École Normale Supérieure de Lyon | **Année 2020–2021**

Département de Mathématiques | **Topologie et calcul différentiel**

DM 2 : Calcul différentiel

A rendre pour le mercredi 9 décembre, si vous le souhaitez une copie par groupe. La clarté de la rédaction, la concision des arguments et la propreté de la présentation seront appréciées.

Exercice 1. *Descente de gradient à pas fixe*
Soit H un espace euclidien de dimension finie et $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que si $d^2 f_x$ est définie positive pour un certain x de H, alors il existe un ouvert contenant x sur lequel $d^2 f$ est définie positive.

On suppose qu'il existe $0 < c < C$ tels que $c\|h\|^2 \leq d^2 f_x(h,h) \leq C\|h\|^2$ pour tous $x \in H, h \in H$.

2. Montrer que f est convexe, c'est à dire $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ pour tous $x, y \in H$ et $t \in [0,1]$. Montrer qu'elle admet un unique minimum local strict $x^\star$ qui est aussi global, que son gradient $\nabla f : H \to H$ est C-lipschitzien, et que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.
3. Soit α positif et $x_0 \in H$. Donner une condition suffisante sur α pour qu'il y ait convergence vers $x^\star$ du procédé de descente de gradient $x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$?
   Indication : chercher à quelle condition la suite $(f(x_n))$ est décroissante.

Exercice 2. *Fonctions plateaux et régularisation*
On définit l'application $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\theta(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & \text{si } t \in]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, ainsi que $\Theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\Theta(x) = \theta(||x||_2^2)$.

1. Montrer que θ et Θ sont de classe C^∞. Quel est le support de Θ ?
2. Soient $\rho > 0$ et $\alpha \in]0, \rho[$. Soit $y \in B(0, \alpha)$. On pose :

$$\begin{array}{rccl} \mu : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & x + \Theta\left(\frac{x}{\rho}\right) y. \end{array}$$

   (a) Montrer que $\mu \in \mathcal{C}^\infty$ et que μ est une application fermée (l'image de tout fermé est fermée).
   (b) Montrer que, pour α assez petit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $D\mu(x)$ est inversible. En déduire qu'alors μ est surjective.
   (c) Montrer que, pour α assez petit, $\mu - Id$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. En déduire qu'alors μ est injective.
   (d) Montrer que, pour α assez petit, il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ν de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ valant l'identité à l'extérieur de $B(0, \alpha)$ et satisfaisant $\nu(0) = y$.
3. Soit $B(x_0, r)$ une boule de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne. Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, strictement positive sur $B(x_0, r)$, nulle en dehors de la boule et valant 1 en x_0.

4. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Pour tout $\eta > 0$, trouver un ouvert U contenant K et un nombre fini de fonctions $\psi_i : U \to [0, +\infty[$ de classe C^∞ (définies à partir des fonctions φ de la question précédente), chacune nulle hors d'une boule de rayon η et centrée en un point de K telles que :

   $$\forall x \in U, \quad \sum \psi_i(x) = 1.$$

   (b) Soit $f : K \to \mathbb{R}^n$ continue. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert V contenant K et une application $h : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telle que

   $$\forall x \in K, \quad \|f(x) - h(x)\| < \varepsilon.$$