






Bossa-nova, tango, bambé...
à la découverte des
rythmes euclidiens

I) Les colliers rythmiques

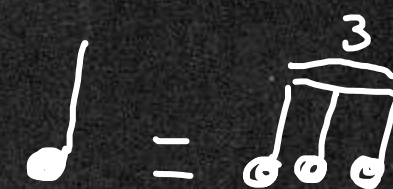
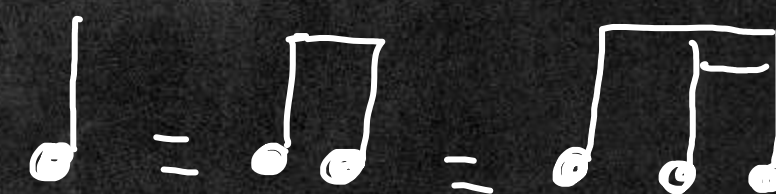
II) Des répartitions bien équilibrées

III) À nous de jouer !

Les mots des rythmes

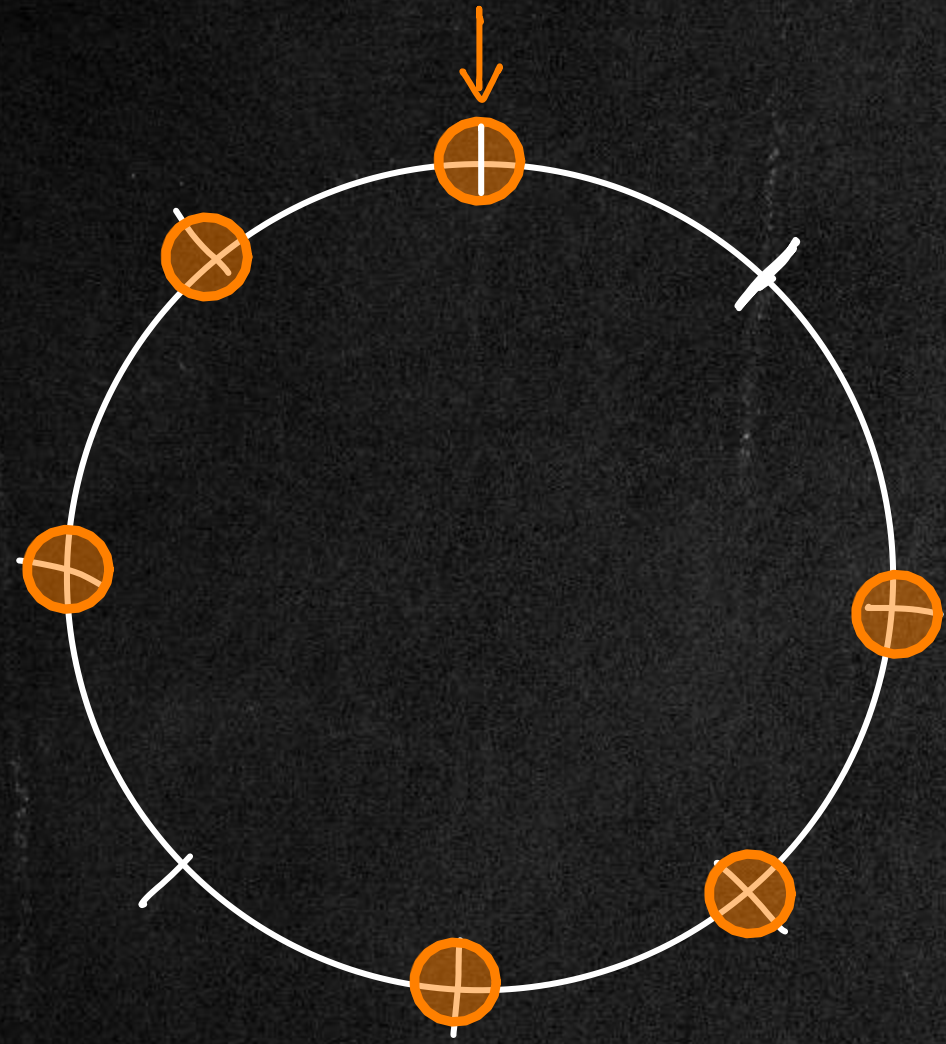
Figure	Nom	Durée
	ronde	4
	blanche	2
	noire	1
	croche	1/2
	croche de triolet	1/3
	double croche	1/4
	triple croche	1/8
⋮	⋮	⋮

Exemples



etc...

I) Les colliers rythmiques

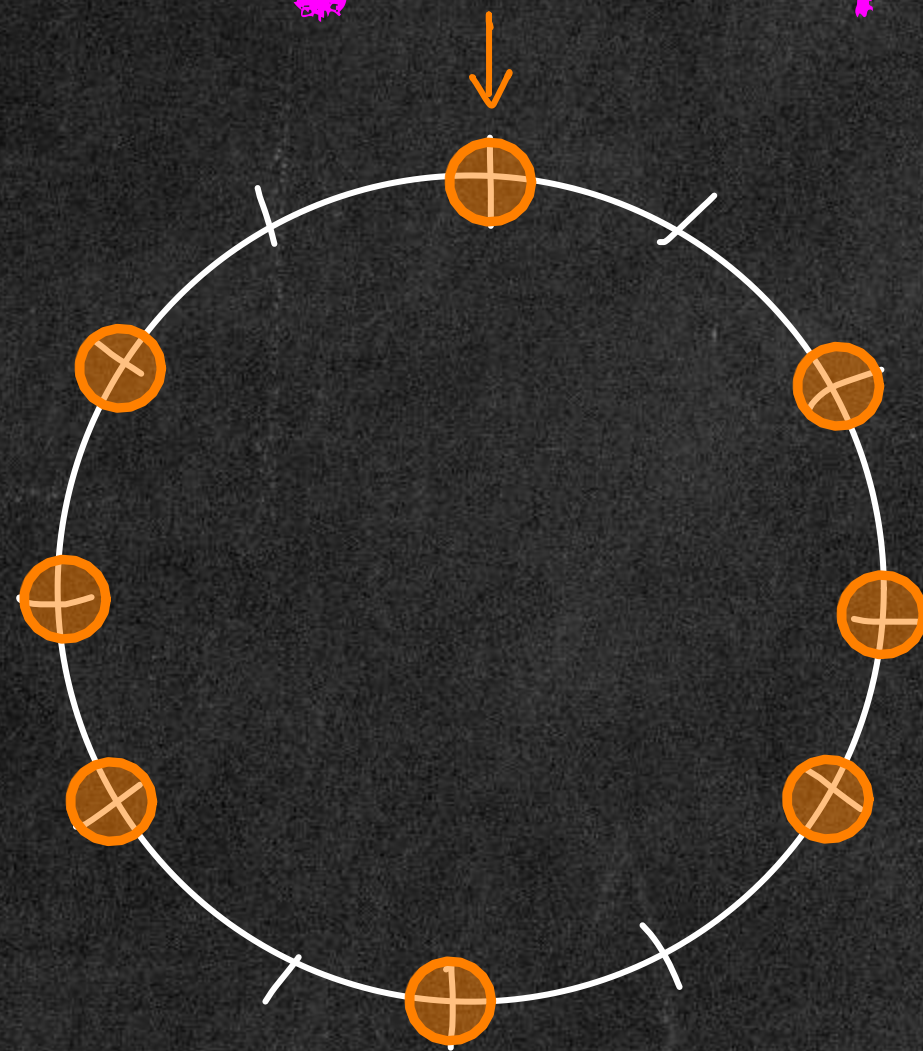


8 pulsations

|||| |

ou

|| || || || "binaire"

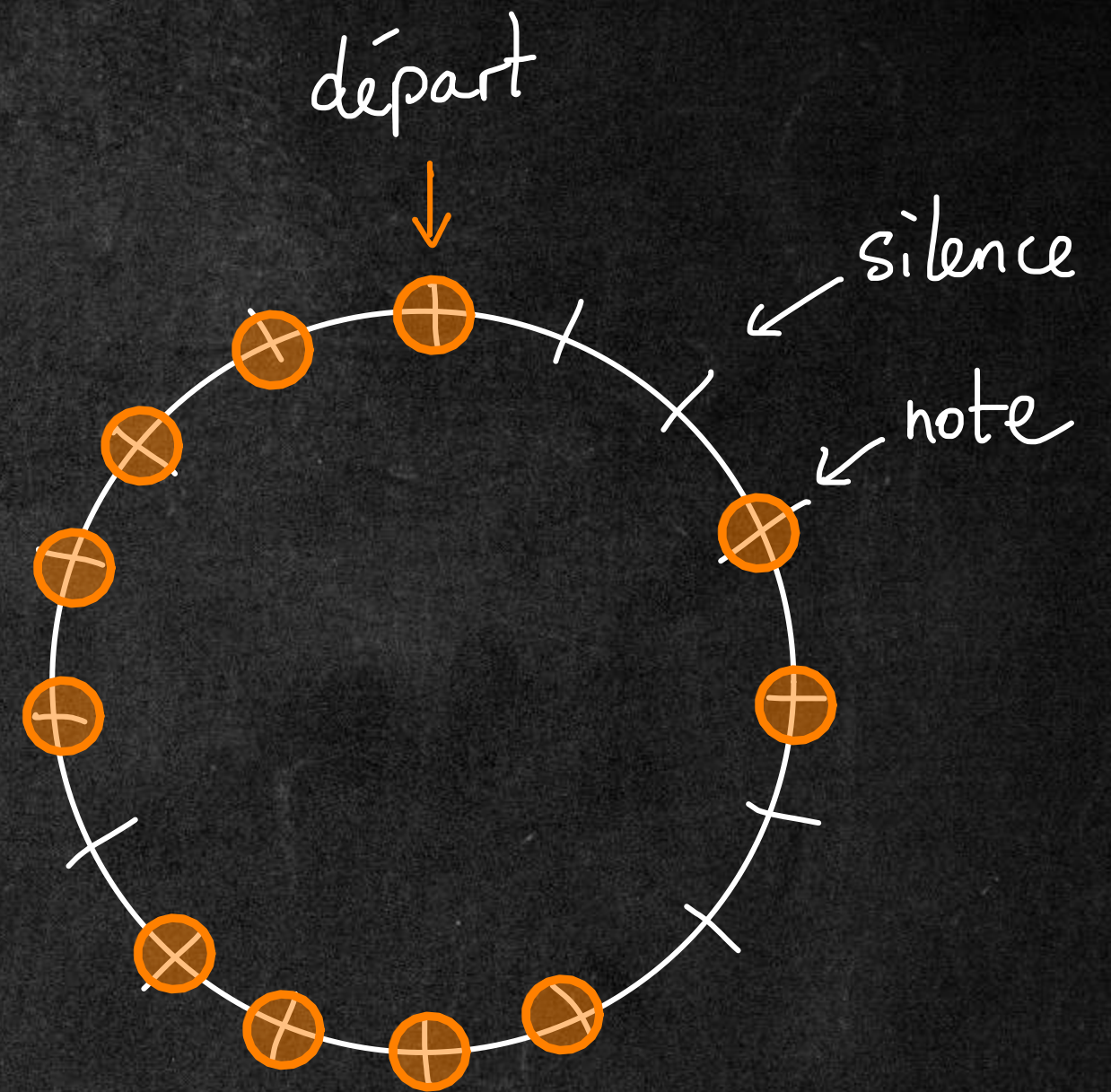


12 pulsations

||| ||| ||| ||| "ternaire"

ou



|||| |||| ||||

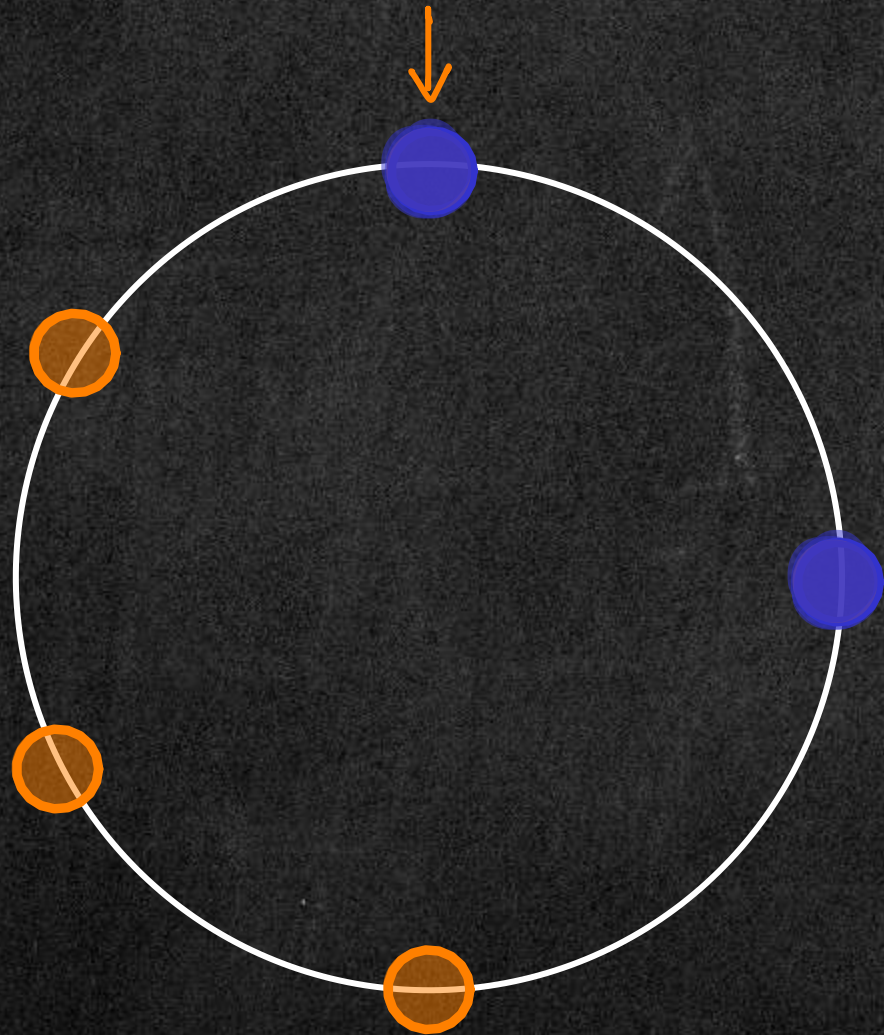



16 pulsations

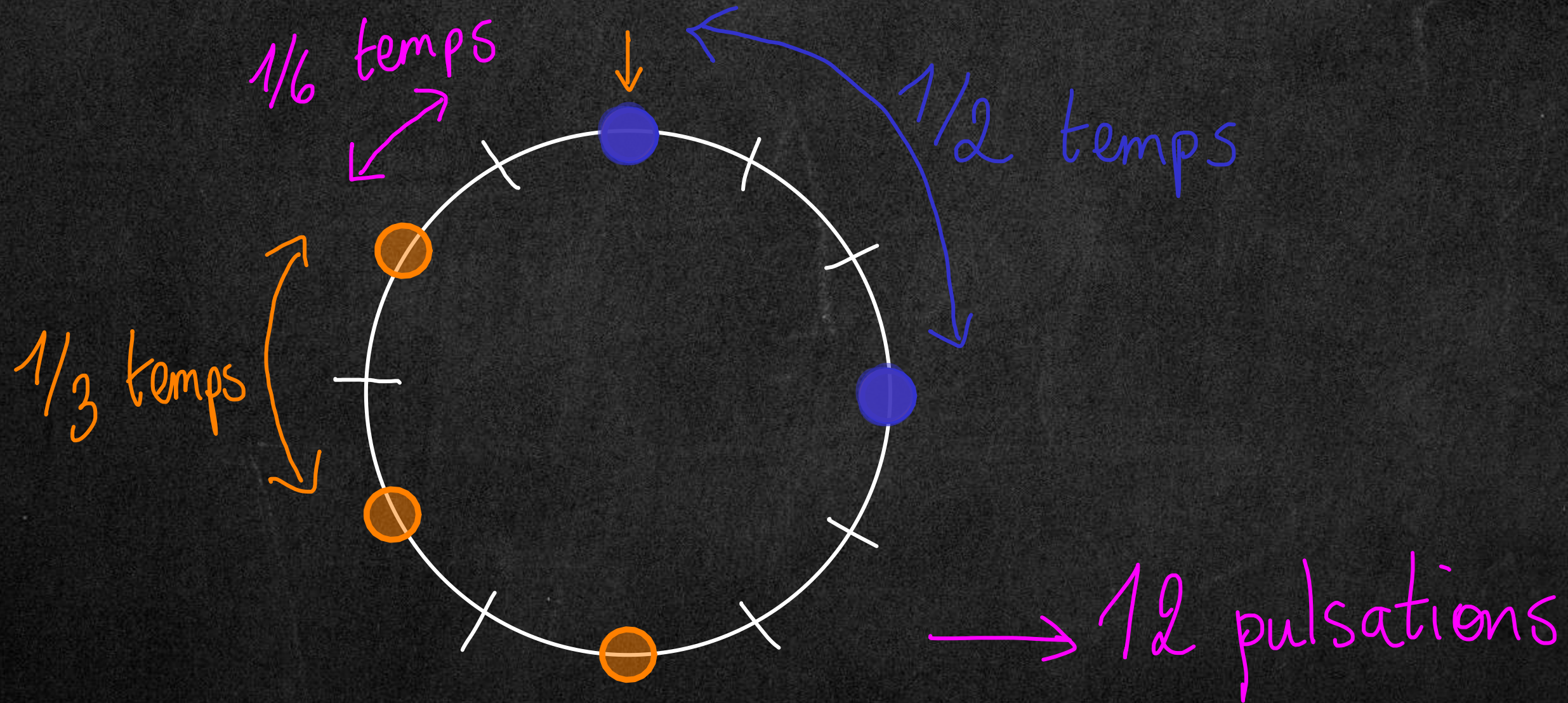
souvent

|||| |||| |||| ||||

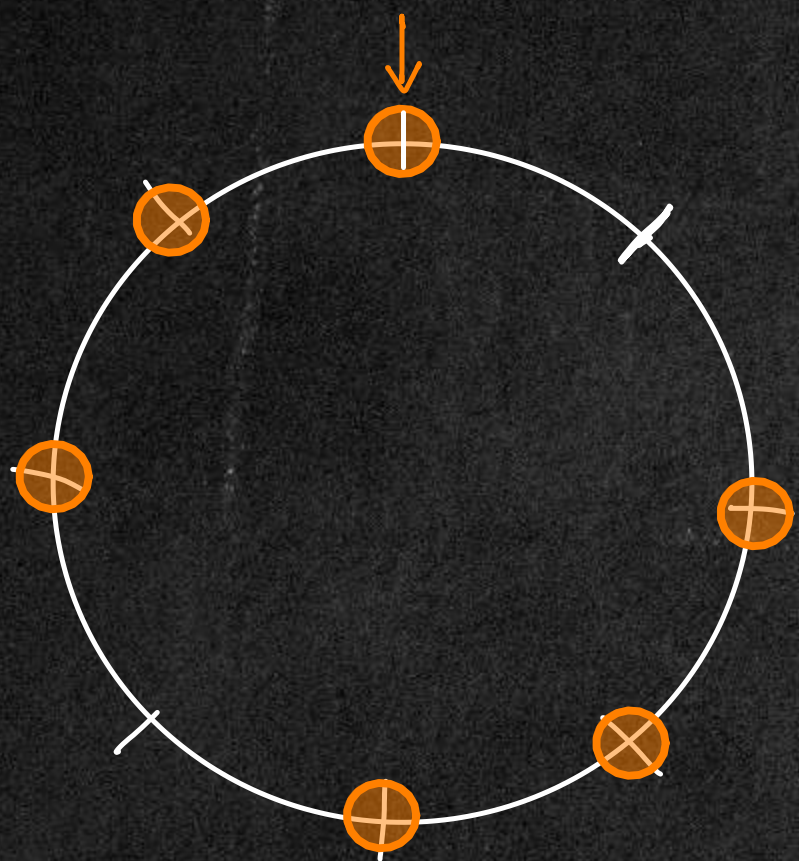
Combien de pulsations faut-il pour dessiner le collier
associé au rythme   ? (deux temps se suivent,
l'un divisé en 2 croches égales, le suivant en 3 croches égales ("triolet"))



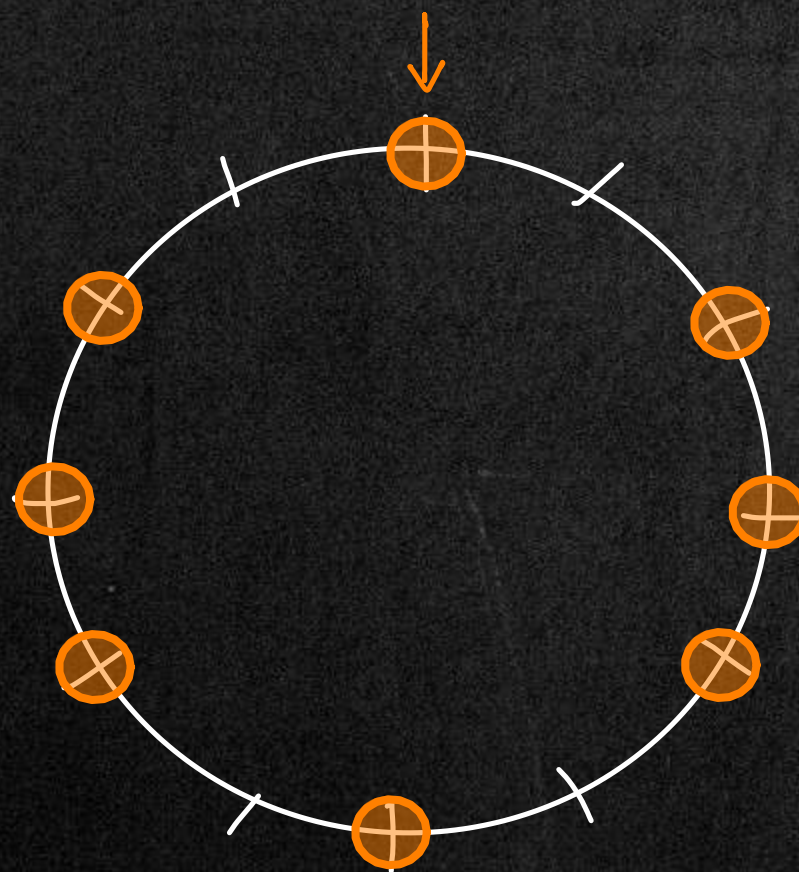
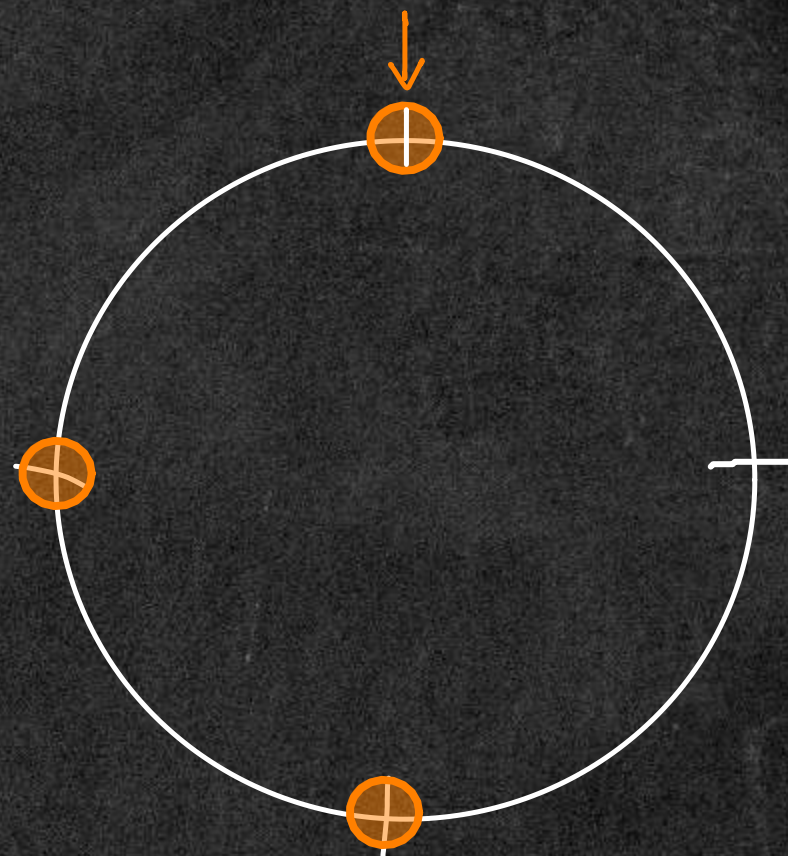
Combien de pulsations faut-il pour dessiner le collier associé au rythme  ? (deux temps se suivent, l'un divisé en 2 croches égales, le suivant en 3 croches égales ("triolet"))



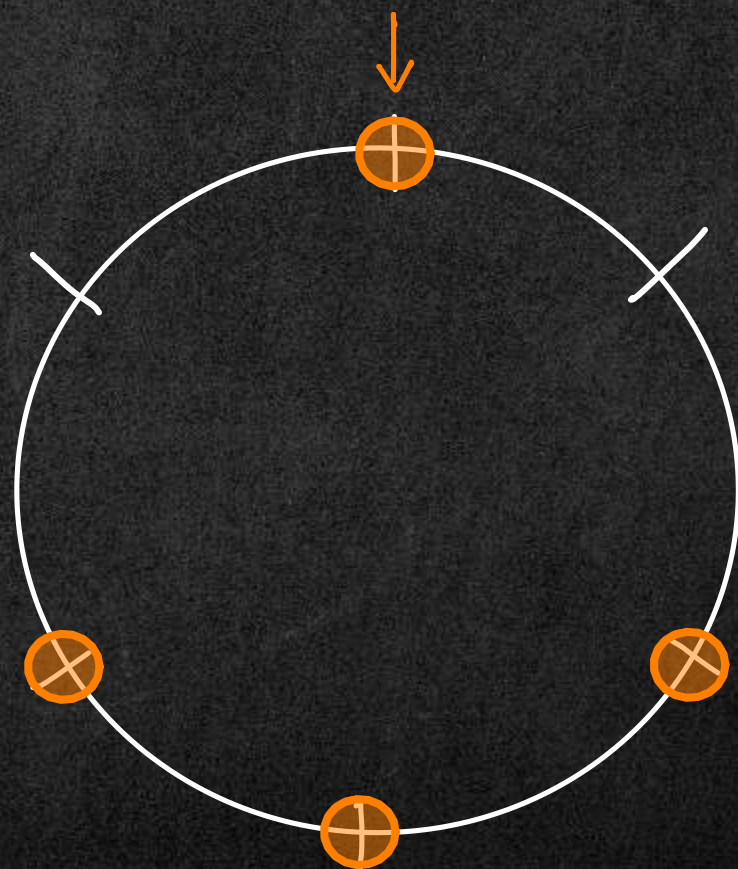
Simplification des colliers rythmiques



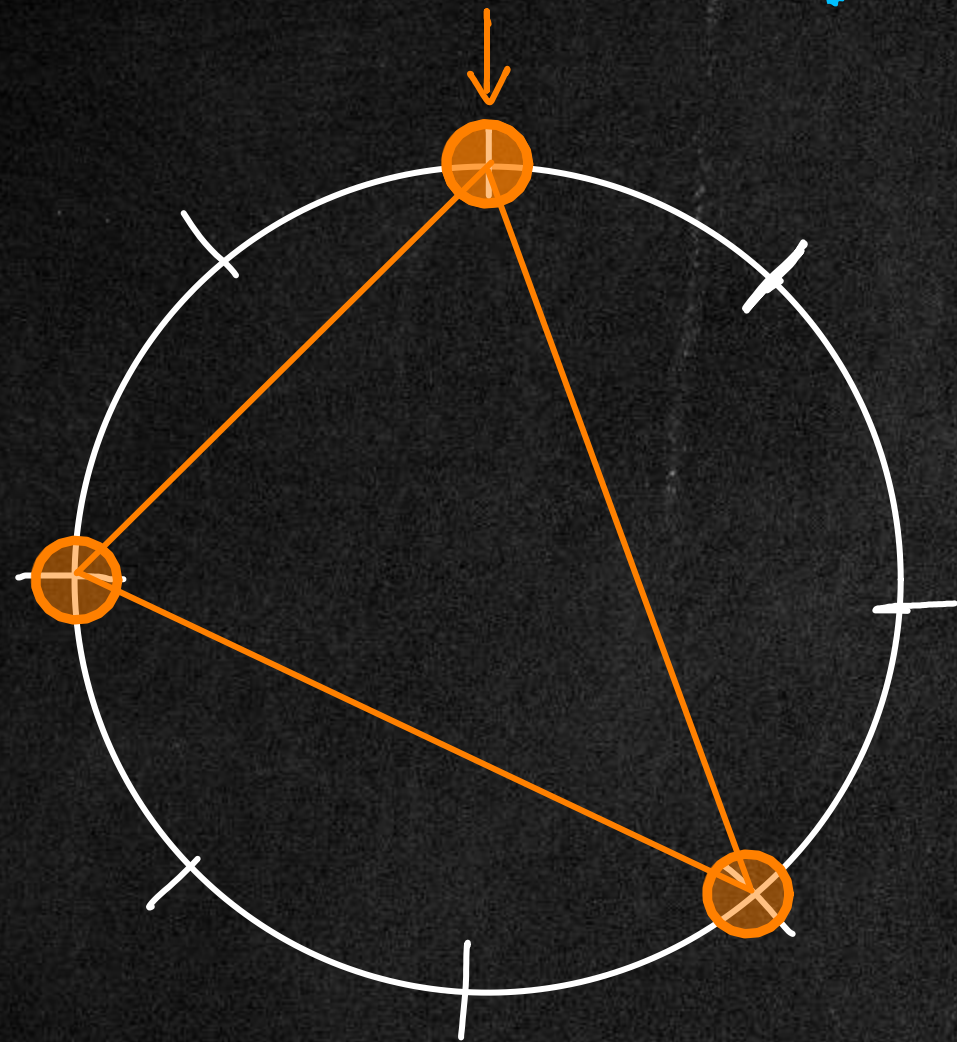
= 2 x



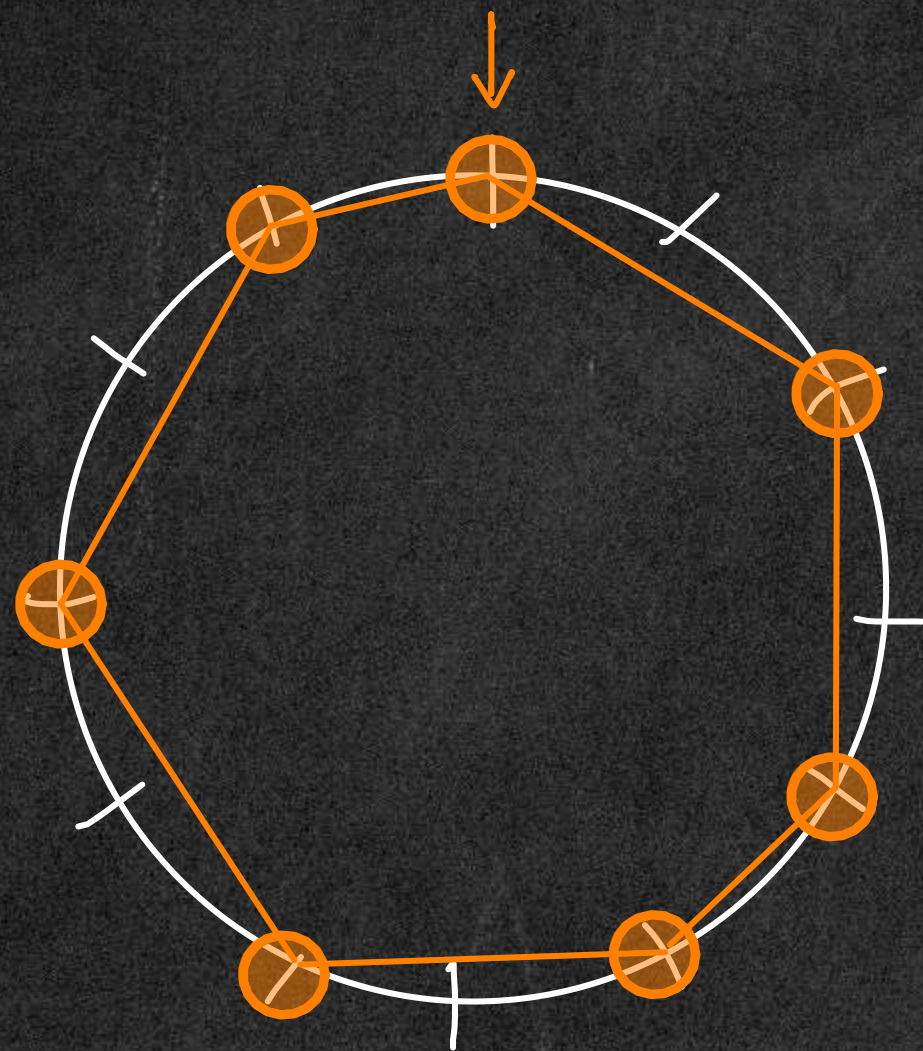
= 2 x



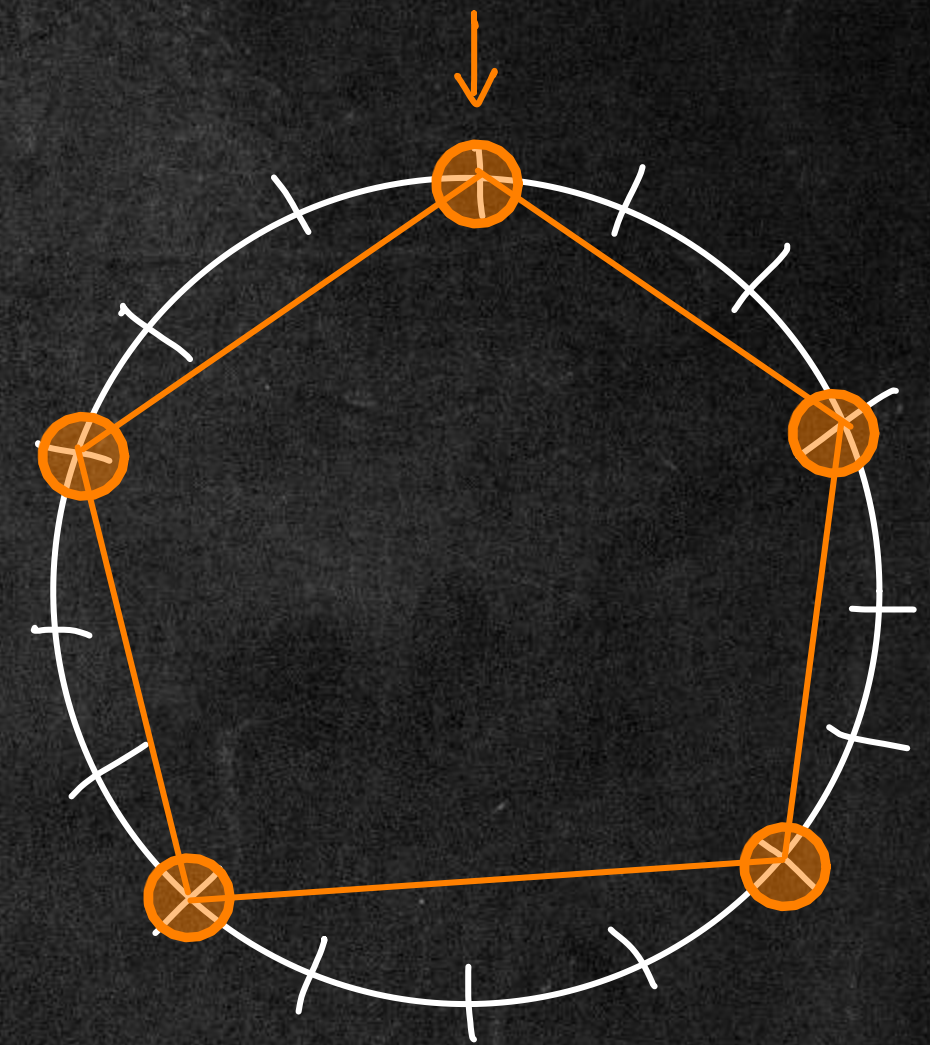
II) Des répartitions bien équilibrées



TANGO / TRESILLO



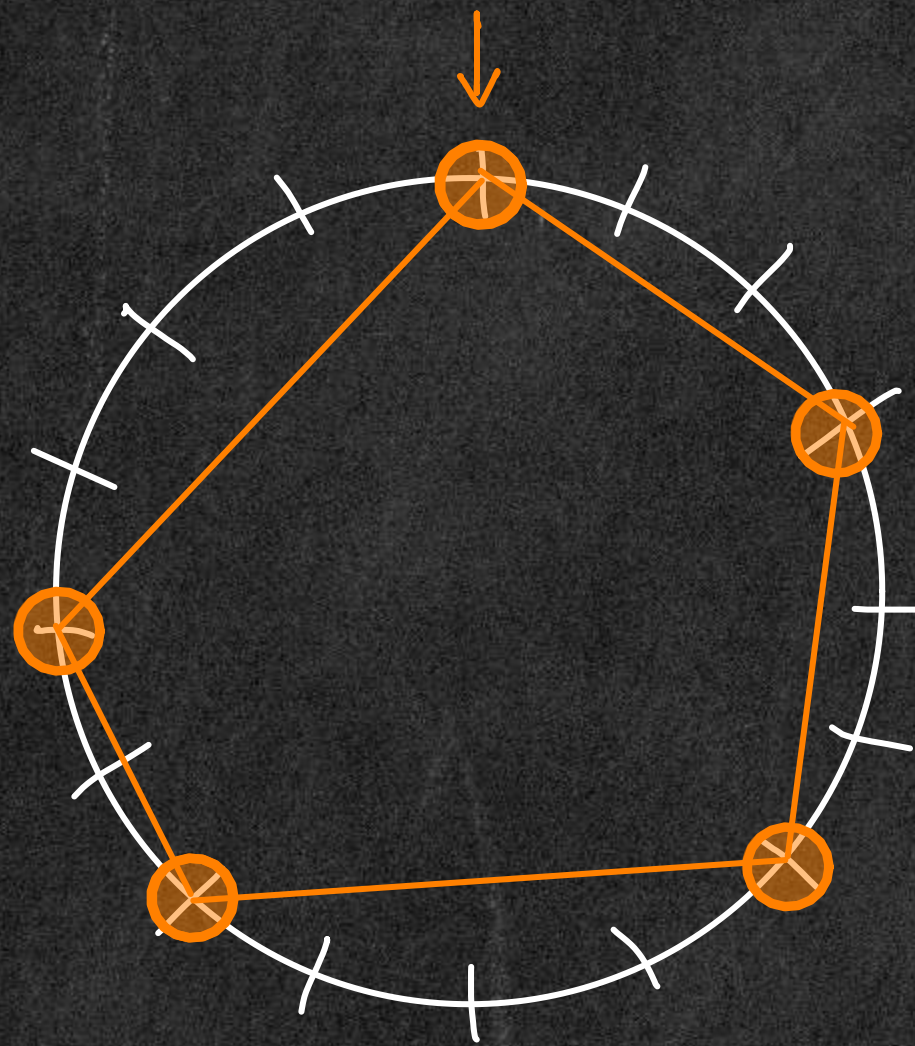
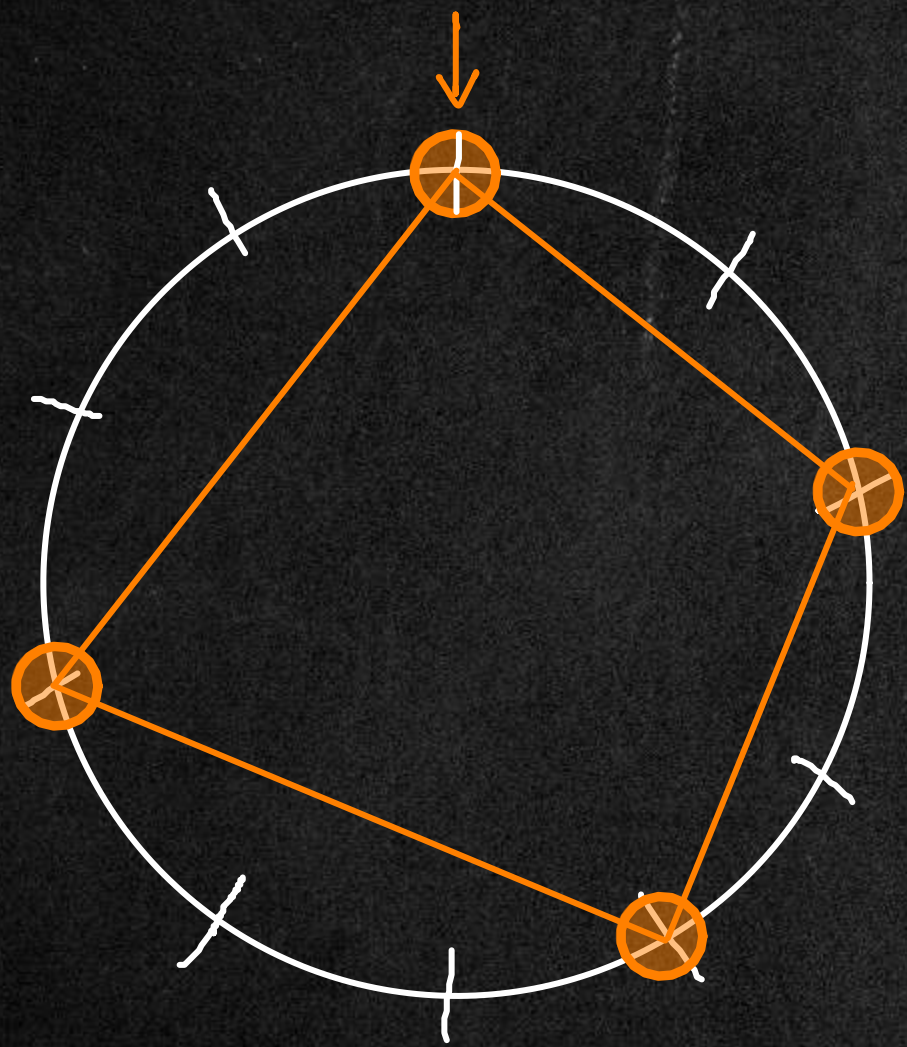
BEMBE



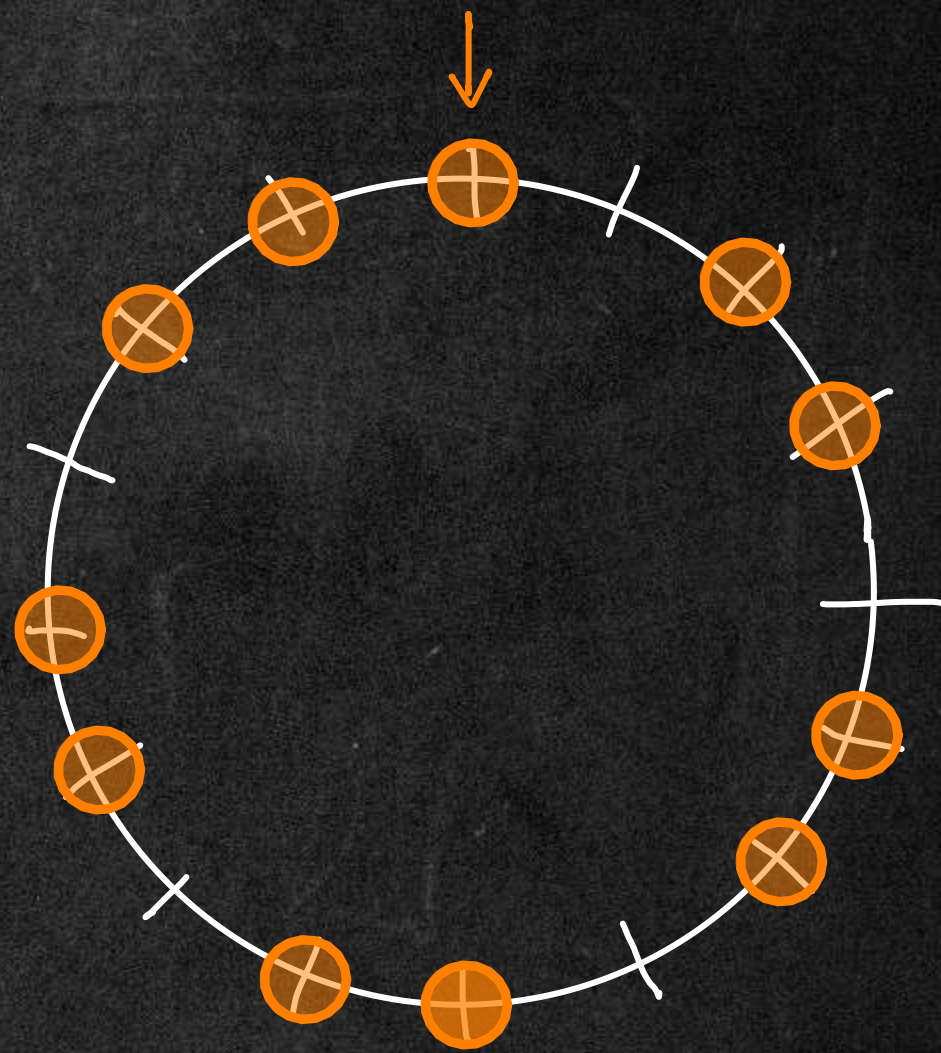
BOSSA-NOVA

Ces rythmes célèbres ont une propriété en commun: les sons sont le plus éloignés les uns des autres que possible.

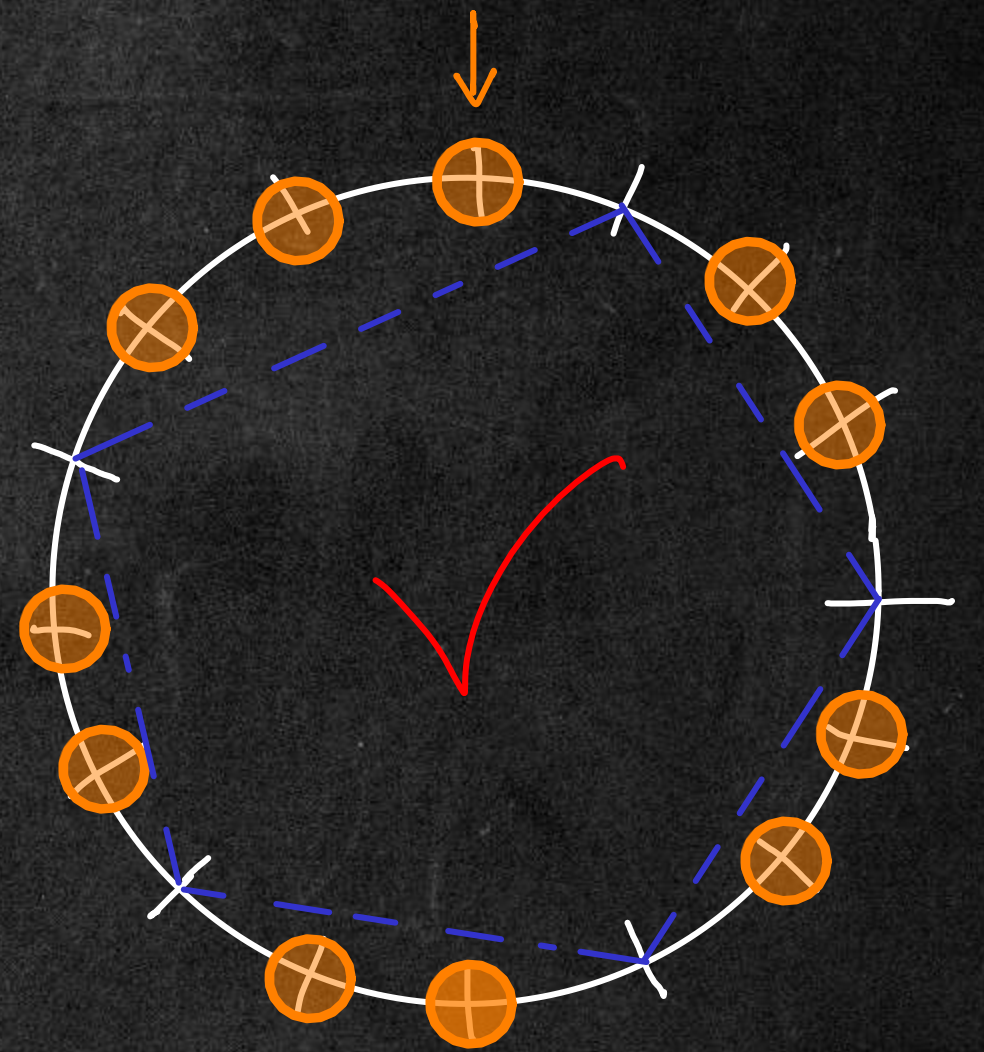
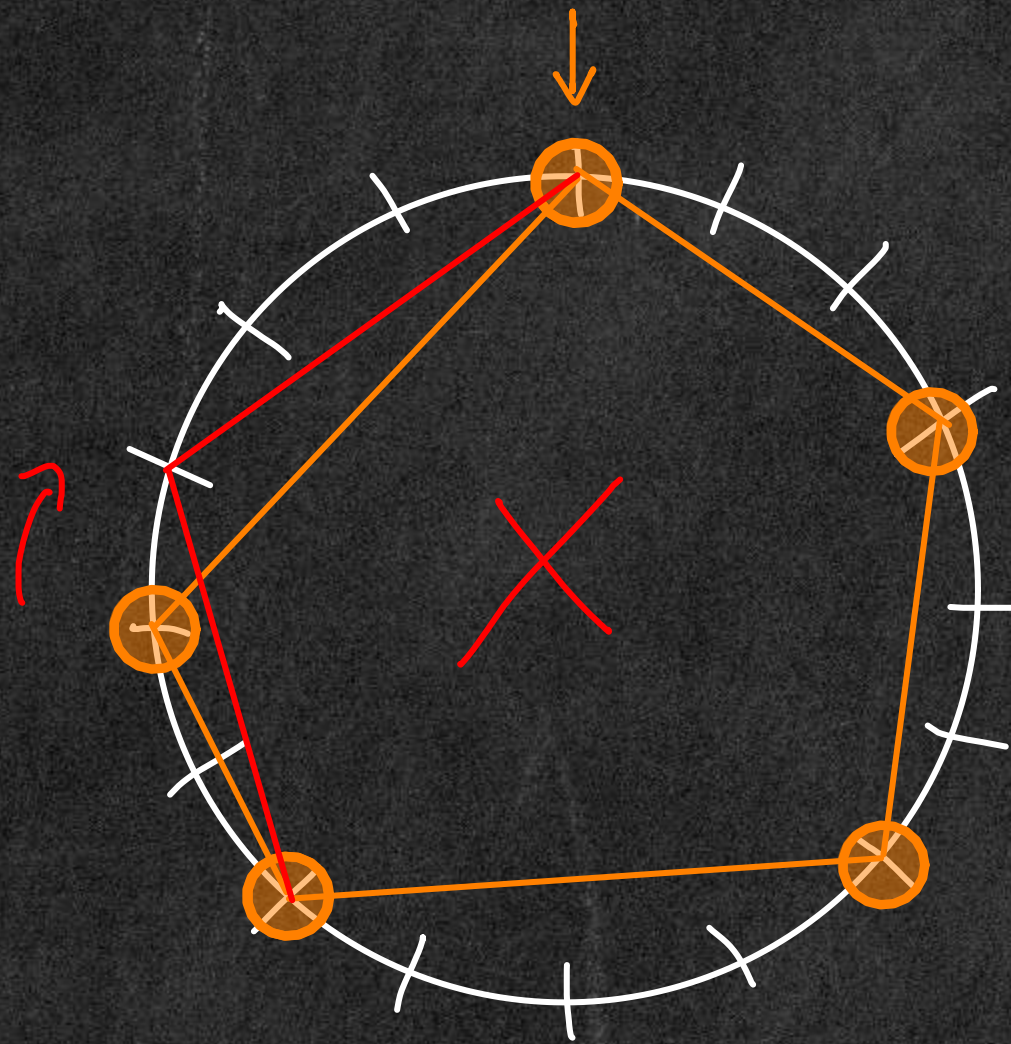
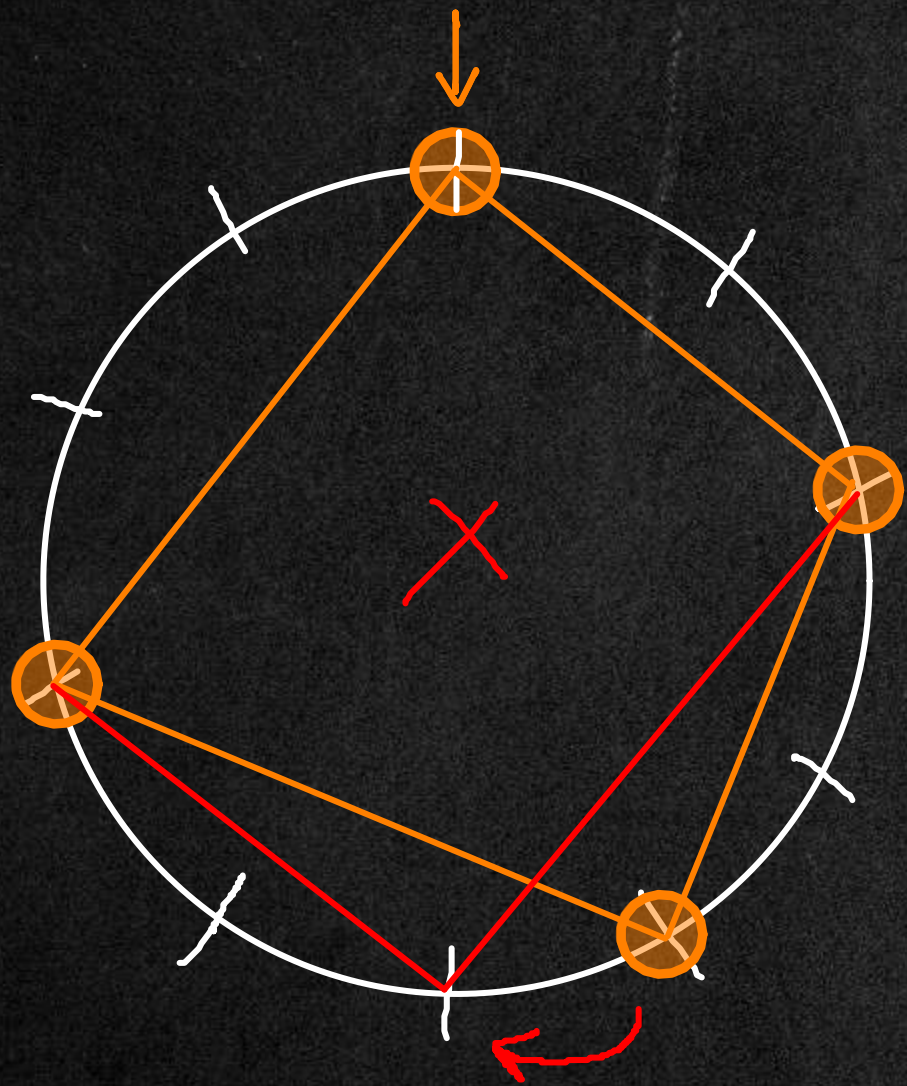
Équilibrés ou pas équilibrés?



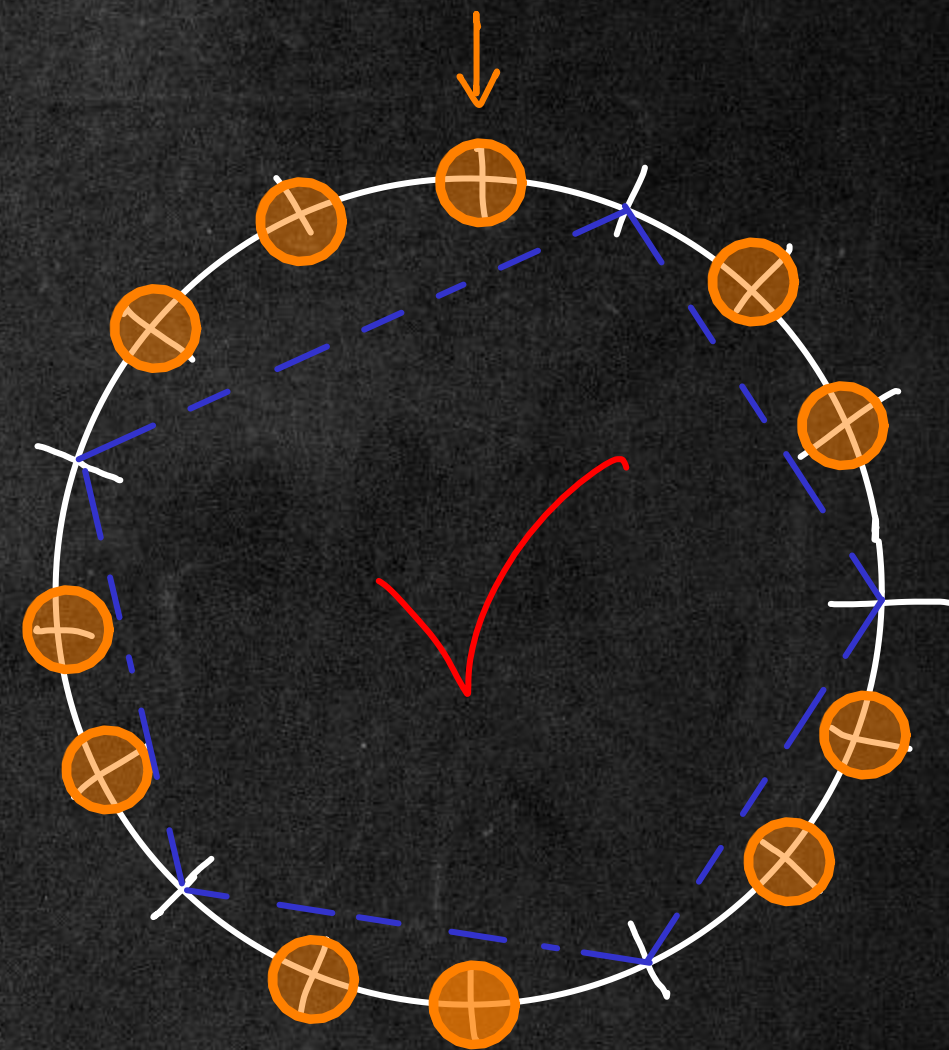
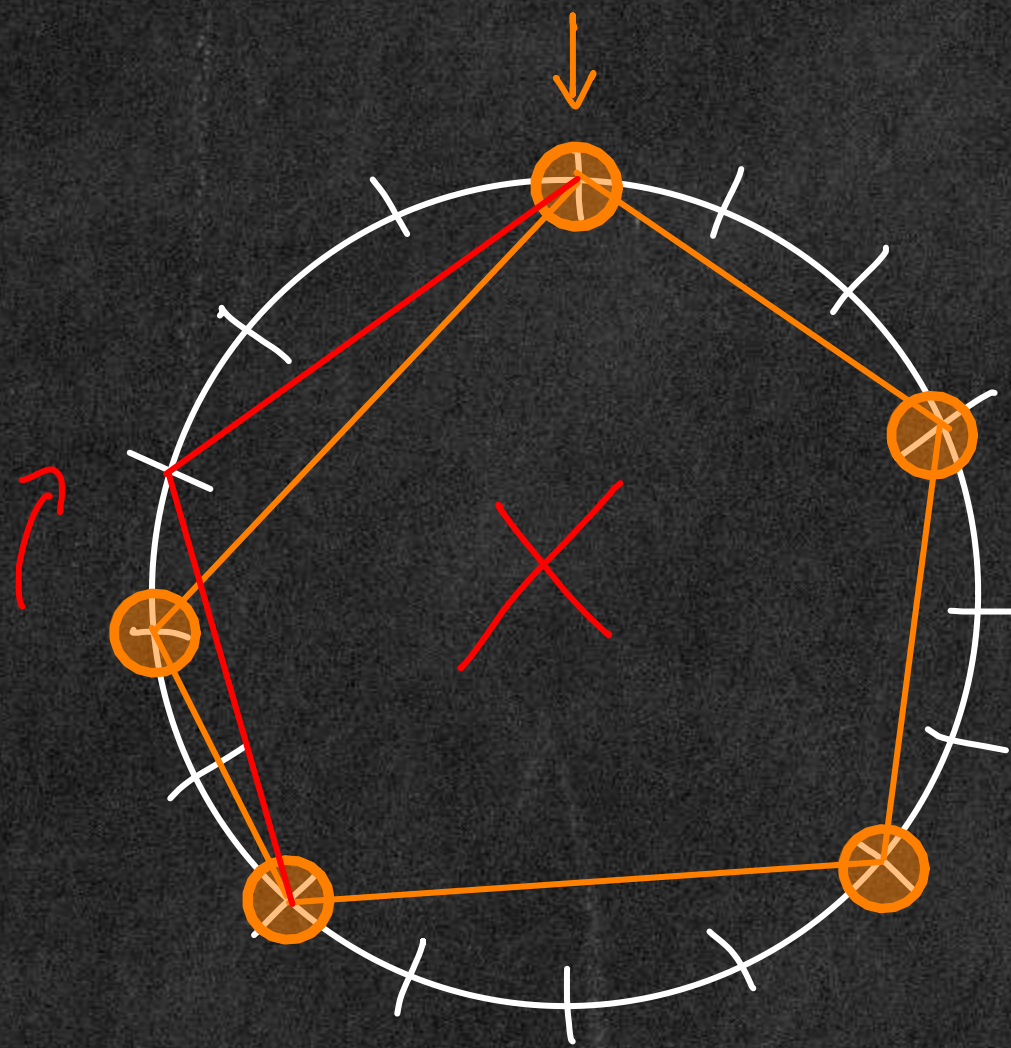
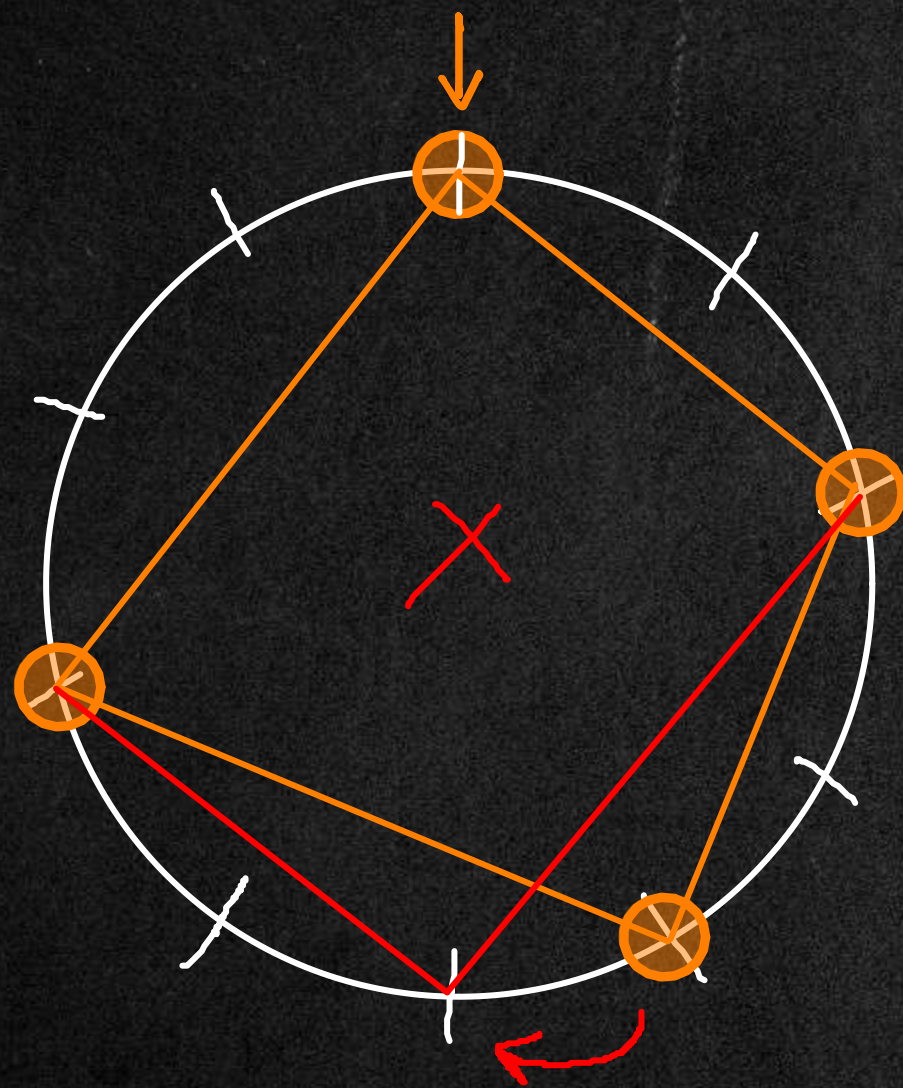
CLAVE



Équilibrés ou pas équilibrés?



Équilibrés ou pas équilibrés ?

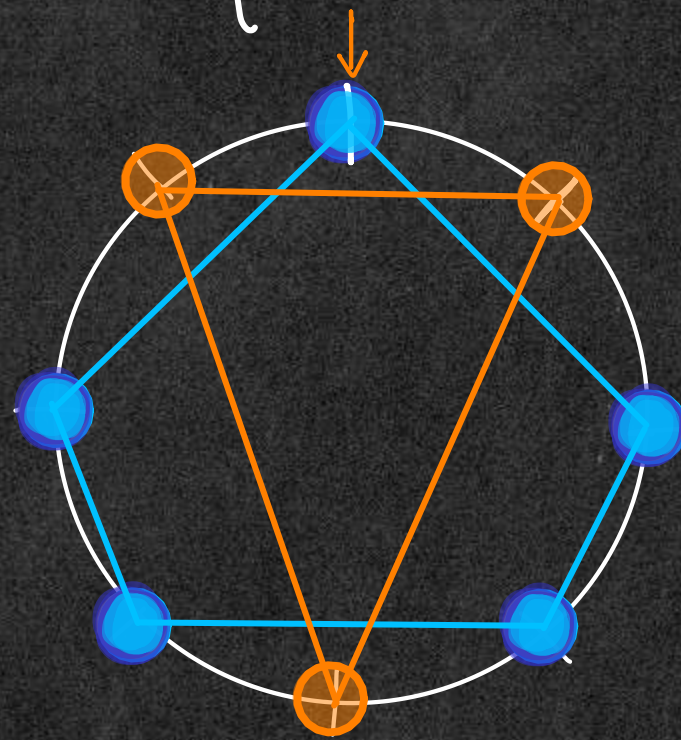


Définition : le **contraire** d'un rythme est le rythme obtenu en transformant les sons en silence et les silences en sons.

Quelques critères pour identifier les rythmes équilibrés

1) un rythme est équilibré si (et seulement si) le rythme contraire est équilibré.

TANGO / TRESILLO
un peu décalé

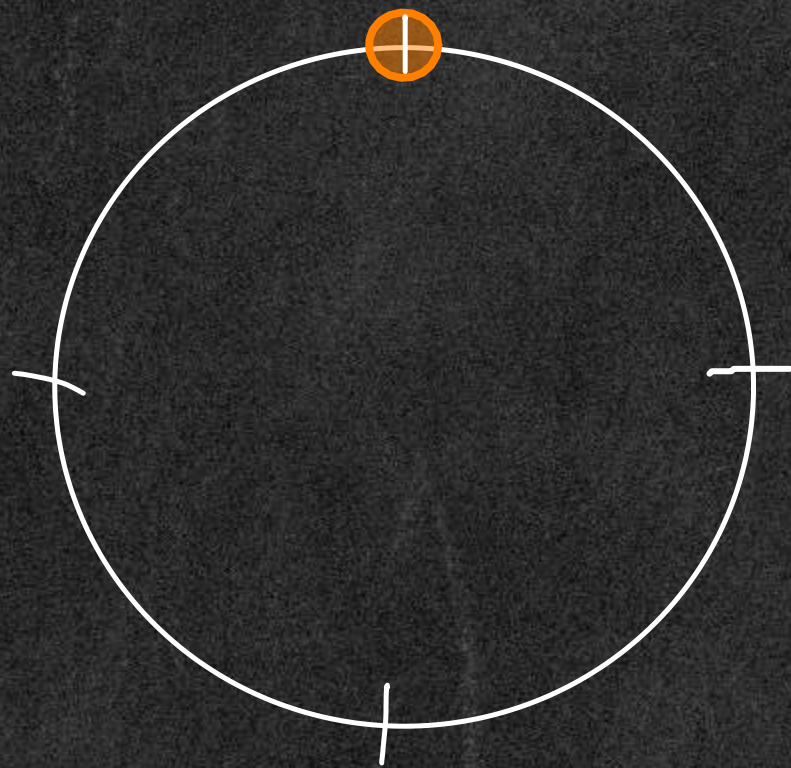


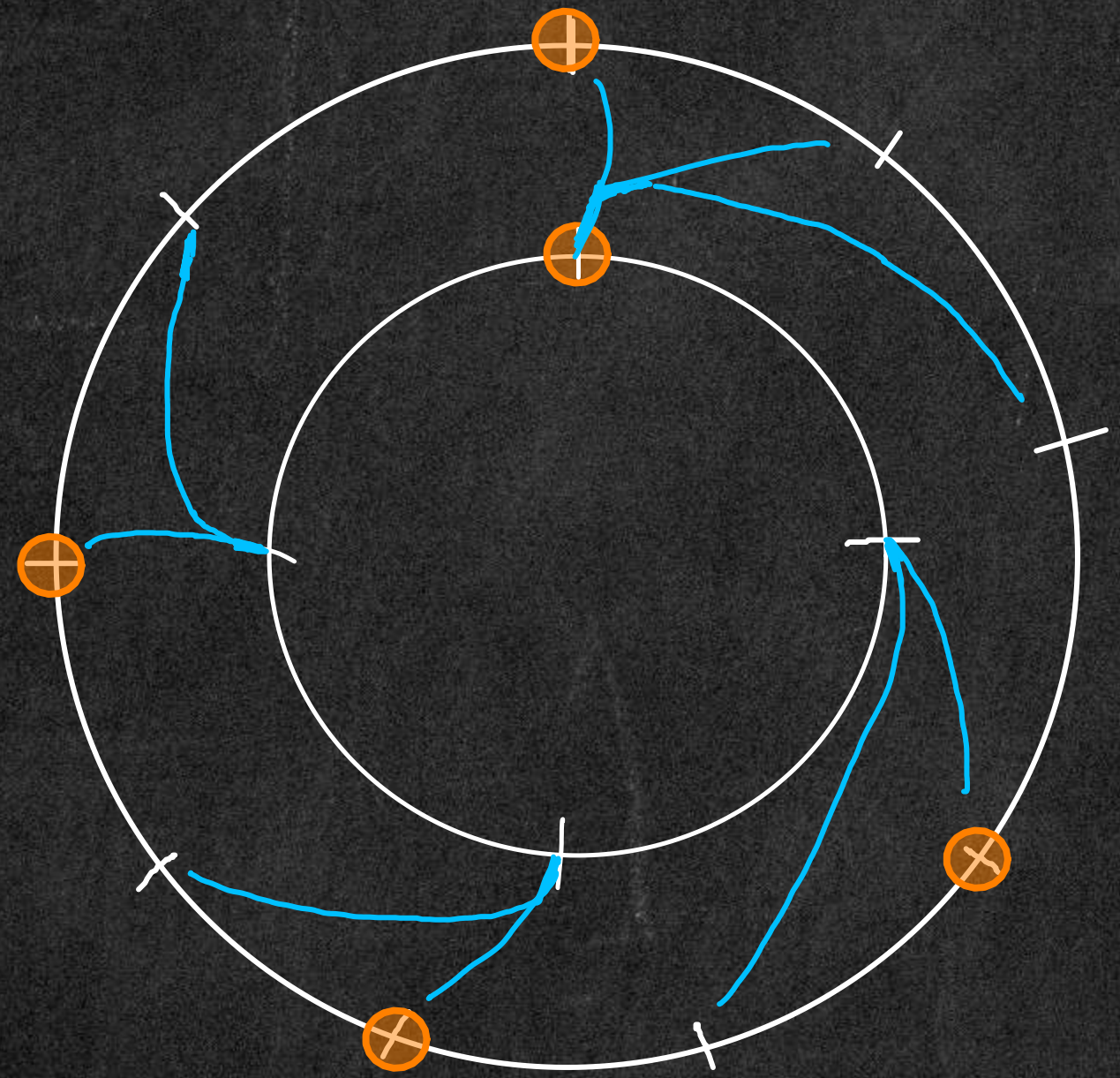
CINQUILLO

2) Dans un rythme équilibré de k sons parmi n pulsations, deux sons sont toujours espacés de d ("court") ou $d+1$ ("long"), où d désigne le chiffre devant la virgule du rapport $\frac{n}{k}$. (et $r = n - dk$ est donc le nombre de "longs")

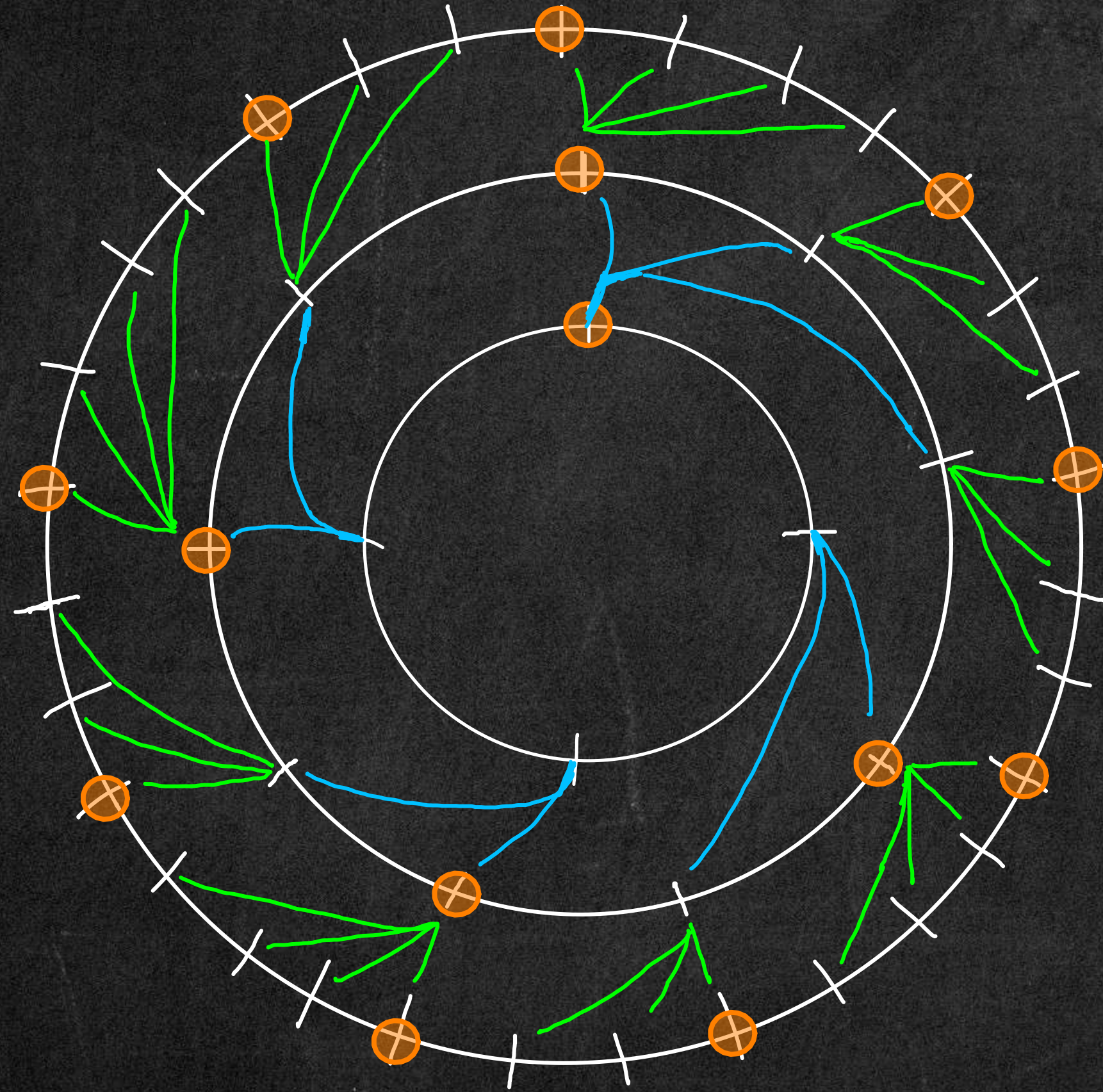
Question : si on se donne un nombre de pulsations et un nombre de sons, ça existe toujours, un rythme comme ça ?
ou plusieurs [^]même ??

Pour commencer :





Rythme bien
équilibré de
4 sons
répartis sur
9 pulsations



Rythme bien
équilibré de
9 sons
répartis sur
31 pulsations

Un certain
 Maxime Kontsevitch
 propose ici une
 construction de
 "répartition équi-
 librée" basée sur

l'ALGORITHME
d'EUCLIDE

Revue Kvant, 1985

Равномерные расположения

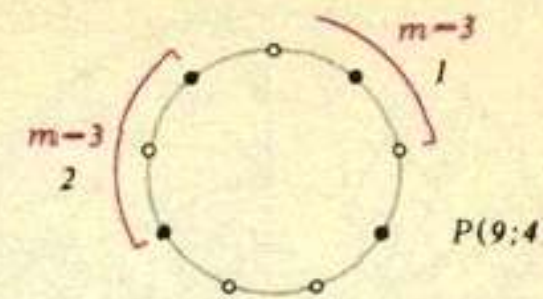
М. Л. КОНЦЕВИЧ

Пусть на окружности расположено n точек, и некоторые k из них выделены — будем называть их черными, а остальные — белыми. Легко указать самое неравномерное расположение k черных точек среди остальных: нужно расставить их все подряд. Оказывается, можно дать вполне естественное определение и для самого равномерного расположения черных точек. Такие равномерные расположения обнаруживаются во многих математических, да и не только математических, ситуациях. О них и рассказывается в этой заметке; здесь приводится решение задачи M818 из «Задачника «Кванта», опубликованной в № 9, 1983 г.

Определение, примеры и основная теорема

Назовем расположение черных точек *равномерным*, если для каждого натурального $m < n$ (где n — общее количество точек — черных и белых) количества черных точек в наборах из m последовательных точек на окружности отличаются друг от друга не более чем на 1. Например, расположение 4 точек среди 9 на рисунке 1 равномерно — в этом легко убедиться перебором, а расположение 7 точек среди 17 на рисунке 2 не равномерно. Равномерное расположение k черных точек среди n точек на окружности будем обозначать $P(n; k)$. Заметим, что замена цветов — черного на белый — превращает $P(n; k)$ в $P(n; n-k)$, поэтому всегда можно свести дело к случаю $k \leq n/2$.

Расположение $P(12; 5)$ нам особенно хорошо знакомо — это расположение пяти коротких (менее 31 дня) месяцев в году, а также пяти черных клавиш среди 12 клавиш одной октавы; легко убедиться, что это — одинаковые расположения: январю соответствует нота «фа», февралю — «фа диез» и т. д., так что,



m	1	2	3	4
Черных точек	0:1	0:1	1:2	1:2

Рис. 1.

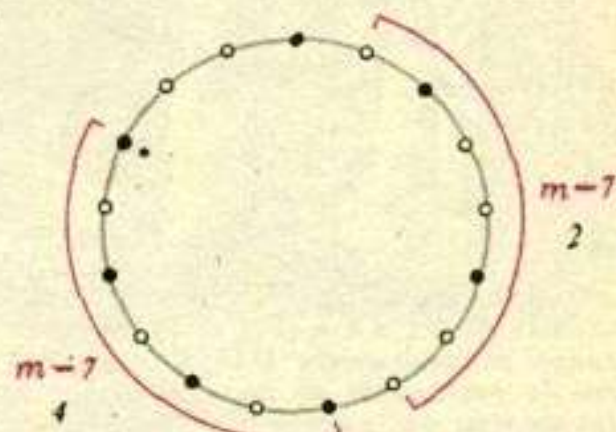


Рис. 2.

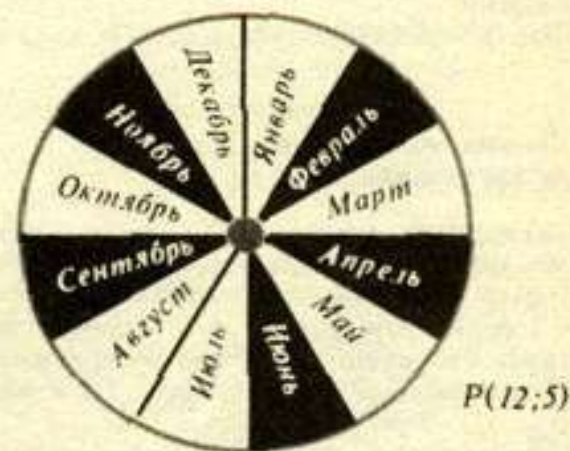


Рис. 3.

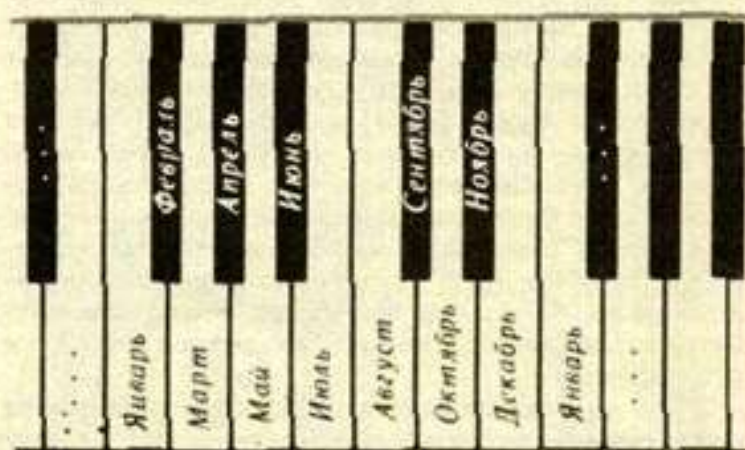


Рис. 4.

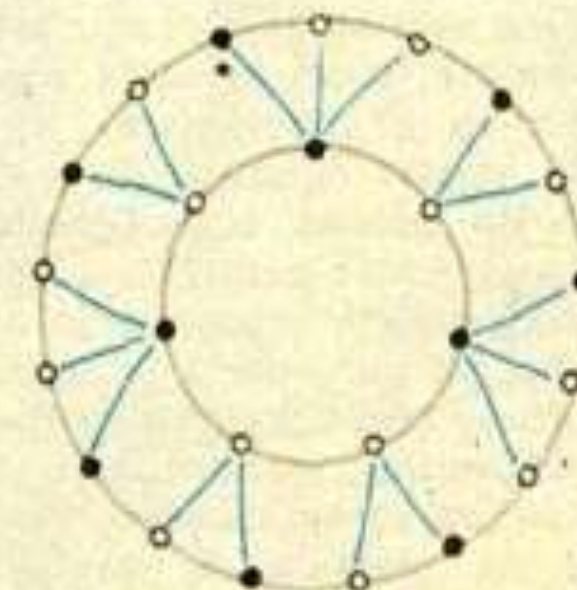


Рис. 5.

$$P(7; 3) \equiv P(17; 7)$$

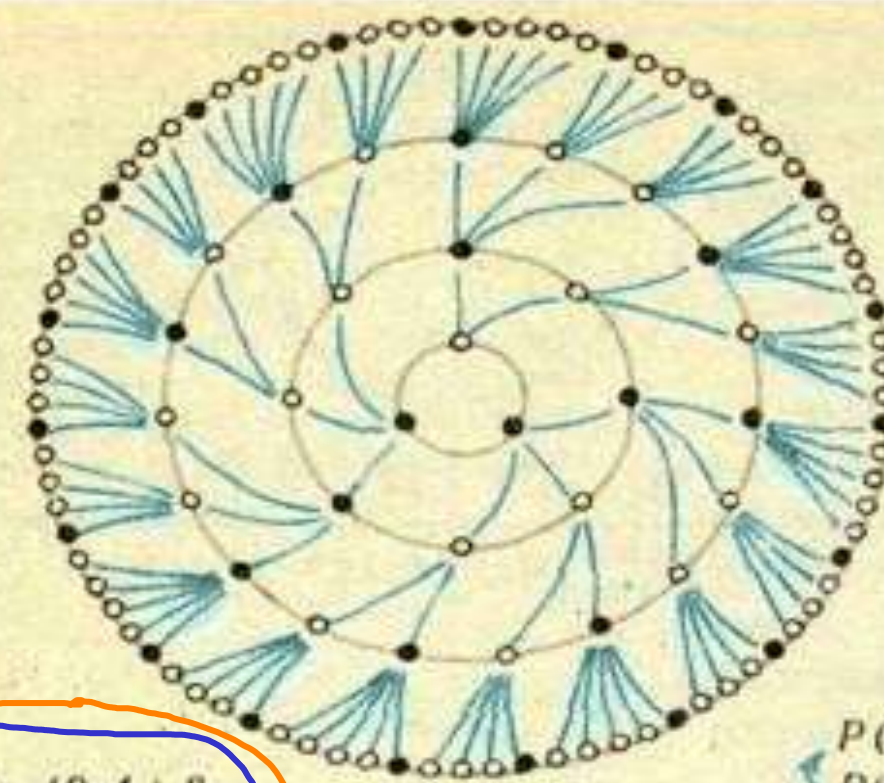


Рис. 6.

$$\begin{aligned} 84 - 19 \cdot 4 + 8 \\ 19 - 8 \cdot 2 + 3 \\ 8 - 3 \cdot 2 + 2 \end{aligned}$$

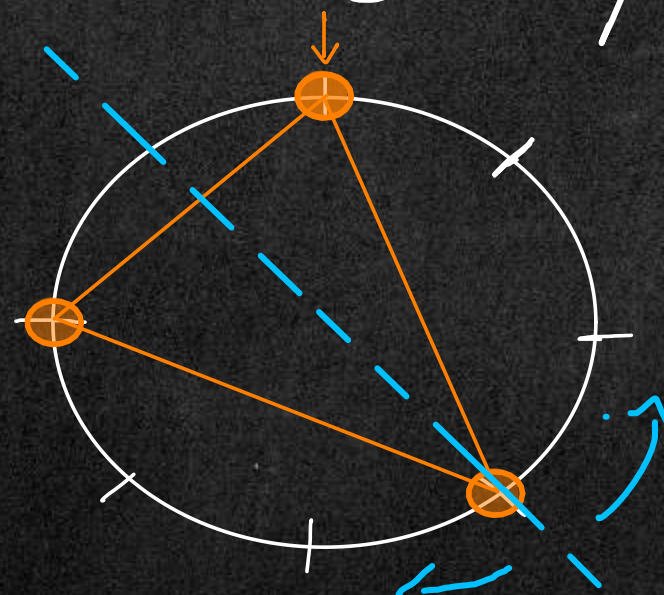
$$\begin{aligned} P(84; 19) \\ P(19; 8) \\ P(8; 3) \\ P(3; 2) \end{aligned}$$

Théorème :

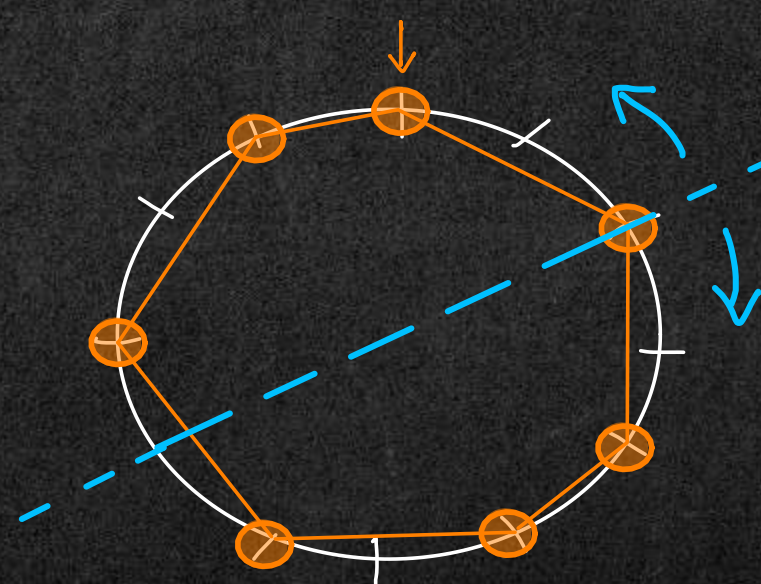
(quelques palindromes: bob, kayak,
121, saippukauppias)

Un rythme équilibré est un **PALINDROME** !
(à rotation près)

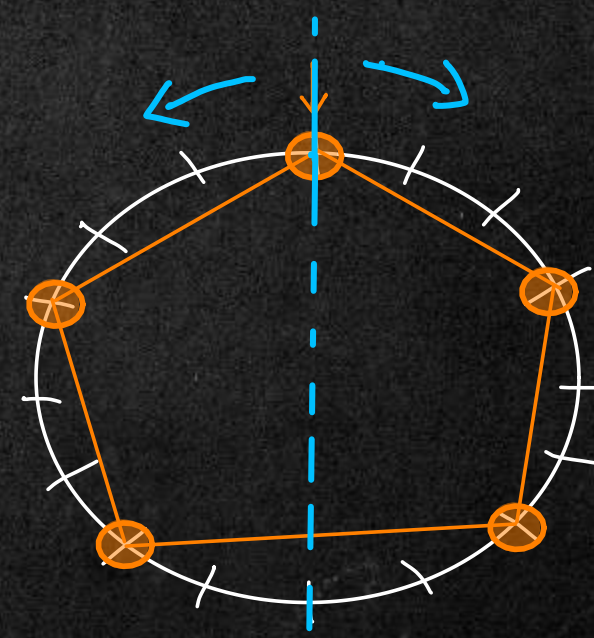
Autrement dit : en choisissant bien le point de départ,
on peut lire le collier à l'endroit ou à l'envers
en obtenant le même rythme.



TANGO / TRESILLO



BEMBE

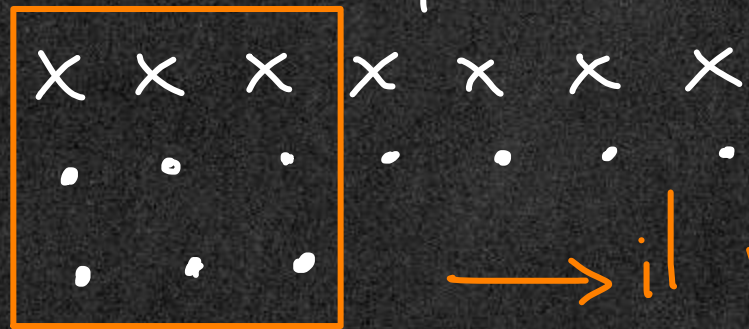


BOSSA-NOVA

Algorithme de Bjorklund (construire un rythme euclidien)

- pour 7 sons bien répartis parmi 17 pulsations.

étape 1: on range les 17 pulsations dans 7 tiroirs - colonnes, et on ajoute un son à la première pulsation de chaque colonne:

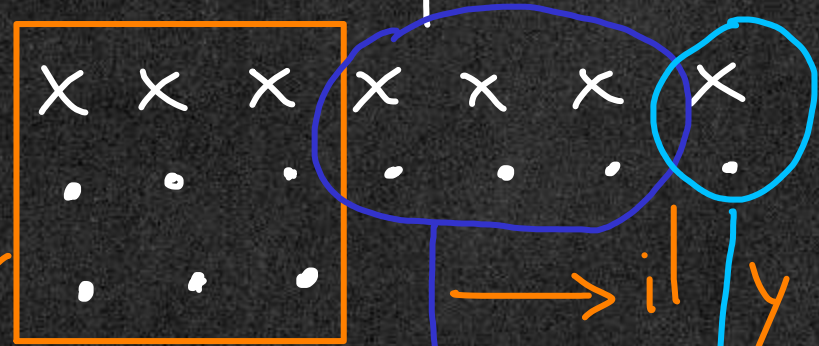


→ il y a 3 colonnes plus grandes

Algorithme de Bjorklund (construire un rythme euclidien)

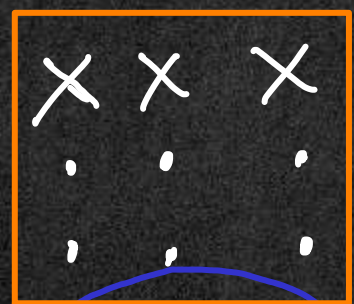
- pour 7 sons bien répartis parmi 17 pulsations.

étape 1: on range les 17 pulsations dans 7 tiroirs - colonnes, et on ajoute un son à la première pulsation de chaque colonne:



→ il y a 3 colonnes plus grandes

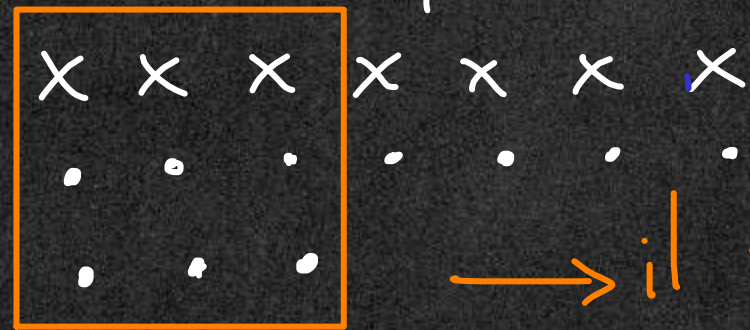
étape 2: on range ces 7 colonnes dans 3 nouveaux tiroirs - colonnes:



Algorithme de Bjorklund (construire un rythme euclidien)

- pour 7 sons bien répartis parmi 17 pulsations.

étape 1: on range les 17 pulsations dans 7 tiroirs - colonnes, et on ajoute un son à la première pulsation de chaque colonne:

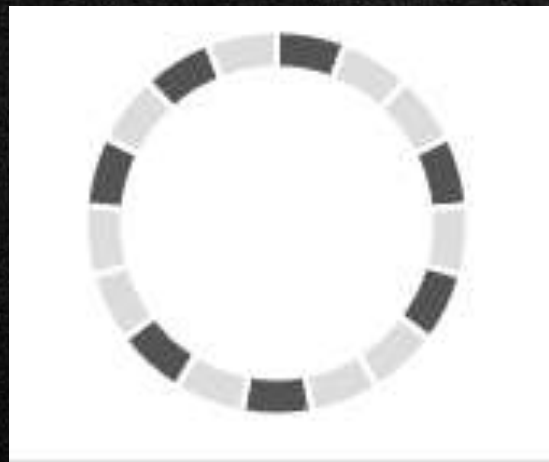


→ il y a 3 colonnes plus grandes

étape 2: on range ces 7 colonnes dans 3 nouveaux tiroirs - colonnes:

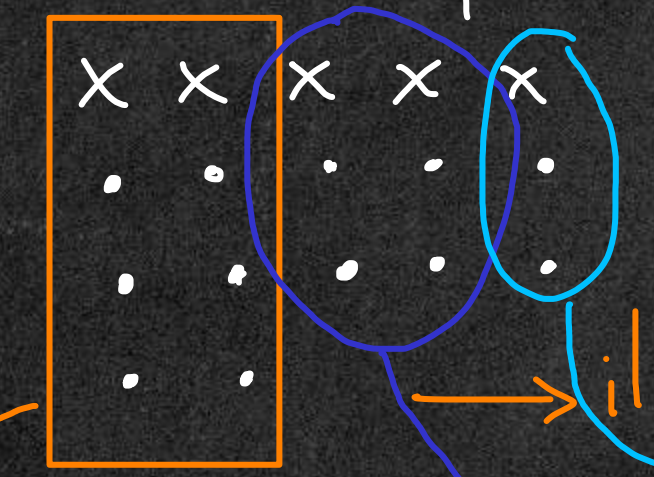


→ il y a 1 colonne plus grande: on s'arrête, et on lit le rythme de haut en bas, de droite à gauche.



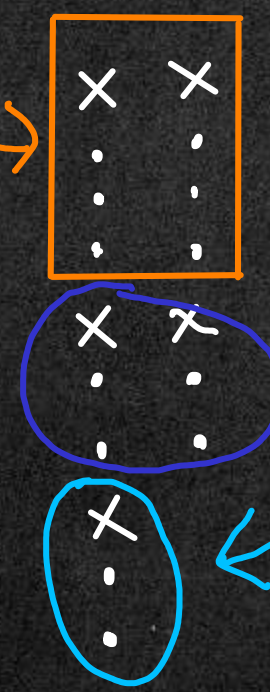
• pour 5 sons bien répartis parmi 17 pulsations.

étape 1: on range les 17 pulsations dans 5 tiroirs - colonnes, et on ajoute un son à la première pulsation de chaque colonne:



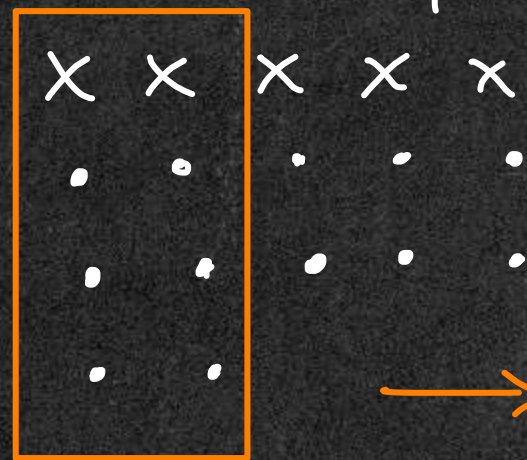
il y a 2 colonnes plus grandes

étape 2: on range ces 5 colonnes dans 2 nouveaux tiroirs - colonnes:



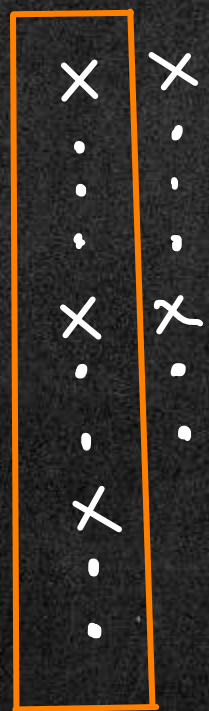
• pour 5 sons bien répartis parmi 17 pulsations.

étape 1: on range les 17 pulsations dans 5 tiroirs - colonnes, et on ajoute un son à la première pulsation de chaque colonne:



→ il y a 2 colonnes plus grandes

étape 2: on range ces 5 colonnes dans 2 nouveaux tiroirs - colonnes:



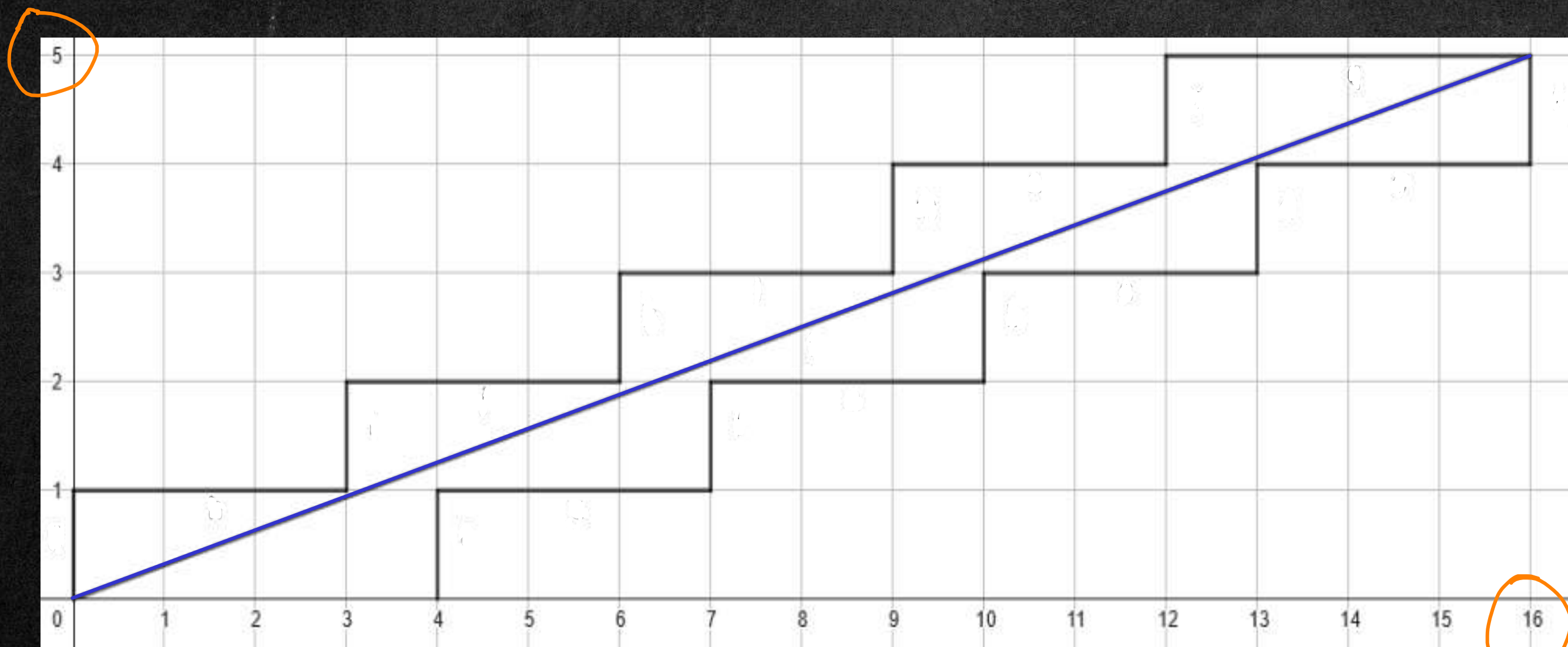
→ il y a 1 colonne plus grande: on s'arrête.



Le contour entier d'une droite

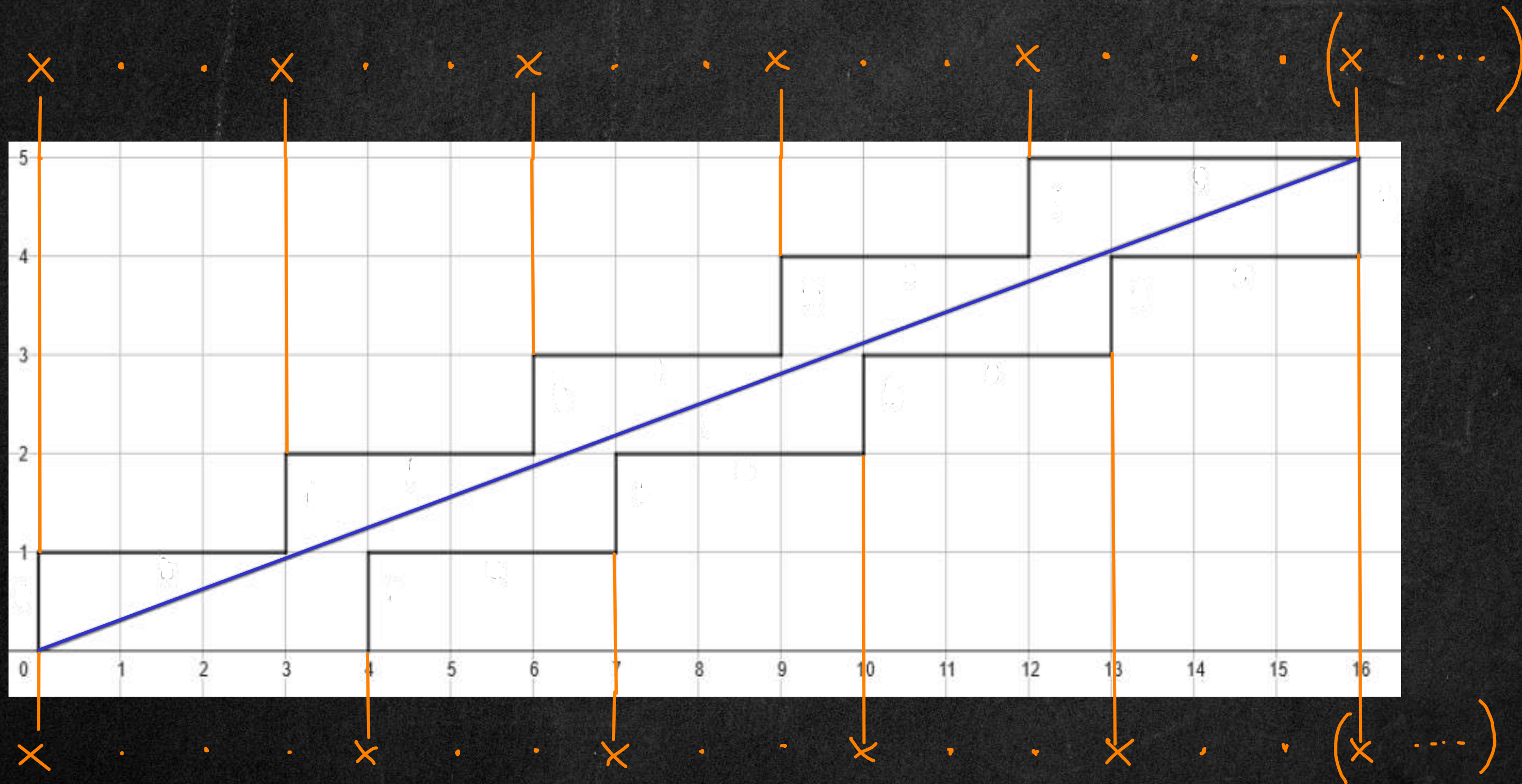
Pour 5 sons parmi 16 pulsations :

nombre de sons



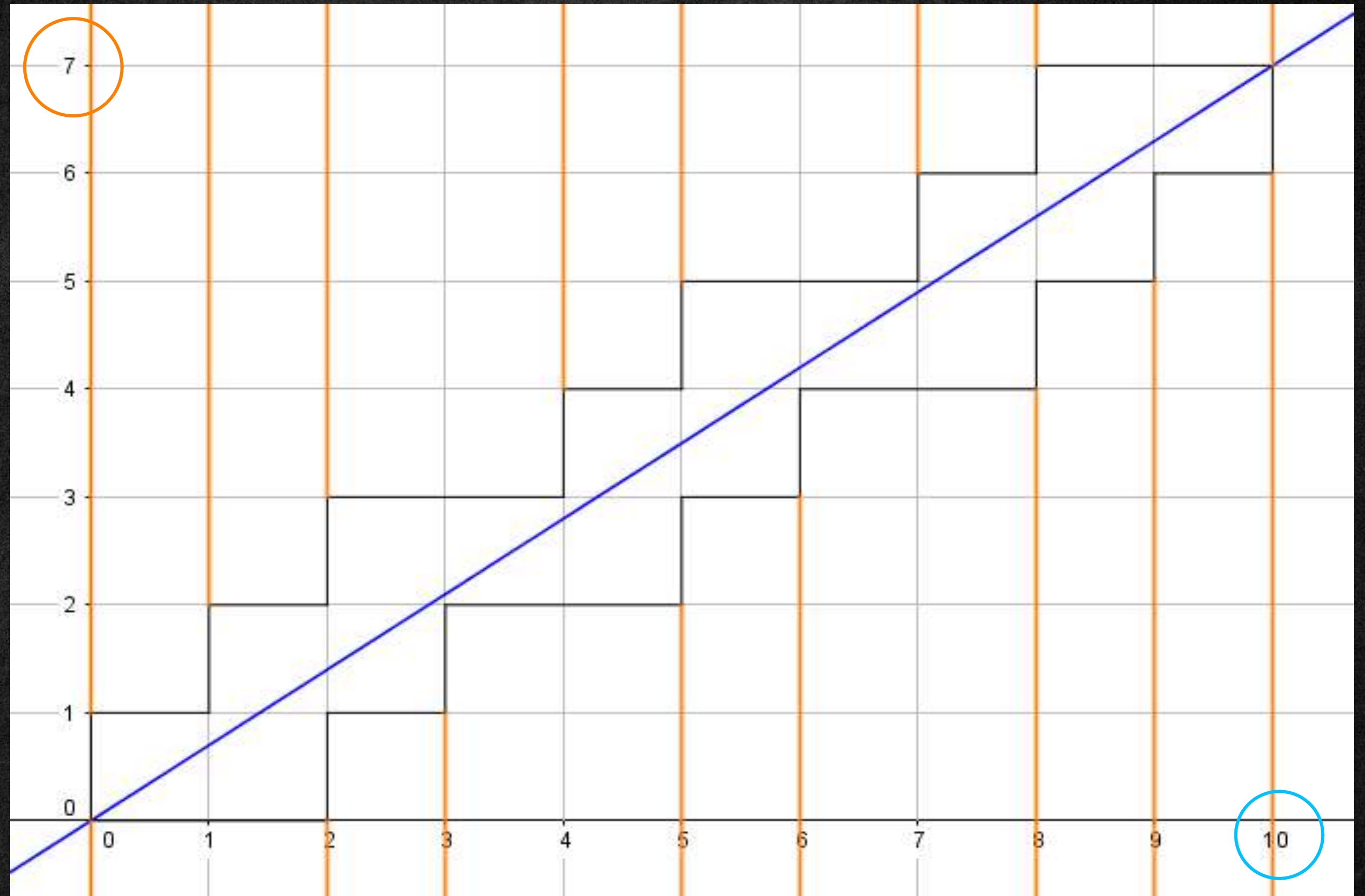
nombre de pulsations

Le contour entier d'une droite



Et ici
 pour 7 sons
 parmi 10 pulsations:

et 3 sons
 parmi 10



x x x . x x . (x ...)

x . x x . x x . x x (x ...)