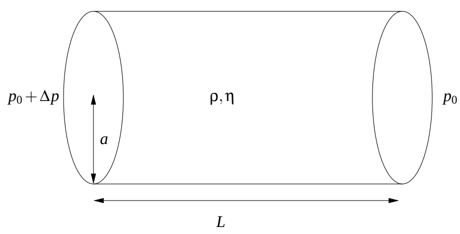
T.D. 4

Écoulements de fluides visqueux

1 Écoulement de Poiseuille

On étudie l'écoulement permanent d'un fluide newtonien incompressible dans un tube cylindrique horizontal de rayon a et de longueur L. Le gradient de pression est constant :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L}$$



1) Faire un bilan de quantité de mouvement sur un volume de fluide compris entre r et $r + \mathrm{d}r$ et x et $x + \mathrm{d}x$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(r)$.

2) Retrouver ce résultat en projetant l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques.

3) En appliquant les conditions aux limites, déterminer le profil de vitesses dans le tube.

4) Calculer le débit (loi de Poiseuille), la vitesse maximale et la vitesse débitante dans le tube. Calculer la résistance hydraulique $\mathcal{R} = \Delta P/Q$.

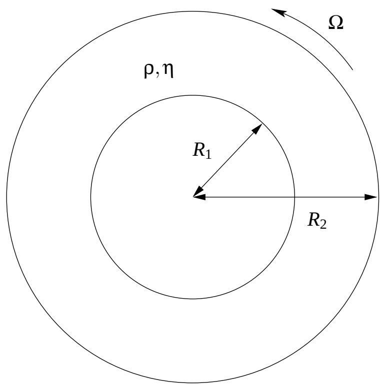
5) On modélise un milieu poreux par un assemblage de N tubes cylindriques très fins, de rayon b et de longueur L. Comparer le débit total à travers ce milieu avec celui dans un tube cylindrique de mêmes longueur et section, pour un saut de pression identique.

2 Viscosimètre de Couette

Un fluide newtonien incompressible s'écoule entre deux longs cylindres coaxiaux, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre intérieur est immobile tandis que le cylindre extérieur est mis en rotation avec une vitesse angulaire Ω. On suppose l'écoulement stationnaire et on néglige l'action de la pesanteur.

1) En utilisant les symétries du problème, montrer que la vitesse du fluide est orthoradiale, et ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.

2) Projeter l'équation de Navier-Stokes sur $\overrightarrow{u_\theta}$ et montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + \dfrac{v(r)}{r} = C^{\mathrm{te}} = A$.

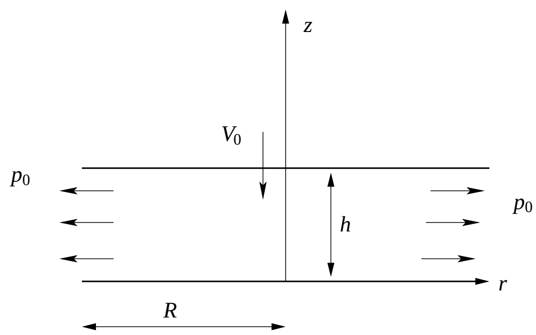


3) Déterminer le profil de vitesses et le gradient de pression radial.

4) Calculer la résultante des forces de frottement visqueux exercées par le fluide sur le cylindre intérieur, et son moment.

3 Écrasement d'un fluide visqueux

Un fluide newtonien incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η est contenu entre deux disques parallèles de rayon R, séparés par une épaisseur $h \ll R$. On exerce une force sur un des disques pour chasser latéralement le fluide, en maintenant une vitesse de déplacement du disque V_0.



1) Déterminer les conditions aux limites sur la vitesse et la pression.

2) Écrire en coordonnées cylindriques les équations de conservation de la masse et de Navier-Stokes.

3) En utilisant les symétries du problème et une analyse des ordres de grandeurs, montrer qu'on peut réduire les équations du mouvement à

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

4) En déduire l'expression de u_r en fonction de z et $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$.

5) Déterminer le profil radial de pression $p(r)$ puis la vitesse radiale $u_r(r, z)$.

6) Calculer la force F qu'il est nécessaire d'appliquer sur le disque pour maintenir le mouvement à vitesse constante.