

TD 4 : TOPOLOGIE GÉNÉRALE, COMPACTITÉ

EXERCICE 1. Si $(E, <)$ est un ensemble totalement ordonné, la topologie de l'ordre sur E est la topologie obtenue en prenant pour base d'ouverts les intervalles ouverts. Vérifier que la topologie de l'ordre sur \mathbb{R} coïncide avec la topologie usuelle.

EXERCICE 2. On définit sur \mathbb{R} la *topologie de Zariski* de la manière suivante : les ouverts sont exactement les complémentaires des ensembles finis, et l'ensemble vide.

- Prouver que la topologie de Zariski est effectivement une topologie.
- Montrer que les fermés de cette topologie sont les ensembles {racines de $P, P \in \mathbb{R}[X]$ }.
- Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles $[0, 1]$ et \mathbb{Z} pour cette topologie.
- Montrer que les polynômes et l'exponentielle sont des fonctions continues dans la topologie de Zariski, contrairement au sinus.
- La topologie de Zariski est-elle séparée ? (on dit qu'une topologie est *séparée* si pour tout couple de points distincts, il existe un couple d'ouverts disjoints contenant chacun un des points.)

EXERCICE 3. (Topologie Quotient) Soit X un espace topologique. Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . On note X/\mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence. On note $\pi : x \in X \mapsto [x] \in X/\mathcal{R}$ l'application qui à un élément de X associe sa classe d'équivalence. On dit que $U \subset X/\mathcal{R}$ est un ouvert de X/\mathcal{R} si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X .

- Montrer qu'on définit ainsi une topologie sur X/\mathcal{R} . Montrer que cette topologie est celle avec le plus d'ouverts qui rende π continue.
- Le saturé d'un sous-ensemble A de X est l'ensemble des points de X en relation avec un élément de A . Montrer que π est une application ouverte si et seulement si le saturé de tout ouvert de X est ouvert.
- Soit Z un espace topologique. Montrer qu'une application $g : X/\mathcal{R} \rightarrow Z$ est continue si et seulement si $g \circ \pi : X \rightarrow Z$ est continue.
- Soit $f : X \rightarrow Z$ une application continue telle que $(x\mathcal{R}y \implies f(x) = f(y))$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\bar{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Z$ telle que $\bar{f} \circ \pi = f$.
- Montrer que la propriété ci-dessus caractérise la topologie quotient.
- Soit $A \subset X$. On appelle écrasement de X sur A l'espace X/\mathcal{R} où \mathcal{R} est la relation d'équivalence engendrée par $x\mathcal{R}y$ pour tout couple $(x, y) \in A^2$. Décrire la sphère S^2 comme l'écrasement d'un espace sur un sous-espace convenable.

EXERCICE 4.

- Montrer que la topologie quotient sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} correspond à la topologie associée à la distance induite. Montrer que \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact.
- Montrer que l'espace \mathbb{R}/\mathbb{Z} muni de sa topologie quotient est homéomorphe au cercle S^1 .
- Montrer que la topologie quotient pour \mathbb{R}/\mathbb{Q} correspond à la topologie grossière.

EXERCICE 5. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'espace (X, d) est séparable.
- (ii) X a une base dénombrable d'ouverts, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n \geq 1}$ de X telle que tout ouvert U de X s'écrive comme la réunion d'ouverts U_n .

En déduire que si $A \subset E$, $(A, d|_A)$ est séparable si (E, d) l'est.

EXERCICE 6. Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique. Montrer que s'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j \in J}$ d'ouverts de E , non vides et deux à deux disjoints, alors E n'est pas séparable. En déduire que l'espace $C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ n'est pas séparable.

EXERCICE 7. a) Soit X un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

- b) Soient X et Y deux espaces métriques compacts, et $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$. Montrer que la fonction $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

EXERCICE 8.

- a) Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers ℓ . Montrer que l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un compact.
- b) On considère l'espace métrique $C = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d(x, y) = \sum 2^{-n} |x_n - y_n|$. Nous avons déjà vu que la convergence d'une suite d'éléments de C est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée (on peut même vérifier que cette distance induit la topologie produit). Montrer que C est compact par extraction diagonale.

EXERCICE 9. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé.

- a) Soient $K \subset E$ un compact et $F \subset E$ un fermé. Montrer que $K + F$ est fermé. Est-ce encore vrai si K est seulement supposé fermé ?
- b) Soient $K, K' \subset E$ des compacts. Montrer que $K + K'$ est compact.

EXERCICE 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Montrer que f est un homéomorphisme.

EXERCICE 11. (Connexité et compacité) On se place dans un espace métrique E .

- a) Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes non vides est non-vide.
- b) Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes et connexes $(K_i)_{i \geq 1}$ est connexe. *Indication : pour U et V deux ouverts disjoints de E , supposons que $\bigcap_{i \geq 1} K_i \subset U \cup V$. Considérer alors la suite $K_i \setminus (U \cup V)$.*
- c) L'affirmation est-elle vraie si on remplace compact par fermé ?

EXERCICE 12. Soient E un espace vectoriel normé de dimension infinie et K une partie compacte de E . Montrer que $E \setminus K$ est connexe. Est-ce toujours le cas si E est de dimension finie ?