École Normale Supérieure de Lyon **Année 2020–2021**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

TD 8 : Compacité relative, espace $\mathcal{C}^0$

Exercice 1. (Généralités sur la compacité relative.)
Une partie d'un espace métrique est dite *relativement compacte* si son adhérence est compacte.

a) Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, le fait d'être relativement compact est équivalent au fait d'être borné.

b) Montrer que dans un espace métrique E, une partie A est relativement compacte si et seulement si toute suite de A admet une sous-suite convergente dans E.

c) Soient E et F des espaces métriques et $f \in \mathcal{C}^0(E,F)$. Vérifier que si A est une partie relativement compacte de E, alors $f(A)$ est relativement compacte.

d) Démontrer le théorème d'Ascoli en termes de compacité relative : si K est compact, une partie de $\big(\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

Exercice 2. Lesquels de ces ensembles sont relativement compacts dans $\big(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$?

a) $M_1 = \{t \mapsto t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

b) $M_2 = \{t \mapsto \sin(t+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$,

c) $M_3 = \Big\{x : x(t) = \int_0^t y(s)ds, y \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), ||y||_\infty \leq 1\Big\}$,

d) $M_4 = \big\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), |p_n(f)| \leq \frac{1}{n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}\big\}$, où $p_n(f) := \int_0^1 f(t)t^n dt$ (*"moment n-ième"*).

Exercice 3. On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme sup. On considère une fonction continue $k : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$. On définit l'opérateur $T : E \to E$ par $Tf(x) = \int_0^1 k(t,x)f(t)dt$.

a) Montrer que T est bien défini et continu.

b) Montrer que $\overline{T(B_{\|.\|_\infty}(0,1))}$ est une partie compacte de $(E, \|.\|_\infty)$. *Indication : utiliser l'uniforme continuité de k.*

c) Soit $\lambda \neq 0$. Montrer que l'espace propre $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_E)$ est de dimension finie.

Exercice 4. (Compacité relative dans $\mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{R})$.)
On fixe n dans $\mathbb{N}$, on munit $E_n = \mathcal{C}^n([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\infty$ et on va établir un critère pour être d'adhérence compacte dans cet espace. On définit $\varphi = \frac{d^n}{dx^n} : E_n \to \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, où l'on munit encore $\mathcal{C}^0$ de la norme sup.

a) Montrer que φ est continue surjective, n'est pas un isomorphisme, et trouver son noyau $\operatorname{Ker}\varphi$.

b) Prouver qu'une partie bornée de $\operatorname{Ker}\varphi$ est d'adhérence compacte.

c) Prouver que M est d'adhérence compacte dans E_n si et seulement si M est borné dans E_n et l'ensemble $M_n = \{x^{(n)} : x \in M\}$ est équicontinu.

d) Est-il vrai que M est d'adhérence compacte dans E_n si et seulement si M_n est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$?

e) Donner un exemple d'un ensemble M dans E_1, qui est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ mais pas dans E_1.

Exercice 5. (Isométries.)
Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Soit $Isom(K)$ l'ensemble des applications de K dans K qui préservent la distance usuelle de $\mathbb{R}^n$. Montrer que c'est un espace compact lorsqu'on le munit de la distance $d(f,g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\|, x \in K\}$.

Exercice 6.

a) Soient E un espace de Banach et X une partie de E. Montrer que X est compacte si et seulement si X est fermée, bornée et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie tel que $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

   Rappel : un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.

b) Une partie A de $\ell^1(\mathbb{R})$ est dite équisommable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall x \in A, \quad \sum_{n \geq N} |x_n| < \varepsilon.$$

   Montrer qu'une partie A de $\ell^1(\mathbb{R})$ est compacte si et seulement si elle est fermée, bornée et équisommable. Donner un exemple.

Exercice 7.
On munit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ de la distance habituelle $d(f,g) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} \min(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty)$.

a) En utilisant un résultat de calcul différentiel, montrer que E est complet.

b) On dit qu'une partie B de E est *bornée* si pour tout voisinage V de 0, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset V$. Montrer que tout fermé borné est compact.

c) La topologie de E peut-elle être définie par une norme ?

Exercice 8. (Théorème de Cauchy-Peano.)
Soit $F : [-r, r] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $M = \sup|F|$ et $T = r/M$. On veut montrer qu'il existe une fonction dérivable $y : [0, T] \to [-r, r]$ qui vérifie l'équation différentielle $y' = F(y)$ avec condition initiale $y(0) = 0$.

a) On fixe $n > 0$. Soit $(a_i^n)_{0 \leq i \leq n}$ la solution du schéma d'Euler explicite associé à l'équation, pour le pas $h_n = T/n$:

$$\begin{aligned} &a_0^n = 0, \\ &a_{i+1}^n = a_i^n + h_n F(a_i^n), \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

   Vérifier qu'elle est bien définie (montrer par récurrence sur i l'inégalité $|a_i^n| \leq ri/n$).

b) Soit $y^n : [0, T] \to [-r, r]$ la fonction affine par morceaux sur les $[h_n i, h_n(i+1)]$ telle que $y^n(h_n i) = a_i^n$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Montrer que y^n est M-Lipschitzienne.

c) Montrer que la suite $(y^n)_{n \geq 0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R})$.

Soit ω le module d'uniforme continuité de F, *i.e.* $\omega(\varepsilon) = \sup_{|x-y|<\varepsilon} |F(x) - F(y)|$ pour $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuité de F équivaut à $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0$.

d) Montrer que pour $0 \leq i \leq n$, on a

$$|y^n(h_n(i+1)) - y^n(h_n i) - \int_{h_n i}^{h_n(i+1)} F(y^n(s))ds| \leq h_n \omega(h_n M).$$

   En déduire que pour tout $0 \leq i \leq n$, on a $|y^n(h_n i) - \int_0^{h_n i} F(y^n(s))ds| \leq T\omega(h_n M)$.

e) Conclure.