École Normale Supérieure de Lyon **Année 2020–2021**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

TD 6 : Différentiation et dérivées partielles

Exercice 1.

a) Soient $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$ et $h(x,y) = \frac{xy^3}{x^4+y^2}$. Ces fonctions se prolongent-elles en $(0,0)$ par continuité ? Y admettent-elles des dérivées directionnelles ? Sont-elles différentiables ? de classe C^1 ?

b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées directionnelles en 0 mais qui n'est même pas continue en 0.

Exercice 2. Donner l'expression de la différentielle de l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en utilisant la notion de dérivée partielle.

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de α, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}}.$$

Exercice 4.

a) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Une norme sur E considérée comme une application de E dans $\mathbb{R}$ peut-elle être différentiable en 0 ?

b) Soit E un espace euclidien et N la norme euclidienne sur E. Montrer que N est différentiable sur E privé de l'origine et donner sa dérivée.

c) Soit $N_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ la norme p sur $\mathbb{R}^n$. Pour $p = 1, 2, \infty$, déterminer les points de différentiabilité de N_p. Déterminer les dérivées directionnelles de N_p là où elles sont définies. *Indication : observer l'allure des boules.*

Exercice 5. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, avec I ouvert et J compact, et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle en la première variable continue sur $I \times J$. On considère $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables et $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que F est dérivable sur I et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice 6. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $ab \neq 1$, exprimer la quantité $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Exercice 7. On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2},$$

avec $f(0,0) = 0$.

a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) On fixe θ et on pose $g_\theta(r) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que g_θ admet un minimum local strict en $r = 0$.

c) Le point $(0,0)$ est il un minimum local ?

Exercice 8. Déterminer les applications $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a,$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On utilisera le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 9. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La fonction f est convexe.

b) Pour tout $(x, y) \in U^2$, $f(y) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + f(x)$.

c) La fonction f peut s'écrire comme supremum d'une famille de fonctions affines.

Si f est convexe, montrer que ses points critiques dans U sont des minima globaux, et que l'ensemble de ces points critiques est convexe.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y, \\ f'(x) \text{ sinon,} \end{cases}$ est continue.

b) Montrer que si f est de classe C^2, alors F est de classe C^1.

Exercice 11. Montrer que le système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y), \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. En utilisant le théorème de différentiabilité des suites de fonctions, montrer que l'application exponentielle $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est de classe C^1.