Topologie dans $\mathbb{R}^d$: éléments de base.

Définition. Une norme sur $\mathbb{R}^d$ est une fonction $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d, N(\lambda x) = |\lambda| N(x), & (\textit{homogénéité}) \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d, N(x+y) \leq N(x) + N(y), & (\textit{inégalité triangulaire}) \\ \forall x \in \mathbb{R}^d, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0. & (\textit{séparation}) \end{cases}$$

Quelques normes sur $\mathbb{R}^d$:

- la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|$, définie par $\|(x_1, \cdots, x_d)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$,
- la norme uniforme, notée $\|\cdot\|_\infty$, définie par $\|(x_1, \cdots, x_d)\|_\infty = \sup_{i \in [1,d]} |x_i|$,
- la norme 1, notée $\|\cdot\|_1$, définie par $\|(x_1, \cdots, x_d)\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$.

Définition. Si a est dans $\mathbb{R}^d$, $r > 0$ et N est une norme,

- la boule ouverte de rayon r et de centre a pour la norme N est notée $B(a,r)$ et définie par $B(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^d | N(x-a) < r\right\}$,
- la boule fermée de rayon r et de centre a pour la norme N est notée $B(a,r)$ et définie par $\bar{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^d | N(x-a) \leq r\right\}$,
- la sphère de rayon r et de centre a pour la norme N est notée $S(a,r)$ et définie par $S(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^d | N(x-a) = r\right\}$.

Tracer les boules de centre 0 et de rayon 1 pour les trois normes décrites plus haut :

Si la norme n'est pas précisée, c'est qu'en général on parle de la norme euclidienne!

Définition. On dit qu'une suite (x^n) de $\mathbb{R}^d$ converge vers un point x de $\mathbb{R}^d$ pour la norme N si $N(x^n - x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Remarque. Important : la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^d$ est indépendante de la norme considérée. Ceci est propre aux espaces vectoriels de dimension finie et en général faux dans des espaces vectoriels de dimension infinie.

Définition.

- On dit que $U \subset \mathbb{R}^d$ est un *ouvert* de $\mathbb{R}^d$ s'il existe autour de chaque point de U une boule ouverte qui est incluse dans U : $\forall\, a \in U$, $\exists\, r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$.
- On dit que $F \subset \mathbb{R}^d$ est un *fermé* de $\mathbb{R}^d$ si son complémentaire $\mathbb{R}^d \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
- On dit que $B \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble *borné* s'il existe une boule dans laquelle B est contenu.
- On dit que $K \subset \mathbb{R}^d$ est un *compact* de $\mathbb{R}^d$ si c'est un fermé borné.
- On dit que $C \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble *convexe* de $\mathbb{R}^d$ si tout segment joignant deux points de C est inclus dans C : $\forall\, \lambda \in [0,1]$, $\forall\, x, y \in C$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$.
- On dit qu'un point x est à l'*intérieur* d'un ensemble E s'il existe une boule ouverte contenant x et contenue dans E. On note alors $x \in \mathring{E}$ ($\mathring{E}$ est appelé l'*intérieur* de E).

Remarque. Toutes ces notions sont indépendantes de la norme avec laquelle on travaille.

Proposition (Caractérisation séquentielle)**.**

- *$F \subset \mathbb{R}^d$ est fermé $\iff$ toute suite de F qui converge a sa limite dans F.*
- *$K \subset \mathbb{R}^d$ est compact $\iff$ toute suite de K admet une sous-suite qui converge dans K.*

Proposition. *Une union ou une intersection finie d'ouverts (resp. de fermés) de $\mathbb{R}^d$ est ouverte (resp. fermée). Une union dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Une intersection dénombrable de fermés de $\mathbb{R}^d$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.*

Contre-exemples : étudier l'union des $[0, 1-1/n]$ et l'intersection pour n dans $\mathbb{N}^\star$ des $[0, 1/n]$.

Exercice. Préciser si les domaines $D \subset \mathbb{R}^2$ suivants sont fermés ou non, ouverts ou non, bornés ou non, compacts ou non. Déterminer $\mathring{D}$.

1. $D = \mathbb{R}^2$.
2. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
3. $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+_*$.
4. $D = [-1, 1] \times \mathbb{R}$.
5. $D = \{(x, y) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
6. $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 5\}$.
7. $D = \{(x, y) \,|\, 2x + 3y \leq 1\}$.
8. $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.