

Mouvement Brownien Plan, SLE, Invariance Conforme et Dimensions Fractales

Vincent BEFFARA

Ceci est l'introduction à ma thèse ; le texte complet se trouve sur la Toile à l'adresse suivante : <http://www.dma.ens.fr/~beffara/These.ps.gz>.

Table des matières

1	Position du problème	1
2	Le mouvement brownien plan	3
2.1	Invariance conforme	3
2.2	Points exceptionnels de la courbe brownienne	4
3	Le processus de Loewner stochastique	7
3.1	Le théorème de Loewner	7
3.2	Définition du processus <i>SLE</i>	9
3.3	Quelques propriétés du <i>SLE</i>	10
4	Résultats obtenus et plan général	11
4.1	Sur le mouvement brownien plan	11
4.2	Sur le processus de Schramm	14
	Bibliographie	19

1 Position du problème

Une des principales questions qui se posent en mécanique statistique est celle de la détermination de limites d'échelle (*scaling limits*). D'une façon volontairement informelle, le problème est le suivant : on considère un modèle aléatoire discret défini sur un réseau, et on cherche à obtenir des informations sur le comportement à grande échelle du système — ou, ce qui est équivalent dans la plupart des cas, sur son comportement quand on fait tendre le pas du réseau vers zéro. Deux phénomènes peuvent alors apparaître :

- Ou bien le modèle devient déterministe, et on obtient des résultats comme des lois des grands nombres et des estimées de grandes déviations qui décrivent la convergence vers cet état déterministe ;

- Ou bien la limite reste aléatoire, ce qui signifie que le système donne naissance à un objet aléatoire continu que l'on cherche alors à identifier et à étudier de manière intrinsèque ; ses propriétés fournissent alors en retour des informations sur le système discret.

En pratique, le problème de l'existence même d'une limite ne semble pas avoir de solution générale, la convergence de chaque modèle particulier réclamant une preuve différente ; mais il est parfois possible, en admettant l'existence d'une limite, d'identifier cette dernière de manière exacte.

La distinction entre ces deux cas est particulièrement apparente dans l'étude des *transitions de phase* pour des systèmes de particules sur un réseau. Le système physique dépend alors d'un paramètre réel qui mesure la force d'interaction entre les particules. Intuitivement, si le paramètre est petit, le comportement à grande échelle du système est le même que celui de particules indépendantes, alors que s'il est grand, tous les sites vont avoir tendance à s'aligner. Dans les deux cas, on observe alors une limite d'échelle déterministe, mais pour des raisons différentes (on observe soit un comportement *moyen*, soit un comportement *commun*).

Pour certains modèles, il existe alors une valeur particulière du paramètre, dite *point critique*, correspondant à la transition entre les deux régimes, et pour lequel aucun de ces deux phénomènes ne se produit. La limite d'échelle du système au point critique produit alors un objet aléatoire continu.

Dans le cas où le réseau considéré est de dimension 2, les physiciens ont développé des outils particuliers pour décrire le comportement de tels systèmes au point critique, comme par exemple les théories de champs conformes ([5]) et la gravitation quantique ([3]). Le résultat le plus surprenant est que l'objet limite ne dépend pas du choix du réseau mais seulement de la dimension du modèle. En particulier, il devient invariant par rotation, et comme il est défini par une limite d'échelle il se transforme de manière simple par homothétie.

Cela a amené les physiciens à la notion d'*invariance conforme* : comme le comportement local d'une transformation conforme est essentiellement la composition d'une rotation et d'une homothétie, on obtient ainsi des informations sur l'image de l'objet continu par une transformation conforme du domaine où il est défini. En particulier, si cet objet est invariant par homothétie, ces considérations heuristiques donnent une bonne raison de croire qu'il est aussi invariant par transformation conforme.

Remarque : Le lien entre criticalité et invariance par changement d'échelle est particulièrement visible dans le cadre des *groupes de renormalisation*. Le cas le plus simple est l'opération de décimation dans \mathbb{Z}^d , qui consiste à définir le modèle sur \mathbb{Z}^d , pour un certain paramètre λ , et ensuite à ne conserver que les sites qui se trouvent sur un sous-réseau $(a\mathbb{Z})^d$, où a un entier supérieur ou égal à 2. Cette opération correspond intuitivement à un changement d'échelle de facteur a pour la limite continue (toujours dans le cas où celle-ci existe) ; mais il se trouve que souvent le comportement du système discret sur le sous-réseau est proche de son comportement sur le réseau initial pour une autre valeur du paramètre, disons $\phi_a(\lambda)$. Il est alors naturel de considérer les paramètres qui sont les points fixes de ϕ_a , car ils seront les seuls à fournir une limite continue invariante par changement d'échelle — l'équation $\phi_a(\lambda) = \lambda$ sert alors de *définition* du point critique. (Cf. par exemple [2, ex. III.38, p. 527] pour un calcul explicite dans le cas du modèle d'Ising.)

En admettant l'existence de la limite d'échelle ainsi que l'invariance de celle-ci par transformation conforme, Schramm [16] prouve alors le résultat suivant : la limite est décrite par un processus aléatoire qu'il nomme SLE (pour *Stochastic Loewner Evolution*), et dont la loi ne dépend que d'un seul paramètre réel positif κ . Autrement dit, à tout système discret "raisonnable" (au sens où il admet une limite d'échelle qui est invariante par transformation conforme) il est possible d'associer une valeur de κ , qui joue le même rôle que la charge centrale dans le formalisme physique, de telle sorte que la limite d'échelle du système soit le processus SLE_κ .

La question de la description de la limite se ramène alors à trois problèmes *a priori* mieux posés : prouver qu'il y a effectivement convergence (en un sens à préciser), que le système est bien invariant par transformation conforme à la limite, et identifier la valeur du paramètre κ correspondant.

La majeure partie de cette thèse est consacrée à l'étude du processus SLE (en français, processus de Loewner stochastique ou processus de Schramm). Dans la suite de cette introduction, nous introduisons ce processus ainsi que certains objets discrets et continus dont les liens avec le SLE sont soit connus soit conjecturés ; puis nous présentons les résultats obtenus ainsi qu'une rapide description des outils mathématiques utilisés. Enfin nous donnons un plan général de la thèse et un résumé du contenu de chacun des chapitres.

2 Le mouvement brownien plan

2.1 Invariance conforme

Le cas le plus simple pour lequel on sait décrire une limite d'échelle continue est celui de la marche aléatoire simple. En effet, il est possible de prouver que, si l'on prend une marche aléatoire $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ de longueur n dans le réseau carré \mathbb{Z}^2 , issue de 0, et qu'on l'interpole par une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^2 en posant

$$S^n(t) = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n/2}},$$

alors la suite de fonctions $(S^n)_{n \geq 0}$ converge en loi, pour la topologie de Skorohod, vers un mouvement brownien plan $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ issu de 0 (*i.e.* le processus limite s'écrit $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ où (B_t^1) et (B_t^2) sont des mouvements browniens réels standards issus de 0).

C'est ici qu'un miracle se produit : la loi du mouvement brownien plan est invariante par rotation (alors que celle de la marche aléatoire ne l'est pas, puisque le réseau lui-même ne l'est pas). De plus, l'effet d'un changement d'échelle de facteur $\lambda > 0$ sur le mouvement brownien est le même que celui d'un changement de temps linéaire de facteur λ^2 — et la loi de la courbe à paramétrisation près est donc invariante. On est donc dans le cadre exact où l'on peut espérer l'invariance du processus par transformation conforme (en identifiant \mathbb{R}^2 au plan complexe \mathbb{C}). C'est effectivement ce qui se produit :

Théorème 1 (Invariance conforme du mouvement brownien plan) :

- (i). Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien plan issu de 0, et soit Φ une fonction entière telle que $\Phi(0) = 0$. Alors, il existe un mouvement brownien plan $(W_t)_{t \geq 0}$

issu de 0 tel que

$$\forall t \geq 0 \quad \Phi(B_t) = W_{\int_0^t |\Phi'(B_s)|^2 ds} ;$$

- (ii). Soient Ω et Ω' deux ouverts bornés simplement connexes de \mathbb{C} contenant 0, Φ une application conforme de Ω sur Ω' fixant 0 et (B_t) un mouvement brownien plan issu de 0. Soit τ (resp. τ') le premier temps de sortie de Ω (resp. Ω') par B . Alors,

$$\{\Phi(B_t), t \in [0, \tau]\} \stackrel{\text{(loi)}}{=} \{B_{t'}, t' \in [0, \tau']\}.$$

2.2 Points exceptionnels de la courbe brownienne

Il est alors naturel de s'intéresser à des propriétés géométriques de la courbe brownienne plane, en particulier à celles qui sont préservées par transformation conforme. Nous reviendrons plus tard à la description de la frontière brownienne, pour donner ici la description de quelques sous-ensembles particuliers de la trajectoire. Soient donc à nouveau Ω un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{C} contenant 0, et $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien plan; soit τ son premier temps de sortie de Ω . On notera $K = B_{[0, \tau]}$ la courbe décrite par B . K est un compact connexe de \mathbb{C} , et on sait qu'il est de dimension 2 et de mesure nulle.

Définition :

On dit que $B_t \in K$ est un *point de coupure* (resp. que $t \in [0, \tau]$ est un *temps de coupure*) de la trajectoire si $K \setminus \{B_t\}$ n'est pas connexe. (En particulier, 0 et τ ne sont pas des temps de coupure.)

Il est facile de voir que, pour tout temps $t \geq 0$ fixé, la probabilité que t soit un temps de coupure est égale à 0. Le théorème de Fubini nous dit alors que l'ensemble \mathcal{T} des temps de coupure est presque sûrement de mesure nulle (on parle d'un *ensemble exceptionnel*), et on peut se demander s'il est vide ou non.

Théorème 2 (Burdzy [1] ; Lawler-Schramm-Werner [9, 10, 11]) :

L'ensemble \mathcal{T} est presque sûrement non vide; sa dimension de Hausdorff est presque sûrement égale à $3/8$.

La preuve initiale du fait que \mathcal{T} soit non vide, due à Burdzy, est très technique et ne donne pas d'information sur la dimension de \mathcal{T} . Nous décrivons ici celle de Lawler, Schramm et Werner, car la méthode générale est proche de celle que nous employons pour calculer la dimension du processus de Schramm. L'idée, qui est due à Lawler, est de calculer d'abord la dimension de Hausdorff de l'ensemble \mathcal{T} , puis de constater qu'elle est strictement positive, ce qui implique en particulier que \mathcal{T} est non vide.

De manière générale, la détermination d'une borne supérieure pour la dimension d'un ensemble E (aléatoire ou non) est souvent plus facile que celle d'une minoration; en effet, il suffit d'exhiber, pour tout $\varepsilon > 0$, un recouvrement de E par au plus $\varepsilon^{-\alpha}$ disques de rayon ε pour prouver que la dimension de Minkowski (et donc aussi celle de Hausdorff) de E est au plus égale à α . Dans le cas où E est un compact aléatoire contenu dans le carré $[0, 1]^2$, on peut procéder de la façon suivante.

Supposons que, pour tous $x \in [0, 1]^2$ et $\varepsilon > 0$, on ait

$$(H_1) \quad P(E \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon) \neq \emptyset) \asymp \varepsilon^s$$

(où le signe \asymp signifie que le rapport des deux expressions est borné inférieurement et supérieurement par des constantes indépendantes de x et ε). Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut fixer un recouvrement du carré par au plus $42\varepsilon^{-2}$ disques de rayon ε ; chacun de ces disques rencontre E avec une probabilité de l'ordre de ε^s , et par conséquent l'espérance du nombre de ces disques qui rencontrent E est de l'ordre de ε^{s-2} .

Soit alors $N_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de disques de rayon ε nécessaires pour recouvrir E : si (H_1) est réalisée, on a donc, pour une certaine constante $C > 0$,

$$E(N_\varepsilon(E)) \leq C \cdot \varepsilon^{s-2}.$$

(En fait on pourrait, sous les mêmes hypothèses, obtenir aussi une borne inférieure du même ordre — mais nous n'en aurons pas besoin ici.) Par conséquent, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on obtient pour tout $\eta > 0$ l'estimation suivante :

$$P(N_\varepsilon(E) > \varepsilon^{s-2-\eta}) \leq C \cdot \varepsilon^\eta.$$

En choisissant alors une suite de rayons (ε_k) qui décroisse assez rapidement (par exemple $\varepsilon_k = 2^{-k}$), on peut alors appliquer le théorème de Borel-Cantelli : presque sûrement, pour k assez grand, il est possible de recouvrir E par au plus $\varepsilon_k^{s-2-\eta}$ disques de rayon ε_k , et par conséquent, la dimension de E est presque sûrement inférieure ou égale à $2 - s + \eta$.

Comme cela est vrai dès que $\eta > 0$, on obtient une borne supérieure de la forme

$$(H_1) \quad \Rightarrow \quad P(\dim_H(E) \leq 2 - s) = 1$$

ainsi qu'une bonne indication du fait que la dimension de E devrait être égale à $2 - s$.

Pour obtenir une borne inférieure, la seule méthode praticable est la construction d'une *mesure de Frostman* portée par E — *i.e.*, d'une mesure positive μ , de masse finie non nulle, telle que pour tous $x \in [0, 1]^2$ et $r > 0$, on ait

$$\mu(\mathcal{B}(x, r)) \leq C \cdot r^\alpha$$

pour une certaine constante $C > 0$ et un certain exposant α . En effet il est facile de voir que s'il existe une telle mesure de support inclus dans E , alors la dimension de Hausdorff de E est au moins égale à α .

L'idée est alors la suivante : on a une famille de mesures "naturelles" μ_ε définies par

$$d\mu_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-s} \mathbf{1}_{d(x, E) \leq \varepsilon} |dx|$$

(où $|dx|$ est la mesure de Lebesgue sur le carré), qui ont une masse d'ordre 1 par l'hypothèse (H_1) , et qui satisfont, pour tous $x \in [0, 1]^2$ et $r > 2\varepsilon$,

$$E(\mu_\varepsilon(\mathcal{B}(x, r)) | \mu_\varepsilon(\mathcal{B}(x, r)) > 0) \asymp \frac{E(\mu_\varepsilon(\mathcal{B}(x, r)))}{P(E \cap \mathcal{B}(x, r) \neq \emptyset)} \asymp \frac{r^2}{r^s} \asymp r^{2-s}.$$

Autrement dit, μ_ε se comporte en moyenne comme une mesure de Frostman d'exposant $2 - s$. Le but du jeu sera alors d'extraire de la famille (μ_ε) une sous-suite qui converge faiblement vers une mesure μ de masse totale positive, et de prouver que celle-ci est vraiment une mesure de Frostman portée par E .

Pour ce faire, on a besoin d'informations sur le comportement typique de μ_ε , connaissant son comportement moyen, autrement dit il nous faut une borne supérieure pour la variance de $\mu_\varepsilon(\mathcal{B}(x, r))$. Celle-ci sera fournie par une hypothèse sur les moments d'ordre deux de la loi de E ; plus précisément, si on a, pour tous x et y dans le carré et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(H_2) \quad P(E \cap \mathcal{B}(x, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ et } E \cap \mathcal{B}(y, \varepsilon) \neq \emptyset) \leq C \cdot \varepsilon^s \wedge C \cdot \frac{\varepsilon^{2s}}{|x - y|^s},$$

alors on peut prouver que la construction précédente peut être effectuée avec une probabilité positive :

$$(H_1, H_2) \quad \Rightarrow \quad P(\dim_H(E) = 2 - s) > 0.$$

On peut alors souvent obtenir un résultat presque sûr en appliquant une loi du zéro-un (souvent disponible puisque la définition de la dimension de Hausdorff est essentiellement locale).

Dans le cas des temps de coupure de la trajectoire brownienne, on doit en fait modifier légèrement la construction, en introduisant des temps de coupure approchés :

$$\mathcal{T}_\varepsilon \stackrel{\wedge}{=} \{t \in [0, \tau] : B_{[0, t-\varepsilon]} \cap B_{[t+\varepsilon, \tau]} = \emptyset\}.$$

L'hypothèse (H_1) est alors remplacée par une estimation de la probabilité que t soit dans \mathcal{T}_ε , mais le principe général de la preuve est le même. En particulier, la condition (H_2) est une conséquence directe de (H_1) et de la propriété de Markov, et donc il "suffit" de prouver que (H_1) est satisfaite et de calculer la valeur de s .

Par un retournement du temps en t , puis en appliquant le scaling brownien, on obtient une définition équivalente de s , qui est la suivante. Soient B^1 et B^2 deux mouvements browniens plans indépendants, issus respectivement de 1 et -1 (ou de points uniformément distribués sur le cercle-unité). On note T_R^1 (resp. T_R^2) le premier temps d'atteinte du cercle $\mathcal{C}(0, R)$ par B^1 (resp. B^2). Alors,

$$P\left(B_{[0, T_R^1]}^1 \cap B_{[0, T_R^2]}^2 = \emptyset\right) \asymp R^{-2s}$$

(le doublement de l'exposant étant dû au fait que les temps d'arrêt utilisés ici sont définis à partir de propriétés spatiales de la trajectoire; ils sont en effet de l'ordre de R^2). L'exposant $2s$ porte le nom d'*exposant d'intersection* brownien, et il est noté ailleurs $\xi(1, 1)$.

D'une manière générale, dans de nombreux modèles de mécanique statistique pris au point critique, la décroissance de certaines quantités (fonctions de corrélation, probabilités de certains événements) est également gouvernée par de tels exposants, dits *exposants critiques*. Au contraire, pour des systèmes en dehors du point critique, le comportement usuel de ces quantités présentera une décroissance exponentielle.

Il est possible, en utilisant un argument de sous-additivité, de prouver l'existence de s (la méthode est présentée dans le chapitre 2 de cette thèse dans un cas plus général); Lawler prouve alors dans [9] que l'on a effectivement, avec probabilité 1,

$$\dim_H(\mathcal{T}) = 1 - \frac{\xi(1, 1)}{2}.$$

Comme on peut montrer (cf. par exemple [18]) que s est strictement inférieur à 1 sans le calculer explicitement, cela prouve l'existence de points de coupure. Le calcul de la valeur exacte de l'exposant ($s = 5/8$ ici), et donc le calcul exact de la dimension de \mathcal{T} , repose sur les rapports entre le mouvement brownien plan et le processus SLE , que nous décrivons dans la prochaine section.

Par une méthode similaire, il est possible de relier la dimension de la frontière brownienne à la valeur d'un *exposant de déconnexion* η , défini de la façon suivante : soient toujours B^1 et B^2 deux mouvements browniens plans, on note $\Omega(t, t')$ l'unique composante connexe infinie du complémentaire de $B_{[0,t]}^1 \cup B_{[0,t']}^2$. Alors, pour un certain $\eta \in (0, 2)$, on a

$$P(0 \in \Omega(T_R^1, T_R^2)) \asymp R^{-\eta}$$

(*i.e.*, l'exposant η décrit la décroissance de la probabilité que les deux trajectoires ne séparent pas 0 de l'infini). On a alors une expression de la dimension de la frontière brownienne, elle aussi due à Lawler ([8]) :

$$\dim_H(\partial\Omega(1, 0)) = 2 - \eta.$$

Le calcul de η repose alors également sur les liens entre mouvement brownien et SLE , qu'il est donc temps de décrire.

3 Le processus de Loewner stochastique

3.1 Le théorème de Loewner

L'intuition qui conduit à la construction du SLE provient de l'étude de *courbes d'exploration* définies à partir d'un système de mécanique statistique. Par exemple, considérons un modèle de percolation critique par sites sur une discrétisation du demi-plan supérieur par le réseau triangulaire (ce qui revient à considérer un réseau hexagonal et à en colorier chacune des faces, de manière indépendante, en blanc ou en noir avec probabilité $1/2$ — cf. Fig. 1). Si l'on conditionne les hexagones situés le long de l'axe réel positif à être blancs et ceux situés le long de l'axe réel négatif à être noirs, ceci définit alors une frontière entre les clusters blancs touchant l'axe réel positif et les clusters noirs touchant l'axe réel négatifs (en gras sur la figure). Cette frontière est une courbe, dite courbe d'exploration de la frontière, et elle constitue un des objets pour lesquels on recherche une limite d'échelle.

On cherche alors un outil servant à décrire une courbe dans le demi-plan supérieur, issue de l'origine, et qui n'a pas de croisements (en un sens à préciser). Soit donc γ une fonction continue de \mathbb{R}_+ dans $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$. À chaque instant $t \geq 0$, le complémentaire de $\gamma([0, t])$ dans \mathbb{H} est un ouvert qui a exactement une composante connexe infinie, H_t ; on note K_t le *remplissage* de $\gamma([0, t])$, qui est défini comme étant l'adhérence de $\mathbb{H} \setminus H_t$. La condition de non-croisement peut alors s'écrire :

$$\forall 0 < s < t, \quad \gamma(t) \in \bar{H}_s$$

(ce qui signifie que la courbe après le temps s ne pénètre plus dans l'intérieur de K_s).

Pour tout $t \geq 0$, l'ouvert H_t est simplement connexe. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Riemann : il existe une unique application conforme g_t de H_t dans \mathbb{H} ayant

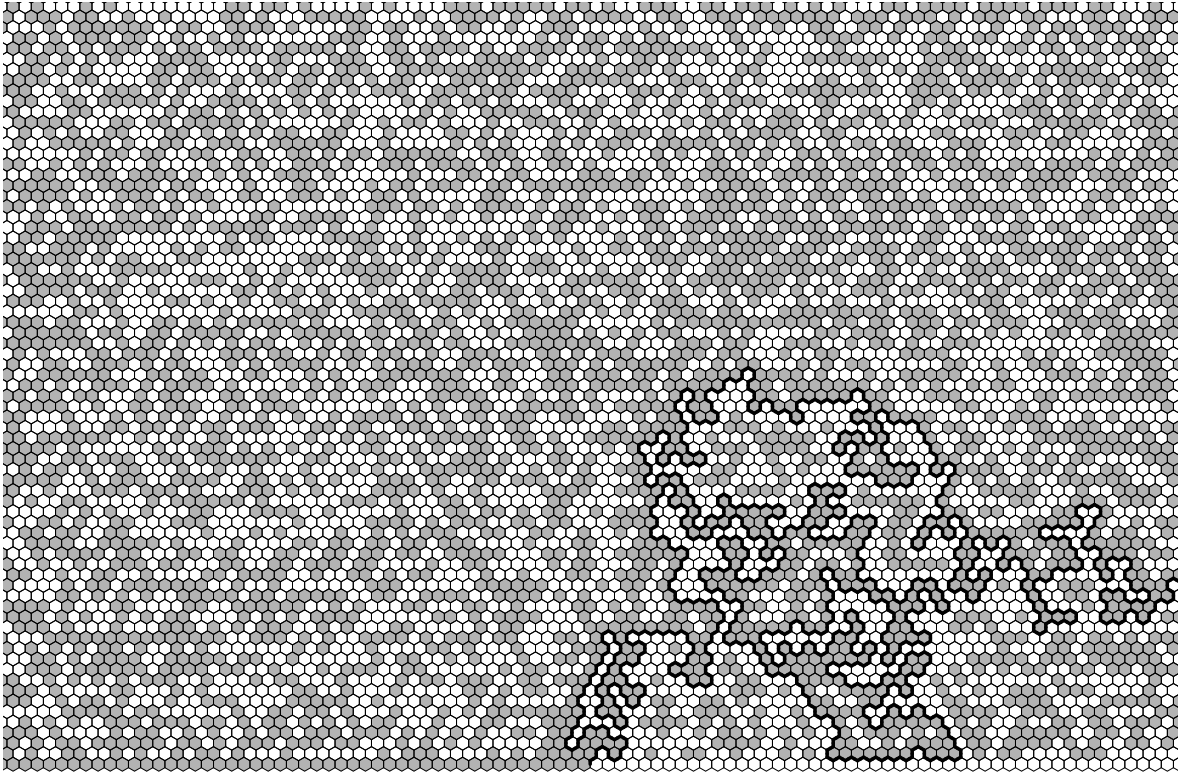


FIG. 1 – Exploration d'un modèle de percolation critique

un développement asymptotique à l'infini de la forme $g_t(z) = z + o(1)$. Le terme suivant du développement asymptotique est alors

$$g_t(z) = z + \frac{2a(t)}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}),$$

où a est une fonction continue croissante et positive ou nulle. Dans le cas où a est strictement croissante (ce qui se produit par exemple quand γ est une courbe simple), il est alors possible de faire un changement de temps de façon à avoir, pour tout $t \geq 0$, $a(t) = t$ — ce que nous supposerons dorénavant. Avec cette normalisation, la famille d'applications conformes $(g_t)_{t \geq 0}$ satisfait une équation différentielle dite *équation de Loewner dans le demi-plan* ; plus précisément on a le

Théorème 3 (Loewner) :

Il existe une fonction réelle continue $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\beta(0) = 0$, telle que (g_t) soit le flot de l'équation différentielle ordinaire dans le demi-plan supérieur :

$$(L_\beta) \quad y'(t) = \frac{2}{y(t) - \beta(t)}.$$

On dira que la courbe γ , ou la fonction β , engendre le flot (g_t) .

Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{H}$ on a $g_0(z) = z$, et pour tous z, t tels que l'équation (L_β) avec condition initiale $y(0) = z$ ait une solution jusqu'au temps t , on a

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \beta(t)}.$$

Le théorème de Loewner permet donc de décrire un objet bidimensionnel (une courbe dans le plan complexe) par deux fonctions réelles, l'une décrivant une paramétrisation naturelle de la courbe et l'autre décrivant la croissance de cette courbe suivant cette paramétrisation. La plupart du temps on ne s'intéresse en fait à γ qu'à paramétrisation près, et on aboutit alors à une description de la courbe par *une* fonction réelle.

On trouvera par exemple dans [4] un énoncé plus général du théorème de Loewner (où l'on part d'une famille croissante de compacts (K_t) satisfaisant une condition technique "naturelle" exprimant que la croissance est locale, mais sans supposer l'existence de γ) ainsi que sa preuve.

Remarque : Il est possible de généraliser la construction précédente à une courbe à l'intérieur d'un domaine simplement connexe de \mathbb{C} , pour décrire une courbe joignant deux points du bord du domaine, en envoyant ce domaine de manière conforme sur le demi-plan supérieur (les deux points marqués correspondant alors à 0 et ∞). La courbe peut alors être décrite par une fonction continue à valeurs dans le bord du domaine.

Il existe également une version *radiale* de l'équation de Loewner, décrivant une courbe joignant un point du bord d'un domaine à un point de l'intérieur (la version précédente est dite *chordale*). Dans le cas du disque unité \mathbb{U} , quand le point de l'intérieur est l'origine du plan complexe, l'équation différentielle devient alors

$$(L'_\beta) \quad y'(t) = y(t) \frac{y(t) + \beta(t)}{y(t) - \beta(t)},$$

avec $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \partial\mathbb{U}$, et toutes les applications conformes g_t admettent 0 comme point fixe.

3.2 Définition du processus SLE

Admettons pour l'instant que la courbe d'exploration de la percolation critique décrite plus haut admette une limite continue qui soit une courbe dans le demi-plan supérieur. On peut alors paramétrer cette courbe de manière naturelle, et il existe alors une fonction réelle continue (aléatoire) β qui lui est associée par l'équation de Loewner. L'hypothèse d'invariance conforme (cf. par exemple [7]) peut alors s'exprimer de la façon suivante : la courbe γ sur l'intervalle de temps $[t, +\infty]$, conditionnellement à $\gamma([0, t])$, a la même loi que l'image de la courbe dans le demi-plan par l'application conforme de \mathbb{H} dans H_t qui envoie 0 sur $\gamma(t)$.

Mais cette application n'est autre que $z \mapsto g_t^{-1}(z + \beta(t))$. Autrement dit, l'hypothèse d'invariance conforme entraîne naturellement la condition suivante :

$$g_{t+s} - \beta(t+s) \stackrel{(\text{loi})}{=} [g_t - \beta(t)] \circ [\tilde{g}_s - \tilde{\beta}(s)], \quad (1)$$

où la famille (\tilde{g}_s) est une copie indépendante de (g_t) et où $\tilde{\beta}$ est la fonction réelle associée à (\tilde{g}_s) . En considérant le développement asymptotique à l'infini de l'égalité précédente, on obtient

$$\beta(t+s) \stackrel{(\text{loi})}{=} \beta(t) + \tilde{\beta}(s),$$

ce qui implique que β est stationnaire à accroissements indépendants. Comme de plus on sait que β est continue, et que β et $-\beta$ ont même loi (puisque la situation discrète fournit

une courbe dont la loi est clairement symétrique), ceci est suffisant pour dire que β est un mouvement brownien réel, à un changement de temps linéaire près.

Ceci fournit une justification heuristique à la définition suivante :

Définition :

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard issu de 0, et soit κ un nombre réel positif fixé. On appelle *SLE chordal de paramètre κ dans \mathbb{H}* , ou *SLE $_{\kappa}$ dans \mathbb{H}* , le flot associé à l'équation différentielle de Loewner (L_{β}) avec $\beta(t) = \sqrt{\kappa}B_t$.

La condition (1) joue alors le rôle d'une propriété de Markov pour le processus *SLE*.

Remarque : De manière équivalente, on pourra aussi appeler *SLE* la famille croissante de compacts (K_t) associée à (g_t) .

Il est également possible de définir un *SLE radial* à partir de l'équation de Loewner radiale (L'_{β}) , en prenant pour $(\beta(t))$ un mouvement brownien sur le cercle-unité — *i.e.* en posant $\beta(t) = \exp(i\sqrt{\kappa}W_t)$ où (W_t) est un mouvement brownien réel standard. Nous nous concentrerons ici essentiellement sur la version chordale; les liens entre les deux versions sont profonds et encore mal compris (cf. [11]). En particulier, la plupart des propriétés géométriques du *SLE* chordal que nous décrivons par la suite sont vraies pour le *SLE* radial de même paramètre.

3.3 Quelques propriétés du *SLE*

Nous donnons ici sans démonstrations quelques propriétés géométriques satisfaites par le *SLE* chordal. Les preuves se trouvent essentiellement dans [15] pour $\kappa \neq 8$ et dans [12] pour $\kappa = 8$.

Proposition 1 (Existence de la trace) :

Soit $\kappa \geq 0$, et soit (g_t) un *SLE* chordal de paramètre κ . Avec probabilité 1 il existe une courbe continue sans croisements $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$ qui engendre le flot (g_t) , au sens du Théorème 3. Cette courbe est appelée *trace* du *SLE*.

Proposition 2 (Transitions de phase pour $\kappa = 4$ et $\kappa = 8$) :

Soit γ la trace d'un *SLE $_{\kappa}$* . Alors, presque sûrement :

- Si $0 \leq \kappa \leq 4$, la courbe γ est simple ;
- Si $4 < \kappa < 8$, la courbe γ a des points doubles mais elle est de mesure nulle ;
- Si $8 \leq \kappa$, la fonction γ est surjective de \mathbb{R}_+ sur $\bar{\mathbb{H}}$.

Ceci peut également se lire sur les compacts (K_t) associés à (g_t) : si $\kappa \leq 4$, alors $K_t = \gamma([0, t])$ est lui-même une courbe ; si $4 < \kappa < 8$, K_t est de mesure positive, et on a $\gamma([0, t]) \subsetneq K_t$, *i.e.* K_t est obtenu en prenant la réunion de $\gamma([0, t])$ et de toutes les composantes connexes bornées de son complémentaire (les “bulles” formées par la courbe) ; enfin si $8 \leq \kappa$ on a à nouveau $K_t = \gamma([0, t])$.

Le *SLE* a été introduit pour décrire les limites d'échelle de certains modèles de mécanique statistique en dimension 2 ; et de fait la convergence est connue dans un certain nombre de cas. (Toutes les convergences décrites ici sont en loi, dans un espace de courbes continues définies à paramétrisation près.)

Proposition 3 (Convergences vers le SLE) :

- (i). La courbe d’exploration de la percolation critique par sites sur le réseau triangulaire (décrite plus haut) converge vers la trace d’un SLE dans \mathbb{H} pour le paramètre $\kappa = 6$;
- (ii). La marche à boucles effacées tuée à son premier temps de sortie du disque unité (cf. [12]) converge vers un SLE radial dans \mathbb{U} pour le paramètre $\kappa = 2$;
- (iii). La courbe de Peano uniforme, *i.e.* la courbe d’exploration d’un arbre couvrant uniforme (cf. [12] aussi) converge vers la trace d’un SLE pour le paramètre $\kappa = 8$.

De plus, on conjecture (cf. [13]) que la marche auto-évitante uniforme de longueur infinie dans le demi-plan (à supposer qu’elle existe) converge vers un SLE de paramètre $\kappa = 8/3$.

Enfin, il existe un lien profond entre SLE et mouvement brownien plan. L’expression exacte de ce lien nécessite l’introduction de plusieurs notations — mais “moralement” la courbe du $SLE_{8/3}$, la frontière du SLE_6 et la frontière extérieure du mouvement brownien plan ont la même géométrie locale. En particulier, trois modèles discrets *a priori* très différents ont presque la même limite d’échelle : la marche aléatoire simple, la marche auto-évitante uniforme et la percolation critique. Ceci n’est en fait pas surprenant du point de vue de la physique, puisque tous trois sont dans la même *classe d’universalité*, celle des modèles de charge centrale nulle.

Le lien entre $SLE_{8/3}$ et SLE_6 est une instance d’une relation plus générale : on conjecture que, pour tout $\kappa \in (4, 8]$, la géométrie locale de la frontière d’un SLE_κ est la même que celle de la courbe d’un $SLE_{16/\kappa}$. Cela est connu pour $\kappa = 6$ et pour $\kappa = 8$ — dans ce dernier cas, la preuve passe par la convergence des modèles discrets associés, et on peut voir la dualité comme une conséquence de l’algorithme de Wilson.

4 Résultats obtenus et plan général

4.1 Sur le mouvement brownien plan

Le chapitre 2 de cette thèse est largement indépendant des autres, il est consacré à l’étude de certains points exceptionnels sur la trajectoire d’un mouvement brownien plan, qui sont une généralisation de la notion de point de coupure. Pour $\alpha > 0$, on dit qu’un point B_t de la trajectoire brownienne $(B_s)_{s \in [0,1]}$ est un *point pivot d’angle α* si l’on a, pour tout $\theta \in [-\alpha/2, \alpha/2]$,

$$\left[B_{[0,t]} - B_t \right] \cap e^{i\theta} \left[B_{(t,1]} - B_t \right] = \emptyset.$$

Autrement dit, B_t est un point de coupure de la trajectoire, et l’image de l’une des deux moitiés par une rotation d’angle θ autour de B_t reste disjointe de l’autre moitié tant que $\theta \in [-\alpha/2, \alpha/2]$. (Cf. Fig. 2 pour une image dans le cas $\alpha = \pi/2$.)

On prouve alors le résultat suivant :

Théorème 4 :

Pour tout $\alpha > 0$ suffisamment petit, il existe presque sûrement sur la courbe brownienne plane des point pivots d’angle α , et ceux-ci forment un ensemble de

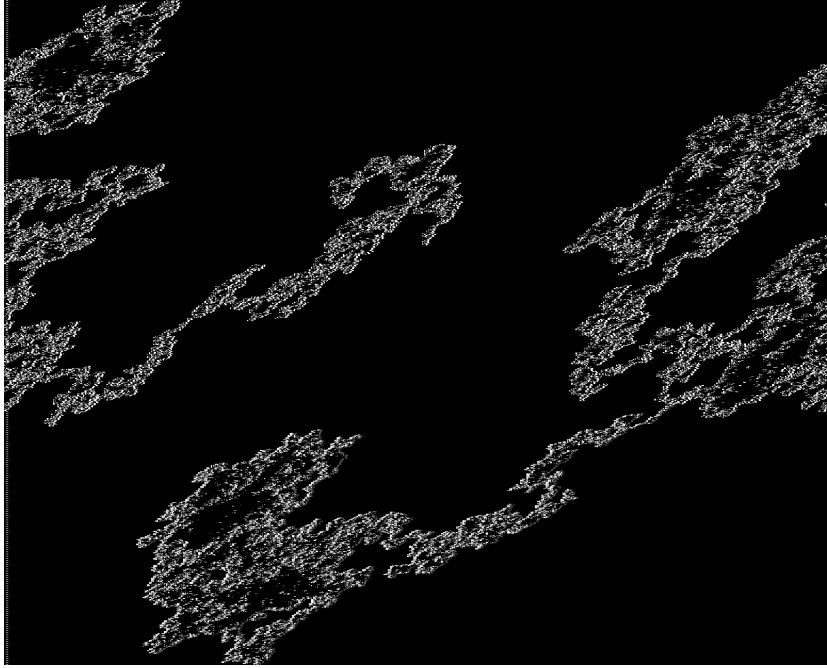


FIG. 2 – Un point pivot d’angle $\pi/2$
 (En gris : l’image d’une moitié de la trajectoire par une rotation d’angle $+\pi/2$.)

dimension de Hausdorff strictement positive.

Si α_0 désigne le plus grand angle pour lequel de tels points existent, alors on a

$$\alpha_0 \geq \frac{(\log 2)^2}{2\pi}.$$

Il semble que l’angle limite soit plutôt de l’ordre de $3\pi/4$, donc beaucoup plus grand que la borne obtenue de manière rigoureuse ici. La méthode générale est similaire à celle présentée plus haut dans le cas des points pivots, avec plusieurs complications techniques essentiellement dues au fait que le centre de la rotation qui intervient dans la définition est lui-même aléatoire.

On prouve en fait l’existence, pour tout α , d’un exposant d’intersection généralisé $\xi(\alpha)$, défini de la façon suivante. Soient (B_t^1) et (B_t^2) deux mouvements browniens plans, issus de -1 et $+1$ respectivement, et soit T_R^1 (resp. T_R^2) le premier temps d’atteinte du cercle $\mathcal{C}(0, R)$ par B^1 (resp. B^2). Par un argument assez technique on prouve que la probabilité

$$p_R \stackrel{\wedge}{=} P \left[B_{[0, T_R^1]}^1 \cap \bigcup_{|\theta| \leq \alpha} e^{i\theta} B_{[0, T_R^2]}^2 = \emptyset \right]$$

satisfait une relation de sous-multiplicativité “dans les deux sens”, de la forme

$$c_- p_R p_{R'} \leq p_{RR'} \leq c_+ p_R p_{R'}$$

avec $0 < c_- < c_+ < \infty$. Il existe par conséquent un exposant $\xi(\alpha)$ décrivant la décroissance de p_R quand R tend vers $+\infty$, *i.e.* défini par

$$p_R \asymp R^{-\xi(\alpha)}.$$

On a alors à prouver que $\xi(\alpha)$ dépend de α de manière continue, et à utiliser ceci à deux reprises par la suite :

- Pour prouver que la dimension de l'ensemble des points pivots d'angle α est égale à $2 - \xi(\alpha)$ (c'est la continuité de ξ qui permet de prendre en compte l'aspect aléatoire du centre de rotation) ;
- Pour prouver que $\xi(\alpha)$ est strictement inférieur à 2 pour α assez petit, en effet l'exposant $\xi(0)$ est l'exposant d'intersection pour deux mouvements browniens plans, noté ailleurs $\xi(1, 1)$, et on sait (cf. [11]) qu'il est égal à $5/4$.

Puisqu'un point pivot est nécessairement sur la frontière extérieure de la trajectoire, et que l'on sait que la frontière brownienne est étroitement reliée à celle du SLE_6 et à la trajectoire du $SLE_{8/3}$, les résultats de ce chapitre s'appliquent également à ces deux objets ainsi qu'aux modèles discrets associés. En particulier, si on admet la convergence de la marche auto-évitante vers le $SLE_{8/3}$ et le fait que $\alpha_0 > \pi/2$, on a prouvé l'existence de "beaucoup" de points pivots d'angle $\pi/2$ (donc visibles au niveau discret) sur une marche auto-évitante typique.

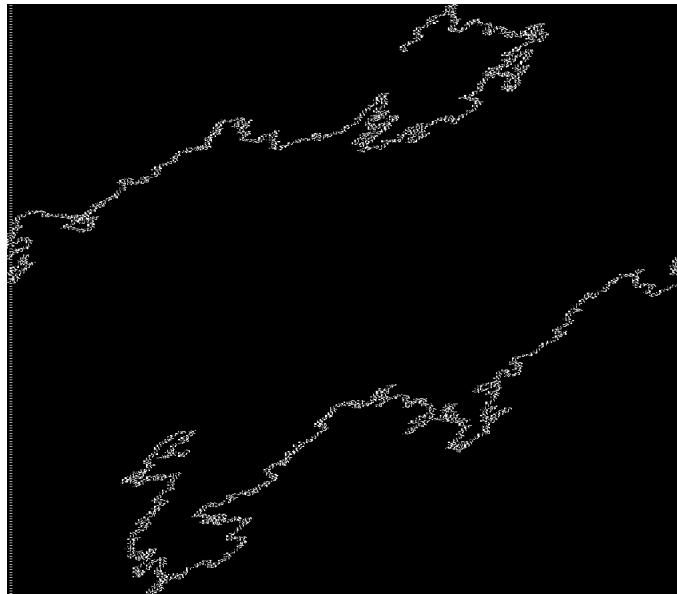


FIG. 3 – Une marche auto-évitante uniforme (obtenue par la méthode du pivot)

Cela donne alors des informations sur l'*algorithme du pivot*, qui est le seul algorithme efficace pour simuler une telle marche auto-évitante. Il s'agit d'un algorithme de Monte-Carlo, où l'on procède de la manière suivante. On part d'un chemin simple $(\omega_k)_{0 \leq k \leq n}$ quelconque dans \mathbb{Z}^2 , et à chaque étape on choisit un point ω_k uniformément sur ce chemin et un angle α uniformément dans $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. Si, après rotation de $\{\omega_k, \dots, \omega_n\}$ d'un angle α autour de ω_k , le chemin obtenu est encore simple, on le garde, et sinon on annule la rotation.

On obtient ainsi une chaîne de Markov dans l'espace Ω_n des chemins simples de longueur n dans \mathbb{Z}^2 . Il est facile de voir que la mesure uniforme sur Ω_n est réversible pour cette chaîne de Markov ; il n'est *pas* facile de voir que la chaîne est irréductible (et en fait

elle ne l'est pas si on exclut la rotation d'angle π — cf. [14]) mais c'est bien le cas. Par conséquent il y a convergence en loi vers la mesure uniforme. C'est ainsi que la figure 3 a été obtenue.

Le fait qu'il y ait “beaucoup” de pivots sur la courbe (de l'ordre d'une puissance de n) dit alors que la vitesse de convergence de la chaîne est assez rapide ; inversement, les estimations de la vitesse de l'algorithme présentées dans [14] suggèrent qu'on a effectivement $\alpha_0 > \pi/2$ — ce qui est d'ailleurs cohérent avec les simulations présentées à la fin du chapitre 2.

4.2 Sur le processus de Schramm

Le principal résultat obtenu ici sur le processus SLE concerne la dimension de Hausdorff de la courbe γ . On prouve en effet le théorème suivant :

Théorème 5 :

Soit γ la trace d'un SLE_κ avec $\kappa \geq 0$, $\kappa \neq 4$. Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de l'image $\gamma(\mathbb{R}_+)$ de la courbe est égale à

$$\dim_H \gamma(\mathbb{R}_+) = \left(1 + \frac{\kappa}{8}\right) \wedge 2.$$

On calcule également la dimension du bord du compact K_t dans certains cas :

Théorème 6 :

Soit (K_t) un SLE_κ avec $\kappa \in \{6, 8\}$. Alors pour tout $t > 0$, presque sûrement, la dimension de Hausdorff du bord de K_t est égale à

$$\dim_H \partial K_t = 1 + \frac{2}{\kappa}.$$

Dans le chapitre 3, nous étudions plus particulièrement le cas du processus de Schramm pour le paramètre $\kappa = 6$. Dans ce cas les preuves des conditions (H_1) et (H_2) (énoncées plus haut) dans le cas de la trace — et donc aussi la preuve du théorème 5 — sont rendues plus faciles par deux propriétés spécifiques au SLE_6 , que nous décrivons ici rapidement.

- *L'équivalence entre SLE_6 radial et SLE_6 chordal* : tant que γ ne sépare pas un point marqué de l'intérieur du domaine d'un point marqué sur le bord du domaine, les deux versions correspondantes du SLE_6 ont même loi à changement de temps près. Ceci permet de réécrire l'événement présent dans la condition (H_1) (toucher une boule de centre x et de rayon ε) comme portant sur un SLE radial croissant en direction de x . La probabilité de l'événement peut alors s'interpréter comme probabilité de survie pour une diffusion dans un intervalle, ce qui se ramène à une détermination de la valeur propre principale du générateur associé.

- *La propriété de localité du SLE_6* : elle exprime en substance que la croissance de (K_t) au temps t dans le cas $\kappa = 6$ ne dépend pas de la forme globale du domaine mais seulement de sa géométrie locale au voisinage de $\gamma(t)$. Cela permet de dire que les deux événements définissant (H_2) (toucher respectivement $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ et $\mathcal{B}(y, \varepsilon)$) sont “moralement indépendants”, ce qui permet de voir la condition (H_2) comme conséquence de la condition (H_1) .

Puis nous appliquons les mêmes propriétés du processus SLE_6 pour obtenir directement la dimension du bord de K_t dans ce cas. On a toujours $(H_1) \Rightarrow (H_2)$ par localité,

mais le calcul de l'exposant s décrivant la probabilité de toucher un disque de rayon ε est ici plus problématique. On est en fait amené à étudier un problème annexe portant sur une diffusion réelle dans un intervalle, qui est assez naturel dans le cadre présenté ici mais ne semble pas avoir été traité indépendamment.

Le problème est le suivant. Soit (X_t) la diffusion sur $(-1, 1)$ définie par

$$(D) \quad dX_t = \sigma dB_t + f(X_t)dt,$$

avec $\sigma > 0$ et $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ qui fasse de chaque extrémité de l'intervalle une frontière absorbante pour X , et satisfasse quelques conditions de régularité (une liste est donnée dans la section ??, mais elle est loin d'être optimale). Cette diffusion définit un flot (g_t) , *i.e.* pour tout $t > 0$ l'application g_t est un difféomorphisme d'une partie I_t de I sur une partie J_t de I , de sorte que pour tout $x \in I$, $(g_t(x))$ soit une solution forte de (D) issue de x .

L'estimée usuelle porte sur la probabilité de survie en temps long ; on prouve de manière générale que $P(0 \in I_t)$ décroît exponentiellement vite,

$$P(0 \in I_t) \asymp e^{-\lambda t}$$

où $-\lambda$ est la valeur propre principale du générateur de la diffusion. On prouve également, en utilisant la formule de Feynman-Kac, que pour tout $b > 0$,

$$E((g'_t(0))^b) \asymp e^{-\lambda(b)t}$$

où cette fois $-\lambda(b)$ est la valeur propre principale de l'opérateur

$$\mathcal{L}_b : h \mapsto \frac{\sigma^2}{2}h'' + f(x)h' - bf'h$$

(de sorte que $\lambda(0) = \lambda$). On s'intéresse alors à l'image $J_t = g_t(I_t)$ du flot au temps t . Sa longueur l_t est égale à l'intégrale de g'_t le long de I_t , donc on peut utiliser l'inégalité de Jensen pour relier $E(l_t^b)$ à $E(g'_t(x)^b)$ (on obtient soit une majoration, soit une minoration suivant que b est inférieur ou supérieur à 1). En fait, on prouve ici le résultat plus fort suivant :

Proposition 4 :

Pour tout $b > 0$, on a l'estimation suivante quand t tend vers $+\infty$:

$$E(l_t^b) \asymp \exp(-\lambda(b).t).$$

La même diffusion que pour le cas de la trace γ , étudiée sous cet angle avec $b = 1/3$, fournit en fait l'exposant $\lambda(b) = 2/3$ qui permet d'obtenir la condition (H_1) dans le cas du bord d'un SLE_6 . On obtient ainsi une preuve plus directe du fait, conjecturé par Mandelbrot et prouvé par Lawler, Schramm et Werner, que la dimension de la frontière brownienne (qui est égale à celle du bord d'un SLE_6) est presque sûrement égale à $4/3$ — en particulier, on n'utilise pas ici les exposants d'intersection browniens.

Il existe un autre cas où la condition (H_1) implique la condition (H_2) , celui de certains ensembles de temps exceptionnels. En effet, la propriété de Markov permet souvent de montrer que les deux événements définissant (H_2) sont vraiment indépendants, ce qui donne une estimation du bon ordre. Nous utilisons cette approche dans deux cas où les

temps considérés ont une interprétation géométrique sur la courbe. Si γ est la trace d'un SLE_κ , on dit que t est un *temps de frontière* pour γ si $\gamma(t) \in \partial K_1$, et que t est un *temps de coupure* pour γ si $K_1 \setminus \{\gamma(t)\}$ n'est pas connexe.

Théorème 7 :

Soit γ la trace d'un SLE_κ ; soient \mathcal{D} l'ensemble de ses temps de frontière \mathcal{T} l'ensemble de ses temps de coupure. Alors, presque sûrement,

$$\dim_H(\mathcal{D}) = \frac{4 + \kappa}{2\kappa} \wedge 1 \quad \text{et} \quad \dim_H(\mathcal{T}) = \left[\frac{8 - \kappa}{4} \wedge 1 \right] \vee 0.$$

En particulier, si $\kappa < 8$, \mathcal{T} est non vide, ce qui prouve que K_1 a presque sûrement des points de coupure.

Une question naturelle est alors la suivante : étant donné un ensemble de temps $A \subset \mathbb{R}$ borélien, aléatoire ou non, progressivement mesurable ou non *a fortiori*, y a-t-il une relation simple entre $\dim_H A$ et $\dim_H \gamma(A)$? Dans le cas du mouvement brownien plan, on sait qu'une telle relation existe, et que la dimension de l'image est le double de celle de A (cf. [6]). Dans le cas du SLE , il semble qu'il n'existe pas en général de telle relation, car le comportement métrique de γ au temps t dépend fortement de la géométrie de K_t .

Il y a cependant un cas où ce problème ne se pose plus, celui où l'ensemble A est *markovien*, au sens suivant : pour tout t , l'ensemble $A \cap [t, \infty)$ est indépendant de $\sigma(\gamma(s), s \leq t)$ et a même loi que $\{a + t, a \in A\}$. Dans ce cas, et pour $\kappa = 6$, la méthode décrite dans le chapitre 3 pour le calcul de la dimension du bord donne une bonne motivation pour la conjecture suivante :

$$\dim_H(\gamma(A)) = \frac{7 + 8 \dim_H(A) - \sqrt{49 - 48 \dim_H(A)}}{8};$$

avec les notations précédentes, cela revient à un calcul explicite de $\lambda(b)$ où b serait l'exposant permettant de déterminer $\dim_H A$, *i.e.* :

$$\dim_H(\gamma(A)) = 2 - \lambda(1 - \dim_H(A)).$$

Dans le chapitre 4, nous achevons la preuve des théorèmes 5 et 6 dans le cas (presque) général $\kappa \neq 4$. Tout ce qui facilitait la preuve dans le cas précédent ($\kappa = 6$) devient faux, et en particulier (H_2) n'est plus une conséquence directe de (H_1) . En fait, deux preuves séparées de (H_2) sont nécessaires, suivant que κ est dans $(0, 4)$ ou dans $(4, 8)$ (notons qu'il n'y a rien à démontrer dans le cas $\kappa \geq 8$ puisqu'alors γ est une courbe de Peano, donc de mesure pleine, et donc de dimension 2).

Dans le dernier cas ($\kappa = 4$) il n'est pas clair que (H_2) soit vraie. Ceci peut être interprété en termes de propriétés métriques de l'application conforme g_t : on sait en effet (cf. [15]) que celle-ci est höldérienne si et seulement si $\kappa \neq 4$, et il est possible de relier cela à des propriétés géométriques du bord de K_t (absence de "fjords" arbitrairement profonds) qui rappellent fortement les estimées servant à prouver (H_2) . On trouvera en appendice une discussion plus formelle de ce lien, qui suggère l'existence d'une preuve plus simple du théorème 5 — au moins dans le cas $\kappa < 4$.

Au passage, le cas $\kappa = 8/3$ est particulièrement intéressant : on obtient en effet directement la dimension $4/3$ du $SLE_{8/3}$, sans passer ni par le SLE_6 ni par les exposants

browniens. On peut alors en déduire une troisième preuve, plus directe que les deux précédentes, du fait que la frontière brownienne est presque sûrement de dimension $4/3$.

Dans le chapitre 5, nous étudions le problème de la généralisation du SLE au cas d'un domaine non simplement connexe. Cela pose problème puisque la définition du processus initial repose sur le théorème de Riemann — et donc sur l'existence d'un domaine de référence (le demi-plan supérieur, le disque-unité) qui pour tout t sera l'image de g_t . Cela permet alors d'exprimer la propriété de Markov du SLE de manière naturelle, et d'obtenir le résultat d'*universalité* au sens où la famille des processus obtenus est d'écrite par un seul paramètre réel κ , qui joue le même rôle que la charge centrale dans le formalisme des théories de champs conformes.

Nous montrons que quand le domaine Ω considéré est un ouvert multiplement connexe, il existe un analogue du processus de Schramm dans les cas $\kappa = 8/3$ et $\kappa = 6$. La construction utilise dans chacun des cas une propriété spécifique du processus correspondant dans un domaine simplement connexe (respectivement, la propriété de *restriction* et la propriété de *localité*).

Dans le premier cas, le processus est simplement un $SLE_{8/3}$ usuel dans le domaine obtenu en “remplissant les trous” de Ω , conditionné à rester dans Ω . La propriété de restriction montre alors que la courbe obtenue satisfait une propriété markovienne similaire à celle du SLE . Dans le second cas, on considère un SLE_6 dans le domaine rempli, jusqu'au premier instant τ (qui est fini presque sûrement) où K_t n'est plus contenu dans $\bar{\Omega}$ et on le prolonge par un SLE dans $\Omega \setminus K_\tau$. La propriété de localité permet de prouver qu'on a également une propriété markovienne dans ce cas.

Il est à noter toutefois que ces deux processus sont “artificiels” puisqu'ils nécessitent de considérer le domaine rempli (ils ne sont par définis de manière intrinsèque). En fait, dans le cas où Ω a la topologie d'un anneau, la famille des lois de courbes aléatoires, entre deux points de la même composante de $\partial\Omega$, satisfaisant la propriété de restriction, conserve un degré de liberté (alors qu'elle est réduite à $SLE_{8/3}$ dans le cas simplement connexe) : on n'a plus d'universalité dans ce cas.

Il est possible d'adapter la preuve de Smirnov ([17]) au cas d'un domaine non simplement connexe, et de prouver que la trace du SLE_6 généralisé est encore la limite d'échelle d'un modèle de percolation critique sur le domaine (avec les conditions au bord idoines le long des “trous” du domaine). Toutefois le problème de Dirichlet-Neumann qui apparaît dans la preuve n'est pas bien posé, puisque l'on peut fixer arbitrairement la valeur de la solution le long des trous — ce qui correspond encore une fois à un *défaut d'universalité* dans le cas des domaines non simplement connexes : la géométrie locale du modèle à la limite (ou, ce qui est équivalent par le théorème 5, sa charge centrale) ne détermine plus entièrement la loi de la limite d'échelle et on doit prendre en compte des paramètres globaux comme (la loi de) la classe d'homotopie de γ .

Nous décrivons dans ce même chapitre le comportement de SLE_κ quand le paramètre tend vers 0 ou vers $+\infty$. Dans le premier cas, la courbe $\gamma([0, 1])$ converge (pour la topologie de Hausdorff) vers celle d'un SLE_0 , qui est une courbe déterministe — un segment vertical dans le cas du demi-plan supérieur, une géodésique pour la géométrie hyperbolique dans le cas général — et si on la renormalise convenablement, on obtient à la limite une courbe

d'équation $x = f(y)$, où f est la convolution de la fonction qui conduit le SLE avec un noyau déterministe que nous explicitons.

Le cas $\kappa \rightarrow \infty$ est plus intéressant. On doit alors renormaliser K_1 par un facteur $\sqrt{\kappa}$ dans la direction verticale, et par un facteur $1/\sqrt{\kappa}$ dans la direction horizontale. Le compact renormalisé converge alors, toujours dans la topologie de Hausdorff, vers l'hypographe du temps local du mouvement brownien réel qui conduit K . Plus précisément, si (L_t^x) est une version bicontinue de ce temps local, le compact limite est

$$\tilde{K} = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, 0 < L_1^x, 0 \leq y \leq 2\pi L_1^x\}.$$

Ceci relie la trace du SLE quand κ tend vers $+\infty$ à la courbe de Peano du temps local, définie par

$$\tilde{\gamma}(t) = B_t + 2\pi i \cdot L_t^{B_t}$$

(qui est bien une courbe continue surjective car L est bicontinu). Il est probable (mais pas encore démontré) que la trace γ du SLE converge en loi vers $\tilde{\gamma}$.

On présente également un objet amusant qui est une version discrète du SLE (ou plus exactement un SLE conduit par un processus discret, plus précisément par une interpolation constante par morceaux de la marche aléatoire simple dans \mathbb{Z}), et qui converge vers le SLE quand le pas de discrétisation tend vers 0. Ce “ SLE discret” présente lui aussi une transition de phase (ou du moins un changement d'aspect) pour le paramètre $\kappa = 4$, qui semble similaire à la transition de phase du SLE usuel : on passe de “quelque chose qui ressemble à une courbe simple” à “quelque chose qui ne ressemble pas à une courbe simple”.

Cet aspect de la géométrie de l'objet discret ne suffit pas à obtenir la transition de l'objet continu — ce qui est bien dommage, car l'idée d'obtenir des informations topologiques sur K_t à partir de propriétés algébriques issues du cadre discret était plutôt attirante. Toutefois, une telle reconstruction du SLE à partir de la composition aléatoire de déformations infinitésimales simples (ici de la forme $\sqrt{z^2 + 4\varepsilon}$) pourrait être plus facile à généraliser.

L'annexe A regroupe les preuves de quelques résultats techniques ainsi que deux lemmes sur les domaines höldériens qui pourraient constituer une part significative de la “vraie preuve” du résultat du chapitre 4 — mais qui ne sont pas utilisés dans cette thèse.

Enfin, l'annexe B contient la description d'un algorithme de simulation du SLE et les images obtenues pour différentes valeurs de κ , ainsi que le code source du programme utilisé et quelques images des processus discrets associés (marche à boucles effacées, marche auto-évitante uniforme, et différents clusters de percolation critique).

Références

- [1] K. BURDZY, *Cut points on Brownian paths*, Ann. Probab., 17 (1989), pp. 1012–1036.
- [2] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER, AND B. ROULET, *Éléments de Physique Statistique*, Hermann, 1989.
- [3] B. DUPLANTIER, *Conformally invariant fractals and potential theory*, Phys. Rev. Lett., 84 (2000), pp. 1363–1367.
- [4] P. L. DUREN, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, 1983.
- [5] K. GAWĘDZKI, *Lectures on conformal field theory*.
- [6] R. KAUFMAN, *Une propriété métrique du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci., A 268 (1969), pp. 727–728.
- [7] R. LANGLANDS, Y. POUILLOT, AND Y. SAINT-AUBIN, *Conformal invariance in two-dimensional percolation*, Bulletin of the A.M.S., 30 (1994).
- [8] G. F. LAWLER, *The dimension of the frontier of planar Brownian motion*, Elect. Comm. in Probab., 1 (1996), pp. 29–47.
- [9] ———, *Hausdorff dimension of cut points for Brownian motion*, Electronic Journal of Probability, 1 (1996), pp. 1–20.
- [10] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM, AND W. WERNER, *Values of Brownian intersection exponents I : Half-plane exponents*, Acta Mathematica, 187 (2001), pp. 237–273.
- [11] ———, *Values of Brownian intersection exponents II : Plane exponents*, Acta Mathematica, 187 (2001), pp. 275–308.
- [12] ———, *Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Preprint, arXiv :math.PR/0112234, (2002).
- [13] ———, *On the scaling limit of planar self-avoiding walks*, Preprint, arXiv :math.PR/0204277, (2002).
- [14] N. MADRAS AND A. D. SOKAL, *The pivot algorithm : A highly efficient Monte-Carlo method for the self-avoiding walk*, Journal of Statistical Physics, 50 (1988), pp. 109–186.
- [15] S. ROHDE AND O. SCHRAMM, *Basic properties of SLE*, Preprint, arXiv :math.PR/0106036, (2001).
- [16] O. SCHRAMM, *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel Journal of Mathematics, 118 (2000), pp. 221–288.
- [17] S. SMIRNOV, *Critical percolation in the plane : Conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 333 (2001), pp. 239–244.
- [18] W. WERNER, *On Brownian disconnection exponents*, Bernoulli, 1 (1995), pp. 371–380.