Feuille d'exercices 4

NOMBRES COMPLEXES

Révisions

Exercice 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$$z_1 = \frac{1}{1+3i}, \qquad z_2 = (1+i)^2, \qquad z_3 = \frac{2-i}{1+i}, \qquad z_4 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}, \qquad z_5 = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}.$$

Exercice 2. Représenter dans le plan puis mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

$$z_1 = 3+3i, \qquad z_2 = -\sqrt{3} - i, \qquad z_3 = -\frac{4}{3}i, \qquad z_4 = -2, \qquad z_5 = \sqrt{3}i - 3, \qquad z_6 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} + \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Exercice 3 (Arc moitié)**.** Pour $\theta, \theta' \in [0, \pi[$, mettre sous forme exponentielle $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$, $\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta'}$ et $\dfrac{1-\mathrm{e}^{i\theta}}{1+\mathrm{e}^{i\theta}}$.

Exercice 4. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer et simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{ik\theta}$.
2. En déduire des expressions factorisées de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 5. 1. Montrer que pour $u \in \mathbb{U}$, on a $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$.

2. Montrer que $\quad \forall u \in \mathbb{U}, \forall z \in \mathbb{C}^*, \ \left| u - \dfrac{1}{z} \right| = \dfrac{|\overline{u} - z|}{|z|}$.
3. Montrer que $\quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \ \dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}$.

Exercice 6. Pour quels entiers n le nombre $(1+\sqrt{3}i)^n$ est-il réel ? imaginaire pur ?

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $e^z = \sqrt{3} + i$ (b) $e^{i\pi z} = 1 - i$ (c) $e^{1-z} + e^z = \sqrt{2e}$

Exercice 8. Soit u et v deux nombres réels non tous les deux nuls (c'est-à-dire $(u,v) \neq (0,0)$).
Soit $A = \sqrt{u^2+v^2}$ le module de $u+iv$ et ϕ un argument de $u+iv$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u \cos x + v \sin x = A \cos(x - \phi).$$

Exercice 9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser (c'est-à-dire exprimer comme des sommes de $\cos(px)$ et $\sin(qx)$, avec p et q des entiers) les expressions suivantes.

(a) $\cos^3(x)$; (c) $\cos^4(x)$; (e) $\sin(x)\cos^2(x)$; (g) $\sin^2(2x)\cos(3x)$;

(b) $\sin^3(x)$; (d) $\sin^4(x)$; (f) $\sin^3(x)\cos^2(x)$; (h) $\cos^3(x)\sin(3x)$.

Racines carrées, équations du second degré

Exercice 10. Calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ à l'aide de racines carrées de $1+i$.

Exercice 11. Déterminer les racines des polynômes de degré 2 suivants :

(a) $P_1(z) = iz^2 + (1-3i)z + 4i$, (b) $P_2(z) = z^2 - (1+i)z + i$, (c) $P_3(z) = iz^2 + (i+2)z + 1 - 3i$.

Exercice 12. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$.
Déterminer une expression du terme général de u_n.

Exercice 13. Trouver les couples $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant les systèmes d'équations suivants.

(a) $\begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y = 3i \\ xy = -1-3i, \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y = 3+4i \\ xy = 5+15i, \end{cases}$

Exercice 14. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, les équations suivantes :

(a) $1 + z + z^2 + z^3 = 0$ (d) $|z-1| = |z-i|$ (g) $z^4 - (3+2i)z^2 + 8 - 6i = 0$

(b) $z^2 = |z|$ (e) $z^4 = 3 + 4i$ (h) $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$

(c) $z^3 = \overline{z}$ (f) $z^6 + z^3 + 1 = 0$ (i) $1 + \overline{z} = |z|$

Racines de l'unité

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$: $z^4 = -1 \qquad z^5 = -i$.

Exercice 16. 1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z+1)(z+j)(z+j^2) = (1+z)(1+jz)(1+j^2z)$.

Exercice 17. 1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation : $(z+i)^n = (z-i)^n$.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que les points dont l'affixe vérifie $(z-a)^n = (z-b)^n$ sont alignés sur une même droite verticale.

3. Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ l'équation : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

Exercice 18. 1. Démontrer que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.

2. En déduire une équation du second degré vérifiée par $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis une formule pour $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. Déterminer $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, puis les valeurs de $\cos$ et $\sin$ en $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{5}$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et on cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \omega^k\right)^n$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\omega^p = 1$ si et seulement si p est divisible par n.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer $\left(1 + w^k\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

3. En déduire que $S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{k=1}^{n} (\omega^i)^k$, et pour finir $S_n = 2n$.

Géométrie

Exercice 20. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1. Placer ces points dans le plan complexe.
2. Calculer $\dfrac{c-a}{d-a}$ et en déduire la nature du triangle ACD.
3. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 21 (Parallélogramme)**.** Soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c et d. On note I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Calculer les affixes des points I, J, K et L.
2. En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 22. Représenter l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient :

(a) $-1 < \mathrm{Re}(2z - 1) < 1$, (b) $\mathrm{Re}(z)(\mathrm{Im}(z) + 1) = 1$, (c) $\mathrm{Im}(z^2) < 1$.

Exercice 23. Démontrer et interpréter géométriquement l'*identité du parallélogramme* :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Exercice 24. Soit a dans $\mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z| = 1$ et $|z - a| = 1$.

Exercice 25. Déterminer l'image du cercle unité privé de 1 par l'application $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

Exercice 26. Soit A, B, C trois points non alignés d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

Exercice 27. Déterminer les points d'affixe $z \neq -5 + 3i$ tels que

(a) $\dfrac{z - 1 + i}{z + 5 - 3i} \in \mathbb{R}$ (b) $\dfrac{z - 1 + i}{z + 5 - 3i} \in i\mathbb{R}$

Exercice 28. Quel est l'ensemble des points du plan d'affixe z telle que les points d'affixe z, $\dfrac{1}{z}$ et $z - i$ sont alignés ?

Exercice 29. 1. Écrire sous forme complexe :

- la rotation de centre $2 - i$ et de rapport $\dfrac{\pi}{4}$;
- l'homothétie de centre $3 + 2i$ et de rapport -2 ;
- la composée $r \circ s$, où r est la rotation de centre 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre $i + 3$. Déterminer plus directement cette transformation.

2. Déterminer les type et éléments caractéristiques (centre, angle, rapport, etc.) des transformations suivantes :

(a) $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}} z + 1$; (b) $z \mapsto z + 4 - 2i$; (c) $z \mapsto 3z + i$.

Exercice 30. Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 0$. Montrer que le triangle de sommets a, b et c est équilatéral.