

## Approche multi-échelles pour simuler l'injection d'air au sein de matrices granulaires immergées

M. Constant<sup>1</sup>, V. Vidal<sup>2</sup>, F. Dubois<sup>3</sup>,  
J. Lambrechts<sup>1</sup>, V. Legat<sup>1</sup>

<sup>1</sup> UCL, Université catholique de Louvain, {vincent.legat,jonathan.lambrechts,matthieu.constant}@uclouvain.be

<sup>3</sup> Univ Lyon, ENS de Lyon, Univ Claude Bernard Lyon 1, CNRS, Laboratoire de Physique, F-69342 Lyon, France, valerie.vidal@ens-lyon.fr

<sup>2</sup> LMGC, Univ. Montpellier, CNRS, frederic.dubois@umontpellier.fr

---

**Résumé** — L'injection de gaz au sein de matrices granulaires immergées fait l'objet de plusieurs recherches expérimentales et apparaît dans de nombreuses applications. Nous présentons une extension au logiciel de simulation des écoulements granulaires immergés, MigFlow, afin d'introduire une seconde phase fluide dans l'écoulement. Les équations de bilan des phases fluides sont résolues par la méthode des éléments finis à une plus grande échelle que celle des grains, tandis que les grains sont résolus, à leur échelle, par la méthode des éléments discrets.

**Mots clés** — éléments finis, éléments discrets, milieux triphasiques, écoulements granulaires, migflow.

---

### 1 Introduction

La simulation des écoulements granulaires immergés [15, 8] permet d'étudier l'influence des comportements microscopiques sur les propriétés macroscopiques de ces écoulements. Le manque de connaissances enveloppant les écoulements granulaires immergés provient principalement de la complexité de ces écoulements, pouvant présenter une importante inhomogénéité, ainsi que de l'influence de ces inhomogénéités sur le régime de l'écoulement [32].

Les modèles numériques utilisés pour résoudre les écoulements granulaires immergés peuvent être séparés par rapport à l'échelle utilisée pour représenter chaque phase [37]. D'une part, les simulations à grande échelle sont réalisées sur base d'approches continues. Les grains peuvent être modélisés comme une phase continue en utilisant des équations de bilan comme dans le modèle à deux fluides [11]. Les variables ponctuelles sont moyennées pour transformer la seconde loi du mouvement de Newton pour un grain isolé et les équations de Navier-Stokes pour la phase fluide en équations continues représentant le transfert de quantité de mouvement entre les deux phases [3, 16]. Ces représentations eulériennes-eulériennes ont l'avantage d'être particulièrement rapides mais nécessitent l'utilisation de lois empiriques [36] et sont incapables de représenter les propriétés de petite échelle comme les forces appliquées sur chaque grain. D'autre part, les approches discrètes résolvent pleinement les deux phases et se distinguent par la méthode utilisée pour chaque phase. La dynamique des grains peut être résolue par la méthode des éléments discrets (DEM) qui calcule les trajectoires de façon lagrangienne. Dans les mélanges denses, présentant une forte concentration en grains, l'intervalle de temps infime entre les collisions, rend la résolution séquentielle des contacts irréalisable et l'utilisation d'une méthode à pas de temps fixe est requise. Le modèle des sphères rigides [17], interdisant les interpénétrations et déformations des grains, calcule les réactions de contact itérativement par la méthode non-linéaire de Gauss-Seidel [18, 25, 1, 19]. Ces représentations lagrangiennes-lagrangiennes, calculant le fluide à une échelle plus petite que celle des grains, requièrent d'importantes ressources numériques et des méthodes particulières pour détecter, à chaque pas de temps, les frontières mobiles de la phase fluide [14, 24, 35].

Introduites en 1992 par Tsuji et al. [30], les représentations lagrangiennes-eulériennes ont d'abord été utilisées pour simuler l'écoulement de lits fluidisés. Ces approches hybrides non-résolues permettent de simuler efficacement les écoulements granulaires denses dans des géométries complexes [7, 6]. La représentation eulérienne du fluide permet une résolution numérique de ces écoulements bien plus rapide que les approches discrètes, tandis que la représentation lagrangienne des grains fournit les caractéristiques discrètes des grains inaccessibles au moyen des approches continues. La difficulté de ce type de

méthode réside dans le choix du modèle de couplage entre les deux échelles de résolution. Le transfert de quantité de mouvement entre les phases ne peut être calculé directement à l'échelle des grains puisque les caractéristiques microscopiques du fluide ne sont pas représentées [20]. Différents modèles de fermeture ont été proposés, se caractérisant par la répartition du gradient de pression et de la poussée sur les deux phases [32].

Récemment, une attention grandissante a été portée à la fluidisation des lits granulaires immergés en raison de leur utilisation dans des procédés de séchage, ségrégation, mixage... des solides [10] mais également dans des procédés d'assainissement des sols où l'injection de gaz dégrade les substances contaminantes [28]. Les difficultés d'observation de la zone fluidisée au sein des lits granulaires tridimensionnels nécessite l'emploi de techniques pionnières d'imagerie non-intrusives [21]. Pour cette raison, des dispositifs quasi-bidimensionnels, comme les cellules de Hele-Shaw [34], sont préférés dans les recherches où l'étude se porte sur la morphologie de la zone fluidisée. Des expériences mettant en œuvre l'injection de gaz dans un lit granulaire immergé dans de l'eau ont permis d'établir une classification des différentes morphologies de la zone fluidisée en fonction du débit d'injection et de la gravité effective [33]. Cependant, les transitions entre les régimes, comme la percolation et la fracturation, ne sont pas nettes et il existe une gamme de débits et de gravités effectives pour lesquels il est impossible de prédire le comportement de la cheminée de fluidisation en raison de l'impact des hétérogénéités du milieu sur le régime de propagation du gaz [33]. La caractérisation de la géométrie de la région envahie par le gaz, en vue d'une comparaison avec des structures géologiques semblables, dans les fond marins, provoquées par l'échappement de gaz dans de petites dépressions coniques, nécessite la répétition d'expériences identiques, ce qui s'avère bien souvent impraticable en laboratoire et requiert l'utilisation de simulations numériques. Les approches hybrides non-résolues restent les méthodes privilégiées pour étudier les cheminées de fluidisation au sein des lits granulaires [31, 2, 22]. Cependant, ces méthodes restent cantonnées à l'interaction d'un unique fluide avec des grains. Dans les cas où le fluide injecté est différent du fluide immergeant les grains, des modèles simplifiés doivent être utilisés, comme, par exemple, la représentation de la matrice granulaire par un réseau où chaque nœud représente le vide interstitiel entre les grains et où les arêtes empruntées par le gaz sont pondérées par les pressions capillaire et hydrostatique [34].

## 2 Considérations Théoriques

Des modèles multi-échelles sont rencontrés, fréquemment, pour simuler des écoulements granulaires immergés [30, 7, 6, 36]. Parmi les méthodes numériques de représentation eulérienne des milieux continus, la méthode des éléments finis présente de nombreux avantages liés, notamment, à l'emploi d'une discrétisation non structurée. Ainsi, cette méthode s'applique facilement à des écoulements dans des géométries complexes. Dans le cadre des écoulements granulaires, l'influence des inhomogénéités sur les caractéristiques de l'écoulement tendent à nécessiter l'utilisation d'une discrétisation spatiale plus fine dans les zones où la variation des inhomogénéités est grande. Le recours à une adaptation du maillage en cours de simulation permet d'améliorer la précision des résultats, tout en conservant le même nombre d'éléments, i.e. le même nombre d'inconnues. Un tel procédé d'adaptation a été implémenté et étudié dans la première version du logiciel MigFlow<sup>1</sup> [8] qui propose un modèle multi-échelles pour résoudre les écoulements granulaires immergés. La représentation continue du fluide est basée sur un lissage des discontinuités spatiales induites par la phase discrète. La présence de grains, en chaque point du domaine, étant quantifiée par la fraction volumique de fluide au sein d'un volume de contrôle centré en ce point, il est possible de calculer la dynamique de la phase fluide sur base d'équations de bilan continues établies à une plus grande échelle que celle des grains. La phase solide est, quant à elle, résolue par la méthode des éléments discrets en évaluant, à la position des centres de masse, les différents champs du fluide nécessaires aux calculs des forces appliquées par le fluide sur les grains. Dans cette section, nous allons montrer comment ce modèle peut être étendu à la simulation d'écoulements où des grains solides interagissent avec deux phases fluides.

---

1. <https://www.migflow.be>

## 2.1 Une Phase Solide, Deux Phases Fluides

La présence d'une seconde phase fluide, introduit, de façon analogue aux grains, des discontinuités spatiales qui doivent être lissées pour être représentées continuellement au sein des équations de bilan macroscopiques. Définissons une fonction indicatrice de phase  $\alpha$  qui vaut l'unité en chaque point occupé par la première phase continue et zéro sinon. Il s'agit d'une fonction discontinue dont la discontinuité définit la frontière entre les deux phases fluides. Le suivi précis de cette frontière mobile par une méthode eulérienne, sur un maillage fixe, est compliqué puisque l'advection déplaçant cette interface est moyennée sur un volume de contrôle. En raison de cette représentation en grandeurs moyennes, il est préférable de travailler avec une valeur moyenne  $a$  de la fonction indicatrice de phase qui représente la concentration ou la fraction volumique de la première phase continue [12, 26, 13]. L'interface entre les deux phases continues est donc définie par les éléments dont la valeur de  $a$  est comprise entre 0 et 1.

Dans une représentation lagrangienne où la concentration massique est négligée, chaque point mécanique se déplace en fonction de l'écoulement. Un point appartenant à une phase continue appartiendra à cette phase pendant l'entièreté du calcul. Cela signifie que la valeur de  $a$  associée à un point lagrangien reste constante. L'évolution de la concentration  $a$ , dans notre formalisme eulérien, est donc donnée par une équation d'advection, dans laquelle est réintroduite le terme de diffusion massique entre les phases :

$$\frac{\partial a\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (av) - \nabla \cdot (\beta \nabla a) = 0, \quad (1)$$

où  $\phi = 1 - c$  est appelé la porosité, il s'agit du complémentaire de la compacité i.e. la fraction volumique occupée par les grains dans une cellule de calcul,  $\beta$  est le coefficient de diffusion massique et  $\mathbf{v} = \phi \mathbf{u}$  représente la vitesse effective de la phase continue. En notant la gravité  $\mathbf{g}$  et la densité de force venant de l'interaction fluide-grains  $\mathbf{f}$ , la dynamique macroscopique de l'écoulement est calculée grâce aux équations de Navier-Stokes [8] :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{\rho \mathbf{v} \mathbf{v}}{\phi} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot 2\mu \phi \mathbf{d} + \phi \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad (3)$$

où  $\mathbf{d}$  est le gradient symétrique de  $\mathbf{v}/\phi$  et dont les variables ponctuelles de pression  $p$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  sont moyennées par la porosité [30, 37, 8] et pour lesquelles on suppose que les propriétés intensives i.e. la densité et la viscosité varient linéairement dans les zones où la concentration des phases fluides est comprise entre 0 et 1 :

$$\rho = a\rho_1 + (1 - a)\rho_2,$$

$$\mu = a\mu_1 + (1 - a)\mu_2.$$

Le choix de la force d'interaction entre les grains et les fluides reste un problème largement débattu. Il n'existe toujours pas de consensus autour d'une expression de la force de traînée convenant à tous les régimes d'écoulement. Même si certains développements théoriques ont pu être réalisés pour des situations simplifiées, beaucoup de modèles utilisent des formules empiriques calibrées sur un ensemble de paramètres expérimentaux analogues. Dans le cadre de cette étude, concernant des matrices granulaires immergées, la force de traînée s'appliquant en un point est influencée par la présence de grains dans son voisinage. Cet effet peut être considéré en multipliant la force de traînée s'appliquant sur un grain dans un fluide par la porosité en ce point [9] puisque, dans une approche eulérienne, elle quantifie la présence de grains dans une cellule de calcul. L'utilisation de cette formule, dans le contexte d'un modèle multi-échelles présentant deux phases continues et une phase discrète, est semblable à celle utilisée par Constant et al. (2018).

## 2.2 Des Éléments Finis Stabilisés

La résolution des équations ci-dessus, sous leur forme discrète, par la méthode des éléments finis, est un problème qui peut mener à certaines difficultés numériques [29]. Le recours à des fonctions d'interpolation linéaire d'ordre égal pour toutes les variables est un schéma numérique de prédilection, pour

conserver la rapidité d'exécution liée à l'utilisation d'un modèle multi-échelles. Cependant, certaines combinaisons de fonctions d'interpolation sont inappropriées pour la vitesse et la pression et provoquent des instabilités, se manifestant par un mode damier dans le champ de pression. Notamment, la représentation discrète sur des éléments  $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$  des champs de vitesse et pression ne respecte pas la condition de Brezzi-Babuska [5, 4]. La seconde difficulté qui se présente pour la résolution discrète des équations est la présence de termes advectifs susceptibles de créer des instabilités caractérisées par des oscillations dans le champ de vitesse. Par ailleurs, si ce problème ne se présente généralement qu'à haut nombre de Reynolds pour des écoulements à une seule phase continue, il faut désormais tenir compte de la concentration dont l'évolution est caractérisée par une équation d'advection-diffusion pour laquelle la diffusion massique pourra dans certains cas être négligée.

Ces deux difficultés sont surmontées par l'ajout de termes stabilisateurs. Un terme PSPG (pressure-stabilizing/Petrov-Galerkin) est ajouté, dans l'équation de continuité, afin de combler le rang déficient du système linéaire et de respecter la condition de Brezzi-Babuska. Un terme SUPG (streamline-upwind/Petrov-Galerkin), introduit dans l'équation de quantité de mouvement, assure une dissipation suffisante pour prévenir les instabilités numériques provenant des termes advectifs.

Il est évident que l'ajout de termes stabilisateurs change la nature du problème. Bien que les termes PSPG et SUPG proviennent d'une méthode résiduelle assurant la consistance des équations résolues, il convient de choisir prudemment les paramètres multiplicateurs de stabilisation [27]. Par ailleurs, l'ajout du terme PSPG dans l'équation de continuité peut avoir des effets dévastateurs si la perte de l'incompressibilité de l'écoulement n'est pas limitée. Dans ce but, il sied de rétablir l'incompressibilité en introduisant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement une pénalité basée sur un estimateur de la contrainte au sens des moindres carrés [27].

Soient  $\mathcal{V}^h$ ,  $\mathcal{P}^h$  et  $\mathcal{A}^h$  un espace de fonctions vectorielles et deux espace de fonctions scalaires, respectivement, qui sont affines sur chacun des éléments du maillage. La formulation faible du problème défini par les équations (1), (2), (3) consiste à trouver  $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$ ,  $p^h \in \mathcal{P}^h$  et  $a^h \in \mathcal{A}^h$  telles que  $\forall(\hat{\mathbf{v}}^h, \hat{p}^h, \hat{a}^h) \in (\mathcal{V}^h \times \mathcal{P}^h \times \mathcal{A}^h)$  :

Termes sources & Variation temporelle	Termes de flux	Termes de bord	Termes stabilisateurs
$\langle \frac{\partial \rho^h \mathbf{v}^h}{\partial t}, \hat{\mathbf{v}}^h \rangle$ $-\langle \phi \rho^h \mathbf{g} + \mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}^h \rangle$	$-\langle \rho^h \frac{\mathbf{v}^h \mathbf{v}^h}{\phi}, \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}^h \rangle$ $-\langle p^h \mathbf{I} - 2\mu^h \phi \mathbf{d}^h, \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}^h \rangle$	$+\langle\langle \rho^h \frac{\mathbf{v}^h \mathbf{v}^h}{\phi}, \hat{\mathbf{v}}^h \cdot \mathbf{n} \rangle\rangle$ $+\langle\langle p^h \mathbf{I} - 2\mu^h \phi \mathbf{d}^h, \hat{\mathbf{v}}^h \cdot \mathbf{n} \rangle\rangle$	$\overbrace{+\sum_{e=1}^N \tau_s \langle \mathbf{R}(\mathbf{v}^h), \mathbf{v}^h \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}^h \rangle_e}_{SUPG}$ $+\underbrace{\sum_{e=1}^N \tau_c \langle \nabla \cdot \mathbf{v}^h, \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}^h \rangle_e}_{Contrainte} = 0$
$\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \hat{p}^h \rangle$	$-\langle \mathbf{v}^h, \nabla \hat{p}^h \rangle$	$+\langle\langle \mathbf{v}^h, \hat{p}^h \mathbf{n} \rangle\rangle$	$+\underbrace{\sum_{e=1}^N \tau_p \langle \mathbf{R}(\mathbf{v}^h), \nabla \hat{p}^h \rangle_e}_{PSPG} = 0$
$\langle \frac{\partial a^h \phi}{\partial t}, \hat{a}^h \rangle$	$-\langle \mathbf{v}^h a^h, \nabla \hat{a}^h \rangle$ $+\langle \beta \nabla a^h, \nabla \hat{a}^h \rangle$	$+\langle\langle \mathbf{v}^h a^h, \hat{a}^h \mathbf{n} \rangle\rangle$ $-\langle\langle \beta \nabla a^h, \hat{a}^h \mathbf{n} \rangle\rangle$	$+\underbrace{\sum_{e=1}^N \tau_a \langle \mathbf{R}(a^h) \mathbf{v}, \nabla \hat{a}^h \rangle_e}_{PSPG/SUPG} = 0$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  représente la restriction du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  à l'intérieur de l'élément  $e$  et les résidus utilisés dans les termes stabilisateurs sont :

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}^h) = \frac{\partial \rho^h \mathbf{v}^h}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{\rho^h \mathbf{v} \mathbf{v}}{\phi} \right) - \nabla \cdot 2\mu^h \phi \mathbf{d}^h + \nabla p^h,$$

$$\mathbf{R}(a^h) = \frac{\partial a^h \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}^h a^h) - \nabla \cdot (\beta \nabla a).$$

Les termes de bord apparaissant dans la formulation faible ci-dessus proviennent des intégrations par parties, inhérentes à la méthode des éléments finis. Les paramètres de stabilisation sont obtenus à partir des matrices et vecteurs locaux [23] :

$$\tau_p = \tau_s = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{\| \mathbf{v}^h \|}{\bar{h}} \right)^2 + \left( \frac{4\nu}{\bar{h}^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tau_c = h \| \mathbf{v}^h \| \min \left( \frac{h\rho \| \mathbf{v}^h \|}{6\mu}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\tau_a = \left[ \left( \frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left( \frac{2 \| \mathbf{v}^h \|}{h} \right)^2 + \left( \frac{4\beta}{\bar{h}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps utilisé dans le schéma numérique d'intégration des équations,  $h$  est la taille de maille et  $\bar{h}$  est la taille de maille dans la direction du vecteur vitesse. Pour compléter la description du modèle numérique, il convient de préciser que le terme PSPG de stabilisation apparaissant dans l'équation de continuité doit être ajouté à l'équation de la concentration et que le terme SUPG de stabilisation apparaissant dans l'équation de la concentration doit être ajouté à l'équation de continuité pour assurer la consistance du modèle.

### 3 Résultats

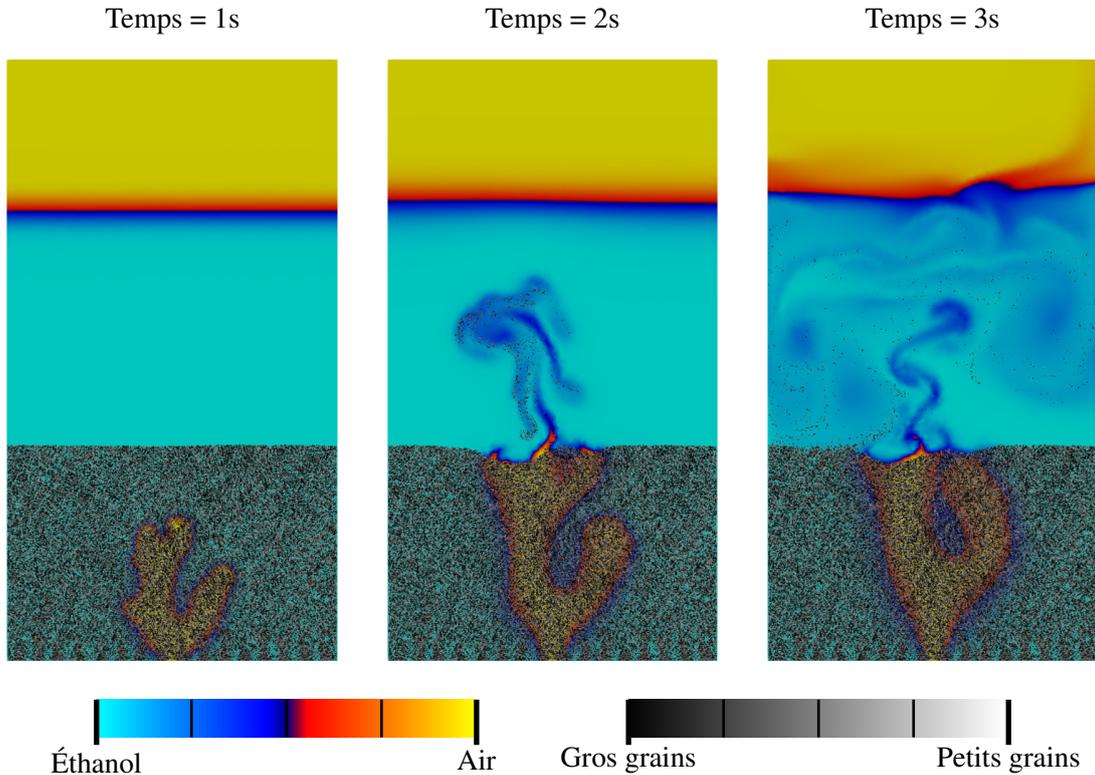


FIGURE 1 – Simulation bidimensionnelle de l'injection d'air, sous gravité, au sein d'une matrice granulaire immergée dans de l'éthanol. Le rayon moyen des grains de polystyrène vaut  $0.495 \cdot 10^{-4}$  m, le diamètre d'injection est de  $10^{-3}$  m et le débit d'injection vaut 0.2 L/min.

Au début de la simulation, l'air injecté au fond du lit granulaire diffuse concentriquement à travers le lit granulaire depuis la zone d'injection. Le frottement entre les grains crée des blocages en certains points de la matrice granulaire forçant l'air à se diviser pour se propager dans des directions où les contraintes mécaniques sont plus faibles. Dans ce cas, l'invasion d'air se fait progressivement, sans mouvement significatif des grains au sein de la matrice granulaire. Les points d'émission du gaz à la surface du lit granulaire sont multiples. À la sortie du lit granulaire, des instabilités de Rayleigh-Taylor déforment l'interface du jet. Des grains sont emportés vers le haut par l'air. La zone fluidisée se forme depuis la

surface du lit granulaire où l'air peut facilement mettre en suspension des grains présentant de faibles contraintes mécaniques. Des simulations, prenant en compte la tension de surface à l'interface séparant les fluides, seront réalisées afin d'améliorer la qualité des résultats.

## 4 Conclusion

Nous avons développé un modèle hybride permettant de résoudre des écoulements présentant une phase discrète (grains) et deux phases fluides pour simuler l'injection d'air au sein de matrices granulaires immergées. Les équations des phases continues sont résolues sur des grilles non structurées par la méthode des éléments finis, à une échelle plus grande que celle des grains, tandis que les grains sont résolus à leur échelle par la méthode des éléments discrets. La concentration des phases continues est définie au moyen d'une équation d'advection-diffusion, stipulant que la concentration est déplacée dans la direction du champ de vitesse. L'utilisation de grilles non structurées permet une adaptation rapide et efficace de la discrétisation spatiale dans le but de raffiner la discrétisation spatiale dans les zones d'intérêt.

Les premiers résultats montrent que, à bas débit, l'air injecté diffuse à travers la matrice granulaire sans provoquer de déplacement significatif des grains. Contraint par des blocages mécaniques, provoqués par le frottement des grains, on observe la séparation du gaz en plusieurs branches qui percent la surface du lit granulaire en plusieurs points distincts.

Les expériences réalisées en laboratoire présentent des schémas d'invasion, de type percolation, semblables aux résultats numériques [33] même si des ramifications plus fines et plus nombreuses sont observées expérimentalement.

Dans cette expérience, la diffusion massique est négligeable en raison du temps nécessaire à l'échappement du gaz de la partie fluide. La diffusion observée sur les résultats provient principalement de la stabilisation numérique des équations. Cette diffusion peut être limitée en raffinant davantage le maillage le long de l'interface air-éthanol. Cependant, comme le modèle multi-échelles exige que la résolution du fluide se fasse à une échelle plus grande que les grains, il n'est ni possible, ni souhaitable de procéder à une suppression de cette diffusion numérique.

## Remerciement

Matthieu Constant est un chercheur financé par une bourse de doctorat délivrée par les fonds pour la Formation à la Recherche dans l'Industrie et dans l'Agriculture (FRIA).

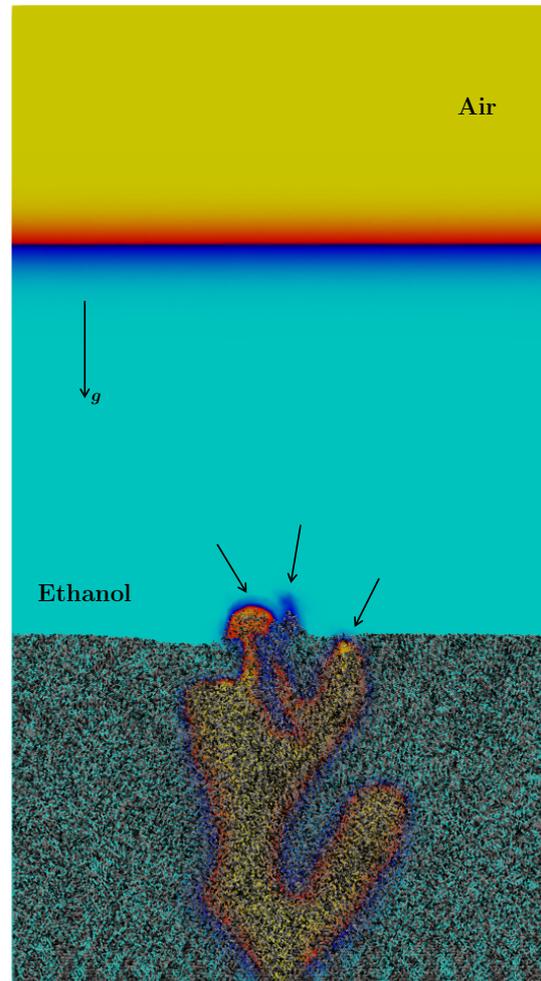


FIGURE 2 – Émission d'air à la surface du lit granulaire après 1.5 s

## Références

- [1] P. Alart, A. Curnier. *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 92 :353 – 375, 1991.
- [2] Falah Alobaid, Bernd Epple. *Improvement, validation and application of CFD/DEM model to dense gas–solid flow in a fluidized bed*. Particuology, 11(5) :514 – 526, 2013.
- [3] T. B. Anderson, Roy Jackson. *Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds. Equations of Motion*. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, 6(4) :527–539, 1967.
- [4] Ivo Babuška. *Error-bounds for finite element method*. Numerische Mathematik, 16(4) :322–333, 1971.
- [5] F. Brezzi. *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 8(R2) :129–151, 1974.
- [6] K.W. Chu, B. Wang, A.B. Yu, A. Vince. *CFD-DEM modelling of multiphase flow in dense medium cyclones*. Powder Technology, 193(3) :235 – 247, 2009. Special Issue : Discrete Element Methods : The 4th International conference on Discrete Element MethodsThe 4th International Conference on Discrete Element Methods, Brisbane, August 2007.
- [7] K.W. Chu, A.B. Yu. *Numerical simulation of complex particle–fluid flows*. Powder Technology, 179(3) :104 – 114, 2008. WCPT5Papers presented at the 5th World Conference of Particle Technology (WCPT5), Orlando, Florida, April 23–27 20065th World Conference of Particle Technology (WCPT5).
- [8] Matthieu Constant, Frédéric Dubois, Jonathan Lambrechts, Vincent Legat. *Implementation of an unresolved stabilised FEM–DEM model to solve immersed granular flows*. Computational Particle Mechanics, Sep 2018.
- [9] R. Di Felice, M. Rotondi. *Fluid-particle Drag Force in Binary-solid Suspensions*. International Journal of Chemical Reactor Engineering, 10, 2012.
- [10] Norman Epstein, John R Grace. *Spouted and spout-fluid beds : fundamentals and applications*. Cambridge University Press, 2010.
- [11] D. Gidaspow. *Multiphase Flow and Fluidization : Continuum and Kinetic Theory Descriptions*. Academic Press, 2012.
- [12] H. Grosshans, A. Movaghar, L. Cao, M. Oevermann, R.-Z. Szász, L. Fuchs. *Sensitivity of VOF simulations of the liquid jet breakup to physical and numerical parameters*. Computers & Fluids, 136 :312 – 323, 2016.
- [13] C.W Hirt, B.D Nichols. *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*. Journal of Computational Physics, 39(1) :201 – 225, 1981.
- [14] H. H. Hu. *Direct simulation of flows of solid-liquid mixture*. International Journal of Multiphase Flow, 22(2) :335–352, 1996.
- [15] E. Izard. *Modélisation numérique des écoulements granulaires denses immergés dans un fluide*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2014.
- [16] R. Jackson. *Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a Newtonian fluid*. Chemical Engineering Science, 52(15) :2457 – 2469, 1997. Mathematical modelling of chemical and biochemical processes.
- [17] M. Jean. *The non-smooth contact dynamics method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177(3–4) :235–257, 1999.
- [18] M. Jean, J.J. Moreau. *Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections*. In Proceedings of Contact Mechanics International Symposium, volume 1, pages 31–48, 1992.
- [19] F. Jourdan, P. Alart, M. Jean. *A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 155 :31 – 47, 1998.
- [20] KD Kafui, C Thornton, MJ Adams. *Discrete particle-continuum fluid modelling of gas–solid fluidised beds*. Chemical Engineering Science, 57(13) :2395–2410, 2002.
- [21] M.H. Köhl, G. Lu, J.R. Third, Klaas P. Pruessmann, C.R. Müller. *Magnetic resonance imaging (MRI) of jet height hysteresis in packed beds*. Chemical Engineering Science, 109 :276 – 283, 2014.
- [22] Jeff Ngoma, Pierre Philippe, Stéphane Bonelli, Farhang Radjaï, Jean-Yves Delenne. *Two-dimensional numerical simulation of chimney fluidization in a granular medium using a combination of discrete element and lattice Boltzmann methods*. Phys. Rev. E, 97 :052902, May 2018.
- [23] Tayfun E Tezduyar ; Yasuo Osawa. *Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 2000.
- [24] C. S. Peskin. *The immersed boundary method*. Acta Numerica, 11 :479–517, 2002.

- [25] M. Renouf, F. Dubois, P. Alart. *A parallel version of the non smooth contact dynamics algorithm applied to the simulation of granular media*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 168 :375 – 382, 2004. Selected Papers from the Second International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN 2002).
- [26] Murray Rudman. *A volume-tracking method for incompressible multifluid flows with large density variations*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 28, 1998.
- [27] T.E. Tezduyar ; S. Sathe. *Stabilization parameters in SUPG and PSPG formulations*. Journal of Computational and Applied Mechanics, 4, 2003.
- [28] R. Semer, J.A. Adams, K.R. Reddy. *TECHNICAL NOTE An experimental investigation of air flow patterns in saturated soils during air sparging*. Geotechnical & Geological Engineering, 16(1) :59–75, Mar 1998.
- [29] T.E. Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray, R. Shih. *Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 95(2) :221 – 242, 1992.
- [30] Y. Tsuji, T. Kawaguchi, T. Tanaka. *Discrete particle simulation of two dimensional fluidized bed*. Powder Technology, 77(1) :79–87, 1993.
- [31] M.A. van der Hoef, M. van Sint Annaland, N.G. Deen, J.A.M. Kuipers. *Numerical Simulation of Dense Gas-Solid Fluidized Beds : A Multiscale Modeling Strategy*. Annual Review of Fluid Mechanics, 40(1) :47–70, 2008.
- [32] B.G.M. van Wachem, A.E. Almstedt. *Methods for multiphase computational fluid dynamics*. Chemical Engineering Journal, 96(1) :81 – 98, 2003. Festschrift Prof. Cor M. van den Bleek.
- [33] Germán Varas, Jean-Christophe Géminard, Valérie Vidal. *Air invasion in a granular layer immersed in a fluid : morphology and dynamics*. Granular Matter, 15(6) :801–810, Dec 2013.
- [34] Germán Varas, Valérie Vidal, Jean-Christophe Géminard. *Morphology of air invasion in an immersed granular layer*. Phys. Rev. E, 83 :061302, Jun 2011.
- [35] J. Zhang, L S Fan, C. Zhu, R. Pfeffer, D. Qi. *Dynamic behaviour of collision of elastic spheres in viscous fluids*. Powder Technology, 106(1–2) :98–109, 1999.
- [36] W. Zhong, A. Yu, G. Zhou, J. Xie, H. Zhang. *CFD simulation of dense particulate reaction system : Approaches, recent advances and applications*. Chemical Engineering Science, 140 :16 – 43, 2016.
- [37] H. P. Zhu, Z. Y. Zhou, R. Y. Yang, A. B. Yu. *Discrete particle simulation of particulate system : theoretical developments*. Chemical Engineering Science, 62(13) :3378–3396, 2007.