T.D. 2
Cinématique des fluides

1 Écoulement 2D stationnaire

On étudie l'écoulement décrit par le champ de vitesses suivant :

$$\overrightarrow{v} = \omega_0\, y\, \overrightarrow{e_x} + \omega_0\, x\, \overrightarrow{e_y}$$

1) Vérifier que cet écoulement est incompressible et irrotationnel.

2) Trouver la forme des lignes de courant.

3) Déterminer l'équation de la trajectoire d'une particule présente en $M_0(x_0, y_0)$ à l'instant $t = 0$. Vérifier qu'elle coïncide avec une ligne de courant.

4) À partir de l'équation de la trajectoire, calculer l'accélération de la particule de fluide au temps t.

5) Calculer la dérivée particulaire de la vitesse $\partial_t \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v}$ et comparer.

2 Écoulement oscillant

On considère l'écoulement bidimensionnel et instationnaire suivant :

$$\overrightarrow{v}(x, y, t) = v_0 \cos\omega t\, \overrightarrow{e_x} + v_0\, \overrightarrow{e_y}$$

1) Montrer que cet écoulement est incompressible et irrotationnel.

2) Calculer la fonction courant et tracer les lignes de courant aux instants $\omega t = 0, \omega t = \pi/2$ et $\omega t = \pi$.

3) Déterminer l'équation de la trajectoire d'une particule issue du point $(0, 0)$ à l'instant t_0.

4) Déterminer l'équation de la ligne d'émission partant du point $(0, 0)$.

3 Fonction courant

On étudie les écoulements stationnaires dans le plan Oxy décrits par une fonction courant de la forme

$$\psi(x, y) = a\, x^2 + b\, y^2 \qquad \text{avec} \qquad a \quad \text{et} \quad b \text{ des constantes}$$

1) Calculer les composantes du champ de vitesses.

2) Vérifier que l'écoulement est incompressible.

3) Montrer que le long d'une ligne de courant, $\psi = C^{\text{te}}$.

4) Tracer les lignes de courant dans les cas particuliers $a = 0$, $a = -b$ et $a = b$.

5) Montrer que dans le cas général (a et b quelconques), l'écoulement peut être décrit comme la somme de deux de ces cas particuliers.

4 Modèle de tornade

On décrit une tornade de rayon a par un écoulement incompressible à symétrie cylindrique autour de l'axe Oz. Le champ de vitesses est de la forme

$$\overrightarrow{v} = v_\theta(r)\,\overrightarrow{e_\theta}$$

La vorticité est uniforme dans la tornade, nulle en dehors :

$$\overrightarrow{\Omega} = \begin{cases} \Omega_0\,\overrightarrow{e_z} & \text{pour} \quad r \leqslant a \\ \overrightarrow{0} & \text{pour} \quad r > a \end{cases}$$

1) Établir le profil de vitesse orthoradiale $v_\theta(r)$. À quelle distance du centre de la tornade cette vitesse est-elle maximale ?

N.B. On pourra utiliser le théorème de Stokes :

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

ou l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\overrightarrow{e_z}$$

2) Calculer le potentiel de l'écoulement à l'extérieur du coeur ($r > a$). Quelle est la forme des équipotentielles ?

3) Montrer que l'accélération particulaire (toujours à l'extérieur) peut s'exprimer sous la forme

$$\overrightarrow{a} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{2}\Omega^2 r^2\right)$$

4) À l'intérieur de la tornade, trouver $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{A}$.

5 Bulle en expansion

On considère au milieu d'un fluide une bulle sphérique en expansion, dont on note le rayon $R(t)$. L'écoulement engendré dans le fluide, supposé parfait et incompressible, est de la forme $\overrightarrow{v}(M,t) = v(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques.

1) En utilisant l'équation de la conservation de la masse, exprimer le profil de vitesses $v(r,t)$ en fonction de $R(t)$ et $\dot{R}(t)$.

2) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide située en M.

6 Écoulement autour d'un cylindre immobile

On étudie l'écoulement stationnaire et irrotationnel dans le plan Oxy d'un fluide parfait incompressible, autour d'un cylindre fixe de rayon R, d'axe Oz et de hauteur supposée infinie. Loin du cylindre, la vitesse est uniforme : $\overrightarrow{v_0}(x,y) = v_0\,\overrightarrow{e_x}$. On peut décrire l'influence du cylindre sur le champ de vitesses par l'ajout d'une perturbation :

$$\overrightarrow{v}(x,y) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_1}(x,y)$$

1) Trouver deux relations satisfaites par les composantes v_x et v_y du champ de vitesses.

2) On définit le potentiel des vitesses ϕ par $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$. Montrer que ϕ vérifie l'équation de Laplace : $\Delta\phi = 0$.

3) On se place en coordonnées cylindriques. Calculer ϕ_0 et montrer que $\Delta\phi_1 = 0$.

4) Le laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Écrire l'équation vérifiée par f et g. Multiplier par $r^2/(fg)$ et en déduire que $\dfrac{g''(\theta)}{g} = C^{\text{te}} = \lambda$.

5) On prendra $\lambda = 1$. Calculer $g(\theta)$ et montrer que cette solution est compatible avec la condition sur la vitesse $\overrightarrow{v}$ le long du cylindre (en $r = R$).

6) Chercher des solutions pour f de la forme $f(r) = Ar^n$ avec n une puissance entière. Éliminer l'une des deux.

7) Déduire des conditions aux limites la constante d'intégration, et exprimer le potentiel des vitesses. Montrer que

$$\begin{cases} v_r = v_0 \cos\theta \left(1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right) \\ v_\theta = -v_0 \sin\theta \left(1 + \dfrac{R^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

8) À quelle distance de l'origine peut-on estimer que la vitesse du fluide selon Ox est uniforme (à 1% près) ?

9) Établir l'équation des lignes de courant autour du cylindre.