T.D. 3

Écoulements de fluides parfaits

1 Écoulement autour d'un cylindre immobile

On étudie l'écoulement stationnaire et irrotationnel dans le plan Oxy d'un fluide parfait incompressible, autour d'un cylindre fixe de rayon R, d'axe Oz et de hauteur supposée infinie. Loin du cylindre, la vitesse est uniforme : $\overrightarrow{v_0}(x, y) = v_0\,\overrightarrow{e_x}$. On peut décrire l'influence du cylindre sur le champ de vitesses par l'ajout d'une perturbation :

$$\overrightarrow{v}(x, y) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_1}(x, y)$$

1) Trouver deux relations satisfaites par les composantes v_x et v_y du champ de vitesses.

2) On définit le potentiel des vitesses ϕ par $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$. Montrer que ϕ vérifie l'équation de Laplace : $\Delta\phi = 0$.

3) On se place en coordonnées cylindriques. Calculer ϕ_0 et montrer que $\Delta\phi_1 = 0$.

4) Le laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

On cherche une solution sous la forme $\phi_1(r, \theta) = f(r)g(\theta)$. Écrire l'équation vérifiée par f et g. Multiplier par $r^2/(fg)$ et en déduire que $\dfrac{g''(\theta)}{g} = C^{\mathrm{te}} = \lambda$.

5) On prendra $\lambda = -1$. Calculer $g(\theta)$ en utilisant la condition sur la vitesse $\overrightarrow{v}$ le long du cylindre (en $r = R$).

6) Chercher des solutions pour f de la forme $f(r) = Ar^n$ avec n une puissance entière. Éliminer l'une des deux.

7) Déduire des conditions aux limites la constante d'intégration, et exprimer le potentiel des vitesses. Montrer que

$$v_r = v_0\,\cos\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_\theta = -v_0\,\sin\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

8) À quelle distance de l'origine peut-on estimer que la vitesse du fluide selon Ox est uniforme (à 1% près) ?

9) Établir l'équation des lignes de courant autour du cylindre.

10) Calculer la pression $p(0, \theta)$ le long du cylindre. En déduire la résultante des forces de pressions sur le cylindre, et commenter.

11) Le même calcul pour une sphère à la place du cylindre donne $\phi_1 = \dfrac{A\,\cos\theta}{r^2}$. En déduire le champ de vitesses.

2 Écoulement autour d'un cylindre en rotation

On reprend la configuration de l'exercice précédent mais en supposant maintenant que le cylindre est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire Ω, autour de l'axe Oz. (c'est le principe de fonctionnement des *turbo-voiles*). L'écoulement peut-être considéré comme la somme de l'écoulement déjà calculé (décrit par le potentiel $\phi_0 + \phi_1$), auquel s'ajoute un écoulement dérivant du potentiel $\phi_2 = k\,\theta$.

1) Calculer le champ de vitesses correspondant au potentiel ϕ_2. On admettra que la vitesse le long du cylindre est égale à la vitesse de rotation de celui-ci.

2) Déterminer le nombre et la position des points d'arrêt de l'écoulement. Tracer l'allure des lignes de courant.

3) Exprimer la pression $p(\theta)$ le long du cylindre. En déduire la force exercée par le cylindre sur le fluide, et l'exprimer sous la forme

$$\overrightarrow{F}_{\text{Magnus}} = a\,\overrightarrow{V_0} \wedge \overrightarrow{\Omega}$$

3 Écoulement en canal

On étudie un écoulement stationnaire et irrotationnel d'eau dans un canal rectiligne. Le fond du canal est horizontal, sa section rectangulaire. On note $h(x)$ sa profondeur, $L(x)$ sa largeur, et $V(x)$ la vitesse de l'eau dans la direction (Ox) de l'écoulement. On suppose que les variations de L et h sont suffisamment faibles pour que les lignes de courant soient parallèles à Ox.

1) Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds $\text{Re} = \dfrac{UL}{\nu}$ dans un fleuve ou un torrent ? Justifier que l'on peut modéliser ces écoulements par un fluide parfait.

2) Montrer que l'énergie massique $e = g\,h + \dfrac{V^2}{2}$ est constante le long du canal.

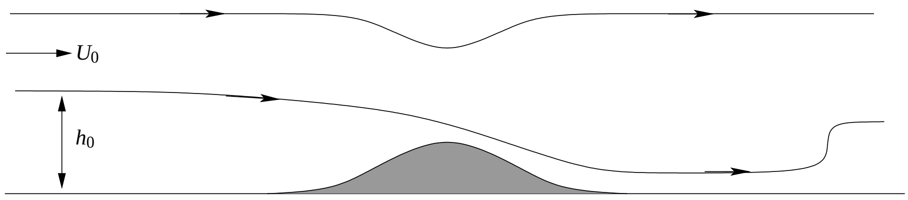
3) Exprimer le débit volumique Q du canal en fonction de g, e, L et h. Pour une largeur donné, calculer la profondeur critique h_c pour laquelle le débit est maximal (Q_{max}), ainsi que la vitesse critique V_c correspondante.

4) Montrer graphiquement que si $Q < Q_{\text{max}}$, pour une largeur L donnée, la profondeur peut prendre deux valeurs h_1 et h_2, correspondant aux régimes *torrentiel* et *fluvial*.

5) On suppose que le canal s'élargit vers l'aval. Dans chaque régime, comment la hauteur d'eau et la vitesse du courant varient-elles en conséquence ?

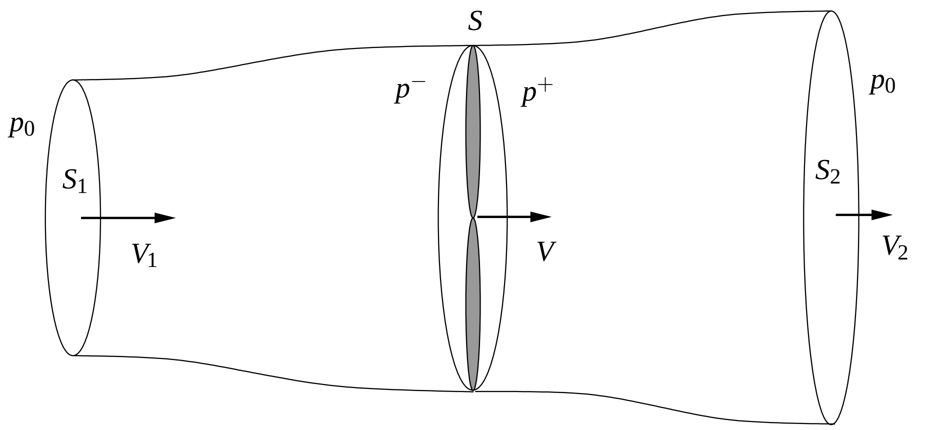
6) Réinterpréter la dichotomie entre les deux régimes en introduisant le nombre de Froude $\text{Fr} = \dfrac{V}{\sqrt{gh}}$.

7) En utilisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, interpréter les deux comportements d'un écoulement au passage d'un obstacle représentés ci-dessous, en fonction du nombre de Froude atteint au sommet de l'obstacle.



4 Étude d'une éolienne

Une éolienne prélève une fraction de l'énergie cinétique du vent, que l'on considère comme un écoulement incompressible d'air, de masse volumique $\rho = 1{,}29$ kg/m^3. On considère qu'en dehors d'un tube de courant de sections S_1 à l'amont et S_2 à l'aval, l'écoulement n'est pas perturbé par la présence de l'éolienne et la pression p_0 est uniforme. Dans tout le problème on négligera l'influence de la pesanteur.



1) On note V_1 et V_2 la vitesse du vent (supposée uniforme), respectivement, sur les sections S_1 et S_2. Exprimer la force F exercée par le vent sur l'hélice.

2) Calculer la différence de pression Δp entre le voisinage immédiat de l'hélice côté amont et côté aval. Exprimer F en fonction de Δp et en déduire la vitesse moyenne du vent V au niveau de l'éolienne.

3) Calculer la puissance $\mathcal{P}$ prélevée par l'éolienne, en fonction de ρ, S, V_1 et V. Montrer que pour V_1 donnée, la puissance atteint un maximum pour une certaine valeur V_0 de V.

4) Calculer le rendement théorique maximal de l'éolienne (loi de Betz).

5 Ondes gravitaires de surface

Équation de Bernouilli dans un écoulement potentiel

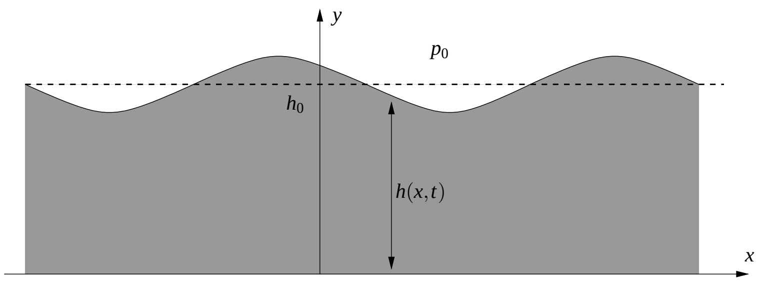
Un écoulement potentiel est décrit par le champ de vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\phi$. En utilisant l'équation d'Euler et l'identité

$$(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} - \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}$$

exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho\,\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$. En déduire une forme de l'équation de Bernouilli faisant intervenir ϕ.

Équation de dispersion des ondes de surface

On considère une couche de liquide d'épaisseur moyenne h, et on cherche à caractériser une onde de surface décrite par le potentiel $\phi(x, y, t)$. On néglige la tension superficielle.



1) Donner une condition sur ϕ en $y = 0$ et, au premier ordre, en $y = h(x, t)$.

2) Montrer que le potentiel vérifie l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$. On cherche une solution sous la forme $\phi(x, y, t) = f_1(u)\, f_2(y)$, avec $u = x - ct$. Réécrire l'équation de Laplace.

3) En déduire que le potentiel correspondant à une solution se propageant dans le sens des x croissants s'écrit

$$\phi(x, y, t) = A\, e^{i(kx-\omega t)}\, \text{ch}(ky)$$

4) On suppose que l'amplitude de l'onde est suffisamment faible ($\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \ll 1$) pour pouvoir négliger les termes en $v^2/2$. Écrire l'équation de Bernouilli.

5) Dériver l'équation de Bernouilli par rapport au temps, et l'appliquer en $y = h(x, t)$. En déduire la relation de dispersion reliant la pulsation ω au nombre d'onde k.

6) En déduire que la vitesse de propagation d'une onde de nombre d'onde k est donnée par

$$c^2 = \frac{g}{k}\ \text{th}\,(kh_0)$$

Vérifier que l'on retrouve bien le résultat connu dans le cas des grandes longueurs d'ondes.

7) Calculer les trajectoires des particules de fluide dans les cas limites.