TD3 : Complétude, espaces de Banach, point fixe

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Exercice 2. Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|,$$

définit une norme sur E qui rend cet espace complet.

Exercice 3. Soit $\alpha \in]0,1]$. On considère Lip_α l'espace des fonctions α-hölderiennes sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Montrer que l'application N définie par

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

est une norme sur Lip_α qui le rend complet. L'espace Lip_α est-il complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 4 (Espaces ℓ^p). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p = [1, \infty[$, on note

$$\ell^p = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\},$$

que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_p$, et ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que ℓ^p est complet pour tout $p \in [1, \infty]$.
2. Montrer que pour $p < q \in [1, \infty]$, on a toujours $\ell^p \subsetneq \ell^q$ avec injection continue.
3. Montrer que la notation ℓ^∞ est justifiée : $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$ pour $u \in \ell^1$.
4. On note c_0 l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Vérifier que c_0 est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ qui contient tous les ℓ^p, $p < \infty$.
5. Montrer que ℓ^1 n'est pas fermé dans ℓ^∞. Quelle est sa fermeture ?
6. Vérifier que pour $p < q < \infty$, ℓ^p est dense dans ℓ^q, lui-même dense dans c_0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces espaces sont-ils denses dans ℓ^∞ ? Est-ce que ℓ^p est complet pour $\|\cdot\|_q$ si $p < q$?
   Indication : on pourra considérer les suites nulles à partir d'un certain rang.
7. Vérifier que pour tout $p < \infty$, ℓ^p est séparable.
8. Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.
   Indication : pour deux sous-ensembles différents $A, B \subset \mathbb{N}$, considérer $B(\chi_A, \frac{1}{2}) \cap B(\chi_B, \frac{1}{2})$.

Exercice 5.

1. Trouver une application sans point fixe d'un espace complet (X, d) dans lui-même qui réduit strictement les distances (*i.e.* $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous x et y dans X).
2. Trouver une application contractante sans point fixe.

Exercice 6.

1. Soit $f : E \to E$ avec (E, d) un espace métrique complet. Montrer que s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que f^r est contractante, alors f admet un unique point fixe $a \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées de x_0 par f converge vers a.
2. Soit $X = (\mathcal{C}^0([0, 1]), || \cdot ||_\infty)$. On considère l'opérateur

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\ \mathrm{d}t.$$

   Montrer que T est contractant sur X à partir du rang 2.
3. En déduire qu'il existe une unique fonction $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f'(x) = f(x - x^2)$ et $f(0) = 1$.

Exercice 7. Soit $C^0_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation fonctionnelle

$$f(t + \sqrt{2})^2 + f(t - \sqrt{2})^2 + 100f(t) = \sin(2\pi t),$$

admet une solution $f \in C^0_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\| \cdot \|$ dérivant d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit g une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ pour laquelle il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle g(x) - g(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.

Exercice 9. On considère l'espace de Banach $E = (C^0([0, 1], \mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $F = \{\gamma \in E : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1\}$ est fermé dans E.
2. Montrer que l'application $H : F \to E$ définie par

$$H\gamma(t) = \begin{cases} 1/3\gamma(3t) & \text{si } 0 \leq t < 1/3, \\ 1/3 + e^{i\pi/3}/3\gamma(6(t - 1/3)) & \text{si } 1/3 \leq t < 1/2, \\ (1 + e^{i\pi/3})/3 + e^{-i\pi/3}/3\gamma(6(t - 1/2)) & \text{si } 1/2 \leq t < 2/3, \\ 2/3 + 1/3\gamma(3(t - 2/3)) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

   est à image dans F et contractante.
3. Montrer que si $\gamma_0 \in F$ et $\gamma_n = H^n\gamma_0$ pour tout $n \geq 1$, alors la suite $(\gamma_n)_n$ converge. Caractériser sa limite. Dessiner quelques termes de cette suite pour le choix de γ_0 égale à l'inclusion $[0, 1] \to \mathbb{C}$.