TD 11 : Espaces de Hilbert

Exercice 1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, et en donner une base hilbertienne dénombrable. Cette base hilbertienne est-elle une base d'espace vectoriel ?

Exercice 2. Soit E un ev de dimension finie muni d'un produit scalaire, et F un sev non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'une projection de E sur F est de norme 1 si et seulement si elle est orthogonale.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H. On note p_C la projection orthogonale sur C, u et v des éléments de H.

a) Montrer que $v = p_C(u)$ si et seulement si $v \in C$ et $\langle u - v, c - v\rangle \leq 0$ pour tout c dans C.

b) Montrer que p_C est 1-lipschitzienne.

c) Montrer que $\langle p_C(u) - p_C(v), u - v\rangle \geq 0$ quels que soient u et v dans H.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur continu sur H.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction $T^\star \in \mathcal{L}_c(H)$ telle que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle$ pour tous x et y dans H. On l'appelle *adjoint* de T.

b) Montrer que $\ker(T^\star) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ et $\mathrm{Im}(T^\star) \subset \ker(T)^\perp$.

c) Soit $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ et T défini sur H par $Tf(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que T est continu et déterminer son adjoint.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme S si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists J$ finie, $J \subset I$, telle que pour toute partie K finie satisfaisant $J \subset K \subset I$, on a :

$$\left\| S - \sum_{k\in K} x_k \right\| < \varepsilon.$$

a) Montrer que si E est complet, cela équivaut à : "$\forall \varepsilon > 0$, $\exists J$ finie, $J \subset I$, telle que pour toute partie L finie satisfaisant $L \subset I$ et $J \cap L = \emptyset$ on a : $\| \sum_{k\in L} x_k \| < \varepsilon$".

b) Montrer qu'une famille sommable est à support dénombrable.

c) Soit $I = \mathbb{N}$, et E complet. Montrer que la famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si elle est commutativement convergente, c'est-à-dire : pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum x_{\varphi(i)}$ est convergente.

d) Soient H un espace de Hilbert, et $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ une famille orthonormale. Montrer que, pour tout x, la famille $\{\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha : \alpha \in A\}$ est sommable, et que sa somme est la projection hilbertienne de x sur $\overline{\mathrm{Vect}\{u_\alpha : \alpha \in A\}}$.

Exercice 6.

a) Rappeler pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

b) Soit c_{00} l'espace préhilbertien des suites nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire
$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$
Soit f la forme linéaire sur c_{00} donnée par $f(u) = \sum_n \frac{u_n}{n+1}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan fermé, et que $(\mathrm{Ker}(f))^\perp = \{0\}$.

c) (Bonus **) Plus généralement, montrer que dans tout espace pré-hilbertien non complet, il existe un hyperplan fermé dont l'orthogonal est réduit à $\{0\}$.

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert et (x_n) une suite de H. On dit que x_n *converge faiblement* vers $x \in H$ si pour tout y dans H, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, et on le note $x_n \rightharpoonup x$.

a) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de H. Que dire de $\langle x_n, y_n\rangle$ dans les cas suivants ?

(a) $\begin{cases} x_n \to x, \\ y_n \to y. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_n \to x, \\ y_n \rightharpoonup y. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_n \rightharpoonup x, \\ y_n \rightharpoonup y. \end{cases}$

b) Soit K un compact de H. Montrer qu'une suite de K converge si et seulement si elle converge faiblement.

c) Montrer que toute suite faiblement convergente est bornée.

d) Soit x_n une suite de H faiblement convergente. Montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, la suite (Tx_n) est faiblement convergente.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de démontrer que toute suite bornée d'un Hilbert converge faiblement à extraction près. Soit H un espace de Hilbert séparable (pour commencer), et (x_n) une suite bornée de H.

a) Supposons H séparable et D une partie dénombrable dense de H. Montrer qu'on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $(\tilde{x}_n)_n$ telle que pour chaque y de D, $\langle \tilde{x}_n, y\rangle$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite qu'on notera $\ell(y)$.

b) Montrer que $\langle \tilde{x}_n, y\rangle$ converge pour tout y de H.

c) Montrer que la fonction ℓ ainsi définie est une forme linéaire continue sur H. Conclure.

d) Comment faire sans hypothèse de séparabilité sur H ?

Remarque : ce résultat est la traduction du *théorème de Banach-Alaoglu* dans un espace de Hilbert.

Exercice 9. Soit H un espace de Hilbert, et $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de vecteurs de H linéairement indépendants.

a) Construire un ensemble orthonormé $\{u_n\}$ où u_n est une combinaison linéaire de $\nu_1, \dots, \nu_n$.

b) En déduire que tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne (sans utiliser l'axiome du choix).

c) Montrer que H est séparable si et seulement si il possède une base hilbertienne finie ou dénombrable.