TD 2 : Connexité, complétude

Exercice 1. Soit
$$E = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), x \in]0,1] \right\}.$$
Soit X l'adhérence de E dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle.

a) Déterminer X.

b) Montrer que X n'est pas connexe par arcs.

c) Montrer que X est connexe.

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique.

a) Les boules ouvertes de (X,d) sont-elles nécessairement connexes ? Et si X est connexe ?

On suppose maintenant que toutes les boules ouvertes sont connexes. Soit A une partie connexe.

b) Montrer que l'ensemble $A_\varepsilon = \{x \in X,\ d(x,A) < \varepsilon\}$ est connexe pour tout $\varepsilon > 0$.

On suppose maintenant que (X,d) est non borné et connexe.

c) Montrer que les sphères de X ne sont pas vides.

Exercice 3.

a) Soit (X,d) un espace connexe. Montrer que X^2 muni du maximum des distances est connexe.
Indication : utiliser le fait que les fibres $\{x\} \times X$ *et* $X \times \{x\}$ *sont homéomorphes à* X.

b) Montrer que le plan $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe.

c) Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient E un espace vectoriel normé réel et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Si F est de codimension au moins 2, montrer que $E \setminus F$ est connexe.

b) Si F est de codimension 1 et fermé, montrer que $E \setminus F$ a deux composantes connexes.

Exercice 5 (Les groupes linéaires). On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $||(a_{ij})|| := \max\{|a_{ij}|\}$.

a) Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini de points du plan complexe est connexe. Qu'en est-il du cas dénombrable ?

b) Montrer que le groupe $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
Indication : pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, *considérer* $z \mapsto \det(zA + (1-z)B)$.

c) Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Décrire ses composantes connexes.
Indication : trouver des familles "paramétrisables par arcs" qui engendrent $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$.

d) Montrer que $\mathrm{SO_n}(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 6 (Les ouverts connexes d'un evn sont connexes par lignes brisées). Soit U un ouvert connexe dans un espace vectoriel normé E.

a) On définit la relation d'équivalence suivante sur U : on dit que $x \sim y$ quand x et y peuvent être *reliés par lignes brisées*, c'est-à-dire s'il existe une fonction continue et affine par morceaux $f : [0,1] \to U$ avec $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Montrer que les classes d'équivalences sont des ouverts fermés de U.

b) En déduire que U est connexe par arcs.

Exercice 7. Montrer qu'un espace métrique est complet si et seulement si il vérifie la propriété suivante, dite des *fermés emboîtés* : pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion et dont le diamètre tend vers 0, l'intersection $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est un singleton.

Exercice 8 (Espaces fonctionnels). On considère l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (qui est de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$) et F le sous-espace constitué des fonctions lipschitziennes.

a) Est-ce que E est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$?

b) Le sous-espace induit $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est-il complet ? Et la partie formée des fonctions 1-Lipschitziennes ?

c) Montrer que $N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]}\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\right)$ définit une norme sur F, et que (F, N) est complet.

Exercice 9 (Espaces ℓ^p). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p = [1, \infty[$, on note

$$\ell^p = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty\right\},$$

que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_p$, et ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) Montrer que ℓ^p est complet pour tout $p \in [1, \infty]$.

b) Montrer que pour $p < q \in [1, \infty]$, on a toujours $\ell^p \subsetneq \ell^q$ avec injection continue.

c) Montrer que la notation ℓ^∞ est justifiée : $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$ pour $u \in \ell^1$.

d) On note c_0 l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Vérifier que c_0 est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ qui contient tous les ℓ^p, $p < \infty$.

e) Montrer que ℓ^1 n'est pas fermé dans ℓ^∞. Quelle est sa fermeture ?

f) Vérifier que pour $p < q < \infty$, ℓ^p est dense dans ℓ^q, lui-même dense dans c_0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces espaces sont-ils denses dans ℓ^∞ ? Est-ce que ℓ^p est complet pour $\|\cdot\|_q$ si $p < q$?
Indication : on pourra considérer les suites nulles à partir d'un certain rang.

g) Vérifier que pour tout $p < \infty$, ℓ^p est séparable.

h) Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.
Indication : pour deux sous-ensembles différents $A, B \subset \mathbb{N}$, considérer $B(\chi_A, \frac{1}{2}) \cap B(\chi_B, \frac{1}{2})$.