Des tourtereaux aux arondes : Hamilton-Jacobi sans la convexité

I) Le problème des tourtereaux : introduction au contrôle optimal

II) Résolution de l'équation évolutive de Hamilton-Jacobi dans le cas convexe

III) Sans la convexité : caractéristiques et solution variationnelle

I) Le problème des tourtereaux : introduction au contrôle optimal

Rey 2010, Goudon-Lafitte 2013

$x(t)$ bien-être amoureux

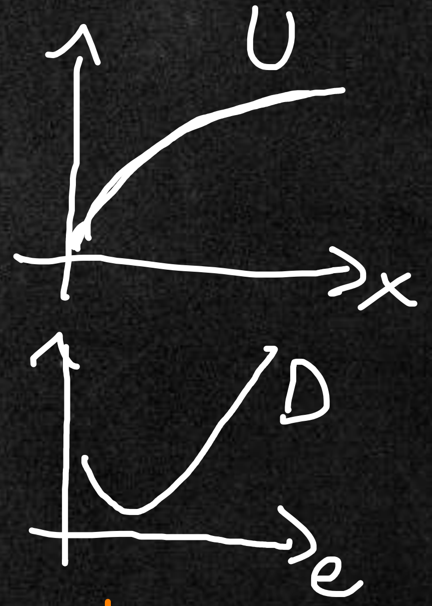
Modèle naïf d'évolution

$$\left.\begin{cases} x'(t) = -\underset{\text{constante d'usure}}{r}\,x(t) + \overset{\text{effort}}{e}(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}\right\} (\heartsuit)$$

Rq: x_0, e donnés $\Rightarrow$ unique sol° $x^{\heartsuit}$.

Fonctionnelle de satisfaction

$$J(x,e) = \int_0^{+\infty} e^{-\underset{\text{paramètre d'impatience}}{\rho} t}\big(U(x(t)) - D(e(t))\big)\,dt$$



But : optimiser J sous la contrainte $\heartsuit$: apparition d'un effort optimal $e^{\heartsuit}$ ("contrôle")

Technique : un multiplicateur de Lagrange... fonctionnel !

$$L(x,e,\lambda) = J(x,e) - \int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\,\lambda(t)\,\underbrace{(x'(t)+rx(t)-e(t))}_{\text{c'est la contrainte !}}\,dt$$

↑ "Lagrangien" d'optimisation

Théorème :

$(x^\heartsuit, e^\heartsuit)$ max de J s.c $\heartsuit$ $\iff$ $\exists \lambda^\heartsuit$, $(x^\heartsuit, e^\heartsuit, \lambda^\heartsuit)$ point selle de L

(i.e. $L(x,e,\lambda^\heartsuit) \leq L(x^\heartsuit,e^\heartsuit,\lambda^\heartsuit) \leq L(x^\heartsuit,e^\heartsuit,\lambda)$) $\forall x,e,\lambda$

Et dans ce cas,

Calcul variationnel

$$\begin{cases} x^{\heartsuit\prime} = -rx^\heartsuit + e^\heartsuit \quad \text{(ouf !)} \\ \lambda^\heartsuit = D'(e^\heartsuit) \\ \lambda^{\heartsuit\prime} = (r+\rho)\lambda^\heartsuit - U'(x^\heartsuit) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\heartsuit\prime} = -rx^\heartsuit + e^\heartsuit \\ e^{\heartsuit\prime} = \dfrac{(r+\rho)D'(e^\heartsuit) - U'(x^\heartsuit)}{D''(e^\heartsuit)} \end{cases}$$

Système dynamique avec point fixe $(\bar{x}, \bar{e} = r\bar{x})$

Hamilton-Jacobi avec escompte

On note $V(x_0) = \sup_{e} J(x, e)$ s.c $(\heartsuit)$ $\begin{cases} x' = -rx + e \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

et $H : (x_0, p) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \sup_{\kappa \in \mathbb{R}_+} \left[U(x_0) - D(\kappa) + p(-rx_0 + \kappa) \right]$ (sup atteint ssi $p = D'(\kappa)$)

Alors V est solution de viscosité de l'équation de Ham-Jacobi escomptée :

$$\boxed{\boxed{\rho V(x_0) + H(x_0, V'(x_0)) = 0}}$$

et $(x^{\heartsuit}, \lambda^{\heartsuit})$ est une trajectoire exactement conformément symplectique : $\begin{cases} x' = \dfrac{\partial H}{\partial p}(x, \lambda) \\ \lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, \lambda) + \rho\lambda \end{cases}$

II) Résolution de l'équation évolutive de Hamilton-Jacobi dans le cas convexe

$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un Hamiltonien lisse et autonome (= ind. du temps).
$(q,p) \mapsto H(q,p)$

$u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une donnée initiale lisse (ou au moins lipschitzienne)

But : trouver $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \partial_t u(t,q) + H(q, \nabla_q u(t,q)) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$

Hypothèse : H Tonelli, c'est-à-dire $\begin{cases} C^2 \\ \partial_p^2 H \geq \alpha \mathrm{Id} \quad (\text{str. cvxe en } p) \\ H \text{ superlinéaire en } p \end{cases}$

et $L(q,v) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} p \cdot v - H(q,p)$

est alors Tonelli aussi, et $H(q,p) = \sup_v p \cdot v - L(q,v)$.

Inégalité de Fenchel-Legendre :

$\forall q, p, v, \quad L(q,v) + H(q,p) \leq p \cdot v$ avec $= \iff p = \frac{\partial L}{\partial v}(q,v) \iff v = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p)$

Formulation des dynamiques lagrangienne et hamiltonienne

$t \mapsto q(t)$ trajectoire dans $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{A}_L(q) = \int_0^t L(q(s), \dot{q}(s))\, ds$$

action lagrangienne

q minimise $\mathcal{A}_L$ à extrémités fixées si et seulement si

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(q(t), \dot{q}(t))\right) = 0$$

équation d'Euler-Lagrange

$t \mapsto (q(t), p(t))$ trajectoire dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{A}_H(q,p) = \int_0^t \left[p(s) \cdot \dot{q}(s) - H(q(s), p(s))\right] ds$$

action hamiltonienne

(q,p) est un point critique de $\mathcal{A}_H$ si et seulement si

système hamiltonien $\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) \end{cases}$

Semi-groupe de Lax-Oleinik

$(t,q) \overset{u}{\longmapsto} T^t u_0(q) := \inf\limits_{\substack{c:[0,t]\to\mathbb{R}^n \\ c(t)=q}} u_0(c(0)) + \int_0^t L(c(s),\dot c(s))\,ds$ est solution de viscosité du problème de Cauchy (HJ),

et l'inf est atteint par une trajectoire solution d'Euler-Lagrange. (Thm de Tonelli)

Rq: $T_0^t u_0(q) = \inf\limits_{c} \sup\limits_{p}\ u_0(c(0)) + \int_0^t \Big(p(s)\cdot \dot c(s) - H(c(s),p(s))\Big)ds$

$\rightsquigarrow$ c'est un point critique de l'action hamiltonienne, avec coût initial u_0.

Cas intégrable : formules de Lax-Hopf

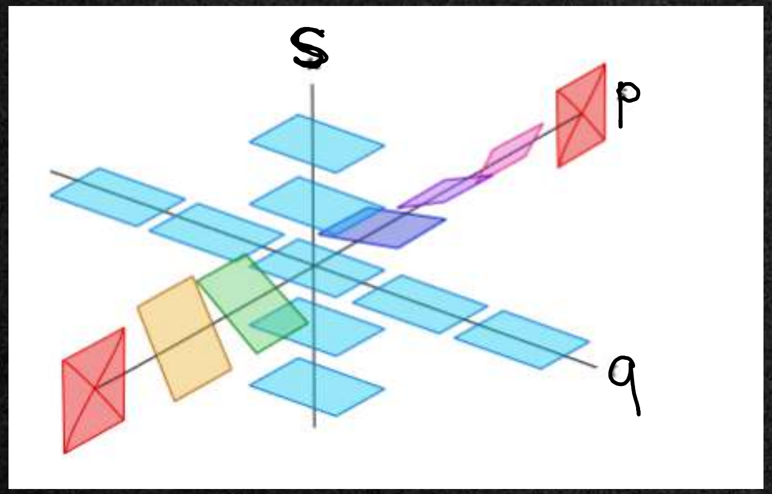
si H ne dépend que de p, alors

- si H est convexe, $T_0^t u_0(q) = \inf\limits_x \sup\limits_p\ u_0(x) + p\cdot(q-x) - tH(p)$.
- si u_0 est concave, $T_0^t u_0(q) = \inf\limits_p \sup\limits_x\ u_0(x) + p\cdot(q-x) - tH(p)$.

III) Sans la convexité : caractéristiques et solution variationnelle

Contexte : • $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2, à dérivée seconde unif. bornée | $\to$ pas de lagrangien associé !

• $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est vue comme une variété de contact, munie d'un champ d'hyperplans $\xi := \ker(dS - p\,dq)$.



$$
\begin{array}{ccc}
 & (q, p, S) & \\
\swarrow \pi_{Lag} & & \searrow \pi_{Fr} \\
(q,p) & & (q,S)
\end{array}
$$

• Dynamique sur M associée à H : $\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(q,p) \\ \dot{S} = -H(q,p) + p \cdot \dfrac{\partial H}{\partial p}(q,p) \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ difféo $\phi_H^t : M \circlearrowleft$

"Méthode des caractéristiques"

Si $u : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t,q)\mapsto u_t(q)$ vérifie $\partial_t u + H(q,\nabla u)=0$ sur $[0,T]\times\mathbb{R}^n$,

et si $L_t := \{(q, \nabla u_t(q), u_t(q)),\ q\in\mathbb{R}^n\}$, alors

$\forall t\in[0,T]$, $$\boxed{L_t = \phi_H^t(L_0)}$$ ⇝ unicité de la solution ✓

⚠ en général $\phi_H^t(L_0)$ ne reste pas un graphe (choc des caractéristiques)

Csq: pas de solution lisse en temps long, même avec H et u_0 lisses.

Théorie des solutions de viscosité : OK

Crandall, Lions, Ishii, début 80 ⇝ opérateur $V^t : u_0 \mapsto u(t,\cdot)$

Résolution géométrique de l'équation

- À u_0 on associe $L_0 := \{(q, \nabla u_0(q), u_0(q)),\ q \in \mathbb{R}^n\}$
- À H, on associe ϕ_H^t comme avant, puis on définit $L_t := \phi_H^t L_0$.
- Dans le cas Tonelli, $\forall t \geqslant 0$, $\mathrm{gr}\ T^t u_0 \subset \Pi_{Fr}(L_t)$.

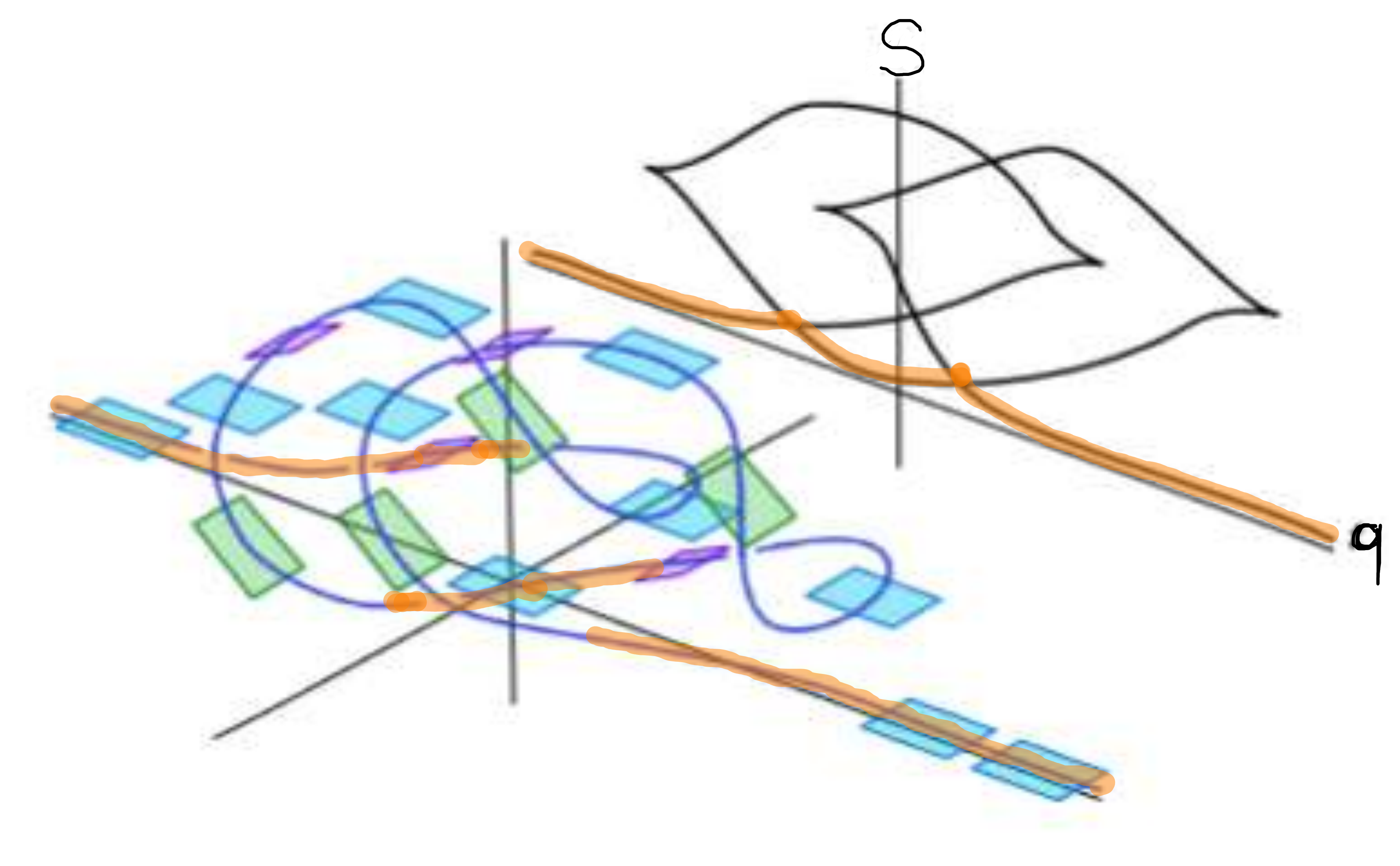


FIGURE 4 – Un nœud de trèfle legendrien

Maÿlis Limouzineau ©

On appelle solution variationnelle une fonction continue $(t,q) \mapsto u_t(q)$ qui vérifie $\mathrm{gr}(u_t) \subset \Pi_{Fr}(L_t)$.

Construction de la solution variationnelle

Un soupçon de géométrie de contact

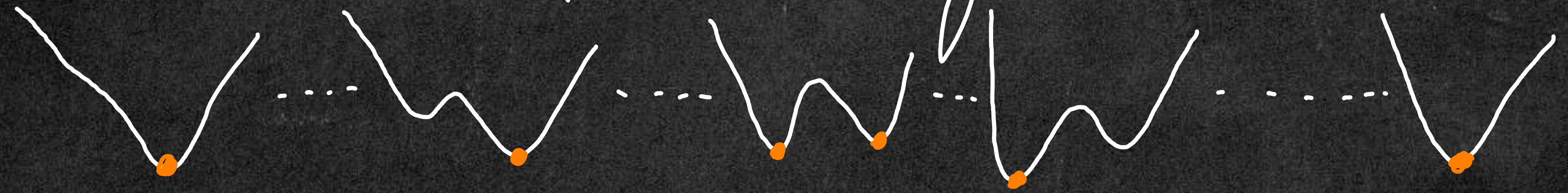
- L_0 est une sous-variété legendrienne, c'est-à-dire partout tangente au champ d'hyperplans $\xi = \ker(dS - p\,dq)$.
- ϕ_H^t est un contactomorphisme (= préserve la structure de contact), et par conséquent $L_t = \phi_H^t L_0$ est encore une legendrienne.
- Les legendriennes Ham. isotopes à la section nulle peuvent être décrites par des fonctions génératrices quad. à l'∞ :

$\exists\, S_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, (et $\xi \mapsto S_t(Q,\xi)$ est quad. non dég. à l'infini)

$$\boxed{L_t = \left\{ \left(q, \frac{\partial S_t}{\partial q}(q,\xi), S_t(q,\xi)\right) \,\middle|\, \frac{\partial S_t}{\partial \xi}(q,\xi) = 0 \right\}}$$

Un zeste de théorie de Morse

↳ construction d'un sélecteur de valeurs critiques "essentielles", le minmax, pour les fonctions lisses quadratiques à l'infini:



Sikorav
Chaperon
Viterbo
début 90

Définition de la solution variationnelle

$$u(t,q) := \min\max_{\xi} S_t(q,\xi).$$

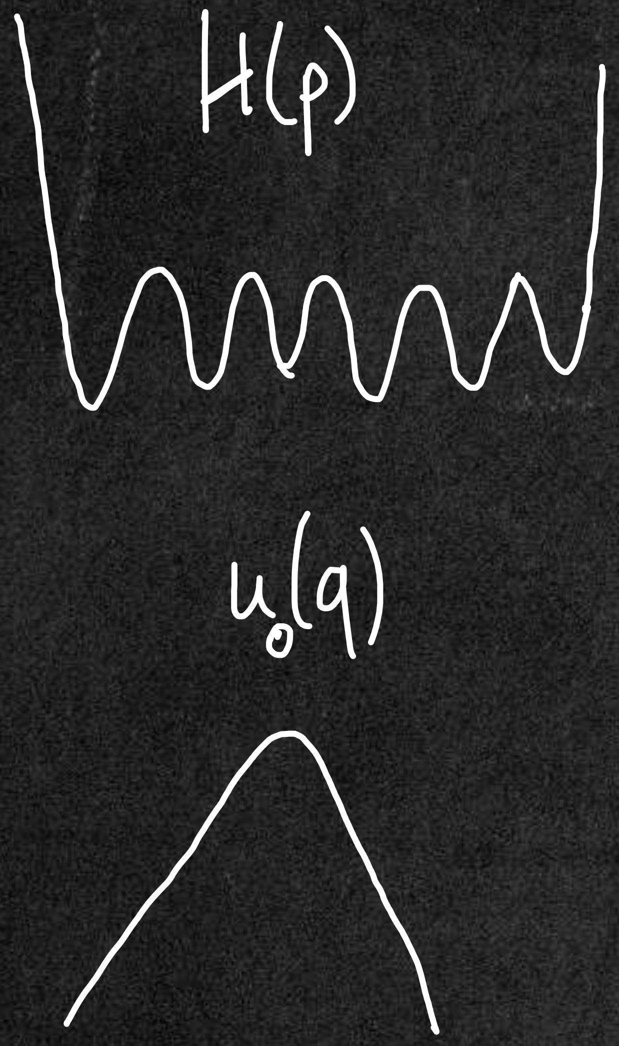
⇝ opérateur $R^t : u_0 \mapsto u(t,\cdot)$

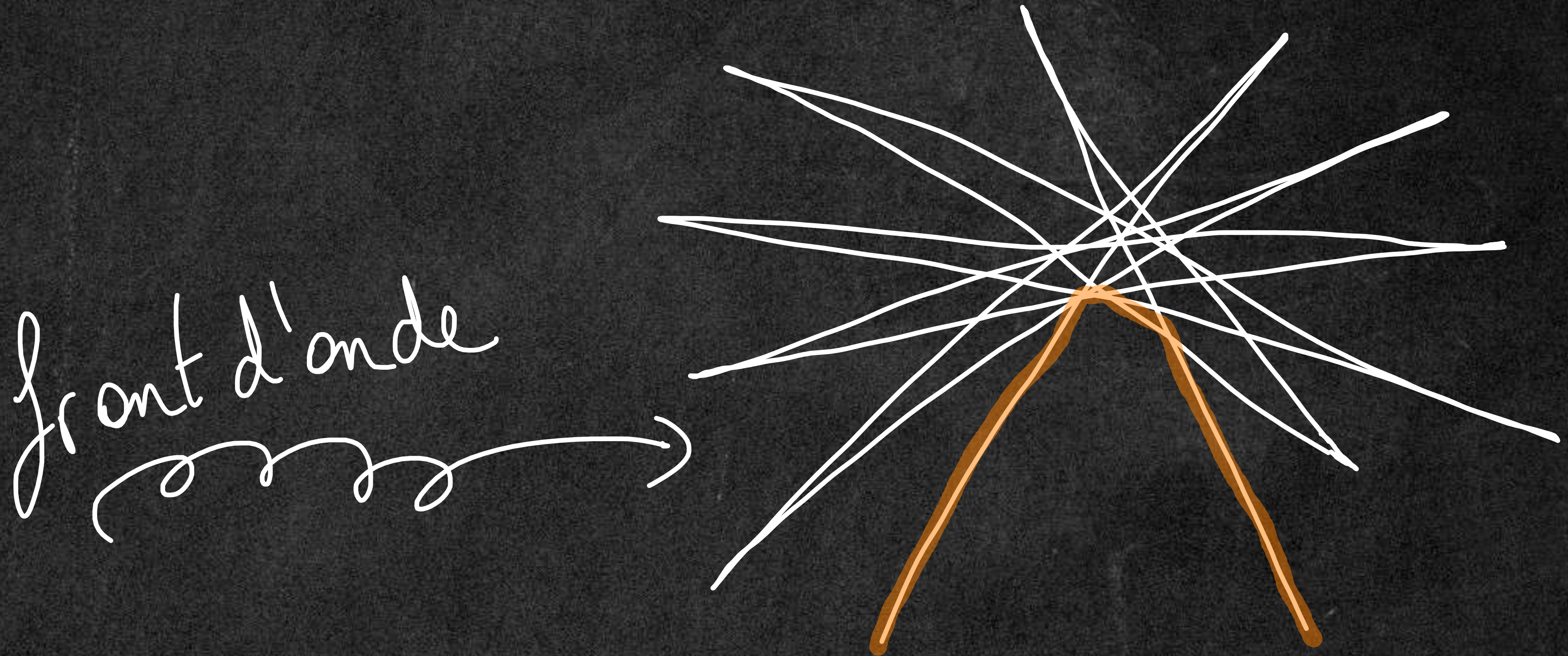
↳ famille génératrice de $L_t = \phi_H^t L_0$.

Théorème d'itération (Wei, Roos)

L'opérateur variationnel itéré sur des petits pas de temps converge vers l'opérateur de viscosité.

Un dernier pour la route...





Merci !