. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse e.
4. Tracer l'allure du graphe de f dans un repère orthonormé.
5. Déterminer graphiquement le nombre de solutions à l'équation $f(x) = y$, en fonction de la valeur de $y \in \mathbb{R}$.

Ex 13. Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{2x} \geqslant 1 + 2x\,\mathrm{e}^x$.

Ex 14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ puis $\forall x \in [0, 1[, e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$.

Ex 15. 1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n e^{-n/4} < 2$.

2. Déterminer $\max\limits_{n \in \mathbb{N}} n^{\frac{1}{n}}$.

Ex 16 (Un air de convexité)**.** Trouver tous les $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, a^x \geq x + 1$.

Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection monotone

Exercice 17.

1. Montrer que toute fonction continue ne s'annulant pas sur un intervalle y garde un signe constant.

2. Déterminer toutes les fonctions continues définies sur un intervalle I telles que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$.

Exercice 18. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 19. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. En déduire que $(E) : \arctan(x) + x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x + \arctan(x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que $f(x_n) = n$.

3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie.

Exercice 22. Nombre de solutions à des équations, dépendant éventuellement d'un paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le nombre de solution(s) à l'équation $x^3 = 3x^2 + 1$ et à l'équation $x^3 = 3x^2 - 2$.

2. Déterminer le nombre de solution(s) à l'équation $\ln(x + a) = x$, en discutant selon la valeur de a.

3. Déterminer le nombre de solution(s) à l'équation $\exp(ax) = x$, en discutant selon la valeur de a.

4. Déterminer le nombre de solution(s) à l'équation $\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} = x + a$, en discutant selon la valeur de a.

Exercice 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(E_n) : \tan(nx) = \dfrac{1}{2x}$, d'inconnue $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2n}\right[$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'équation (E_n) admet une unique solution, que l'on notera x_n.

2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie.

Nouvelles fonctions usuelles

Logarithmes, exponentielles, puissances

Exercice 24. Étudier (dérivabilité, variations, limites, graphe) les fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto a^x$ où $a > 0$ (b) $g : x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ (c) $h : x \mapsto x^x$

Exercice 25. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $2^{x^2} = 3^{x^3}$ (b) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ (c) $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

Exercice 26. Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{1-x} \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 27. Résoudre les systèmes d'équations suivants d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, éventuellement en discutant en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

(a) $\begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} e^x e^{2y} &= a \\ 2xy &= 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y &= \ln 2 \\ x - y &= 2. \end{cases}$

Exercice 28. Le plus grand nombre premier connu à ce jour est $2^{82\,589\,933} - 1$ (découvert le 7 décembre 2018 par le projet *Great Internet Mersenne Prime Search*). Combien y a-t-il de chiffres dans son écriture décimale ?

Croissances comparées

Exercice 29. Soient a, b et c des réels strictement positifs. Déterminer les limites, quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$, des fonctions suivantes :

(a) $x^a e^{-bx}$

(b) $(\ln x)^a e^{-bx}$

(c) $e^{ax} x^{-b} (\ln x)^{-c}$

(d) $a^x x^4$

(e) $a^{-x}\sqrt{x}$

(f) $x^{-a}\ln(1 + e^x)$

Exercice 30. Déterminer les limites, quand $x \to +\infty$, des fonctions suivantes :

(a) $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ (b) $\dfrac{a^{a^x}}{x^{x^a}}$ où $a > 1$ (c) $\dfrac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ où $1 < a < b$

Fonctions trigonométriques

Exercice 31. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $2\cos(2x) = \sqrt{3}$ (b) $2\cos^2 2x - 3\cos 2x = -1$ (c) $\cos x + \sin x = 2$

Exercice 32. Calculer :

(a) $\arctan\left(\tan \dfrac{9\pi}{4}\right)$

(b) $\arcsin(\sin x)$ avec $x \in \mathbb{R}$

(c) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $\tan(\arcsin x)$ avec $x \in [-1, 1]$

(e) $\cos(\arctan x)$ avec $x \in \mathbb{R}$

(f) $\tan(\arccos x)$
avec $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$

Exercice 33. Montrer que : $\forall x \in\,]-1, 1[,\ \arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$.

Fonctions hyperboliques

Exercice 34. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x)^p = \mathrm{ch}(px) + \mathrm{sh}(px)$.

Exercice 35. Donner une formule pour $\mathrm{th}(x + y)$. Montrer $\forall a, b \in\,]-1, 1[\,,\ \dfrac{a + b}{1 + ab} \in\,]-1, 1[$.

Exercice 36. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $a\,\mathrm{ch}x + b\,\mathrm{sh}x = 0$.

Exercice 37. Soit (n, x, y) dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$. Calculer :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{ch}(kx)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{sh}(kx)$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(x + ky)$