Feuille d'exercices 5 (début)

CALCULS D'INTÉGRALES

Calculs directs

Ex 1. Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, les primitives des fonctions suivantes.

a : $x \mapsto xe^{-2x^2}$,

b : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$,

c : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$,

d : $x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$,

e : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$,

f : $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$,

g : $x \mapsto \cos x \sin^5 x$,

h : $x \mapsto \sin^5 x$,

i : $x \mapsto \tan^2(x)$,

j : $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^4}$,

k : $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$,

l : $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$,

m : $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$,

n : $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan x}}$,

o : $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$,

p : $x \mapsto \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$,

q : $x \mapsto e^{e^x+x}$,

r : $x \mapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$,

s : $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$,

t : $x \mapsto e^{-x}\sin(2x)$,

u : $x \mapsto \mathrm{sh}x \sin x$.

Ex 2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-\alpha}$.

Ex 3. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \cos(t)e^{\sin(t)}dt$, (b) $\displaystyle\int_4^6 \frac{4}{(t-3)(t+1)}dt$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$, (d) $\displaystyle\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$.

Méthode : si un polynôme t^2+at+b a deux racines distinctes réelles r_1 et r_2, alors il existe α, β des réels tels que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}$, $\dfrac{1}{t^2+at+b} = \dfrac{\alpha}{t-r_1} + \dfrac{\beta}{t-r_2}$. Déterminer ces constantes dans les trois derniers cas.

Ex 4. On note F une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^2+t^3}$ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer la fonction $h(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en étudiant sa dérivée sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sa valeur en 1.

Intégrations par parties

Ex 5. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_1^e t^2 \ln t \, dt$,

(b) $\displaystyle\int_0^\pi t\sin(3t)\, dt$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\, dt$,

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\, dt$,

(e) $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{t^2}\, dt$,

(f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \arctan(x)\, dx$.

Ex 6. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.

2. En déduire $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Changements de variables

Ex 7. À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$,

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx$,

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$,

(f) $\displaystyle\int_0^1 x e^{\sqrt{x}}\,dx$,

(g) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$ (poser $u = \sqrt{e^x - 1}$) ,

(h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{t}{(t^2-1)^2}\,dt$,

(i) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,dt$,

(j) $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$,

(k) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$,

(l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$,

(n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$,

(o) $\displaystyle\int_{1/4}^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} dx$,

(p) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$,

(q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln(t)}{t^2}\,dt$.

Ex 8. En posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$.

Ex 9. Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable.

(a) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$,

(b) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$,

(c) $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch} x}$,

(d) $x \mapsto \sin(\ln(x))$,

(e) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$,

(f) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,

(g) $x \mapsto \dfrac{\ln t}{t+t(\ln t)^2}$,

(h) $x \mapsto \dfrac{1}{1+\tan x}$.

Ex 10. 1. Montrer : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Ex 11. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ pour tout $x \geq 1$ en posant $u = 1/t$.

Feuille d'exercices 5 (suite)

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Ex 12. Montrer que si y est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre et s'annule en un point, alors y est la fonction nulle.

Ex 13. Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes.

(a) $2y' - 3y = 0$,

(b) $(1+x^2)y' + 2xy = 0$,

(c) $y' - \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}y = 0$.

Ex 14. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle spécifié.

(a) $y' - 3y = 2 \quad$ sur $\mathbb{R}$,

(b) $y' + y = 1 + x + xe^{-x} + \sin(x) \quad$ sur $\mathbb{R}$,

(c) $y' - 2xy = \sinh(x) - 2x\cosh(x) \quad$ sur $\mathbb{R}$,

(d) $(1+x)^2y' + xy = \sqrt{1+x^2} \quad$ sur $\mathbb{R}$,

(e) $x^3y' + 4(1-x^2)y = x^4 \quad$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

(f) $y' + \tan(x)y - \sin(2x) = 0 \quad$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

Ex 15. Résoudre les problèmes de Cauchy suivant

(a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$, avec $y(0) = 1$.

(b) $(1-x)y' - (1+2x)y = 1 + 2x$ sur $]-1, 1[$, et avec $y(0) = 0$.

(c) $\cos(x)y' + \sin(x)y = 1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $y(0) = 2$.

Ex 16 (Équation fonctionnelle 1)**.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $f(s+t) = f(s)f(t)$.

Ex 17 (Équation fonctionnelle 2)**.** Décrire toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ 2xf(x) = 3\int_0^x f(t)dt.$$

Ex 18. On considère une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique, pour un certain $T > 0$.
On pose $\bar{a} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T a(x)dx$ la valeur moyenne de a.

Montrer que si f est une solution de l'équation différentielle

$$y' - a(x)y = 0$$

sur $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto e^{-\bar{a}x}f(x)$ est T-périodique.

Équations différentielles du deuxième ordre

Ex 19. Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$, (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$, (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Ex 20. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(a) $y'' - 2y' + y = te^t$,

(b) $y'' - 4y' + 5y = \cos(2t) - 2\sin(2t)$,

(c) $y'' + 9y = \cos(2t)e^t$,

(d) $y'' + 4y' - 5y = 2e^t$,

(e) $y'' + y' + y = e^t \cos(t)$,

(f) $y'' - 3y' + 2y = (t^2 + 1)e^t$.

Ex 21. Soit $m \in \mathbb{R}$. En fonction de la valeur de m, trouver les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + my = \cos(x).$$

Ex 22 (Équation fonctionnelle 1)**.** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Ex 23 (Équation fonctionnelle 2)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x).$$

Ex 24. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' + (t^2 - 2t + 1)y' - 2ty = 0$$

en introduisant la fonction $z = y' + y$.

Ex 25 (Un changement de variable)**.** On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{2x^2}y = 0 \tag{E}$$

sur $]0, +\infty[$. Pour ce faire, on définit, pour $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t)e^{-t/2}$.

1. Soit $x > 0$. Exprimer $y(x)$ en fonction de $z(\ln(x))$.
2. En déduire que la fonction z vérifie une équation différentielle (E') d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Résoudre (E'), puis résoudre (E).

Ex 26 (e3a PSI 2019)**.** On considère l'équation différentielle d'ordre 3

$$y^{(3)} - y = 0. \tag{E_1}$$

1. Soit f une solution de (E_1). On pose $g = f'' + f' + f$. Déterminer une équation différentielle du premier ordre (E_2) vérifiée par g.
2. Résoudre (E_2).
3. En déduire les solutions de (E_1).