École Normale Supérieure de Lyon **Année 2020–2021**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

Devoir Maison 1

À rendre le mercredi 21 octobre au début du TD, une copie par groupe. La clarté de la rédaction et la propreté de la présentation seront appréciées. Bon courage !

Exercice 1 (Préliminaires). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est continue en 0,

ii) f est continue,

iii) $\exists M > 0, \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$,

iv) l'image par f d'un borné est bornée.

b) On suppose que f est continue. Montrer que les quatre réels suivants sont égaux :

i) $\sup\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} : x \in E \setminus \{0\}\right\}$,

ii) $\sup\left\{\|f(x)\|_F : x \in E,\ \|x\|_E = 1\right\}$,

iii) $\sup\left\{\|f(x)\|_F : x \in E,\ \|x\|_E \leq 1\right\}$,

iv) $\inf\left\{M \geq 0 : \forall x,\ \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\right\}$.

On note $\|f\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ leur valeur commune.

c) On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues sur E à valeurs dans F. Montrer que l'application $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ définie en question précédente est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ qui le rend complet lorsque $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Vérifier que cette norme est sous-multiplicative lorsque $E = F$.

d) Sans détailler, donner la définition de la continuité d'une application bilinéaire et de sa norme.

Exercice 2 (La continuité dépend de la norme). On considère E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et la forme linéaire $\varphi : f \in E \mapsto f(0)$. Munir l'espace E d'une norme pour laquelle φ est continue puis d'une norme pour laquelle φ n'est pas continue.

Exercice 3 (Un exemple). On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et on le munit de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$. Soient $a \in]0,1[$ et T_a la forme linéaire définie par

$$\forall f \in E, \quad T_a(f) = \int_0^a x^2 f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Montrer que T_a est continue et calculer sa norme. Est-elle atteinte ?

Exercice 4 (Bilinéarité). Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. Montrer que les espaces $\mathcal{L}_c(E \times E, F)$ et $\mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E,F))$ sont en bijection isométrique, où on munit $E \times E$ de la norme sup.

Exercice 5 (Noyau). Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel et f une forme linéaire non nulle. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé et si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas dense.