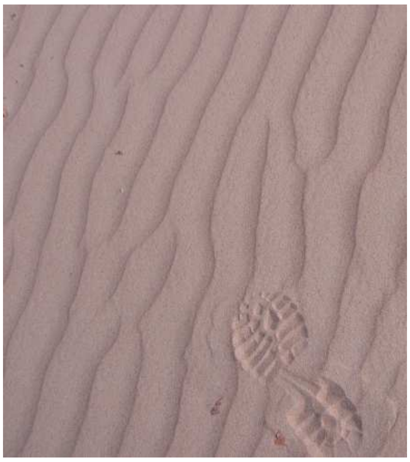
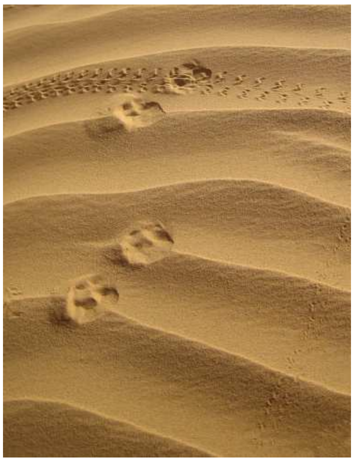
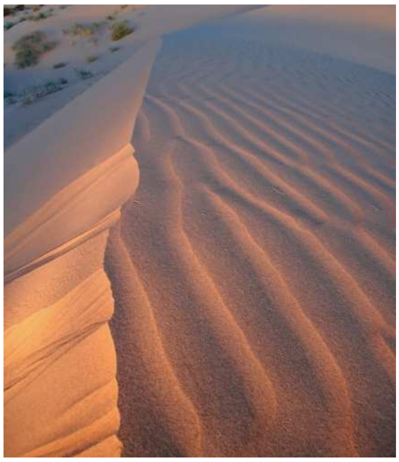
T.D. n°1
Formation des rides éoliennes

Les rides éoliennes sont des structures essentiellement bi-dimensionnelles formées par l'action du vent à la surface d'un milieu granulaire sec (par exemple sur une dune). Une première explication qualitative du processus de leur formation a été proposée par Bagnold en 1941 [1], et fut formalisée par Anderson en 1987 [2]. Dans toute la suite, on n'étudiera que le problème réduit à deux dimensions. Dans cette analyse simplifiée, on fait les hypothèses suivantes :

– Le vent n'a pas d'action directe sur le lit de sable : il n'intervient qu'en fournissant des grains en saltation (saltons) ;
– Les saltons bombardent la surface à un angle donné et sont suffisamment énergétiques pour ne pas être piégés par le lit de sable ;
– L'impact d'un salton sur la surface éjecte un nombre donné de grains (reptons) qui effectuent, dans le sens du vent, un unique saut de longueur l_{R} avant de s'arrêter.

Approche qualitative

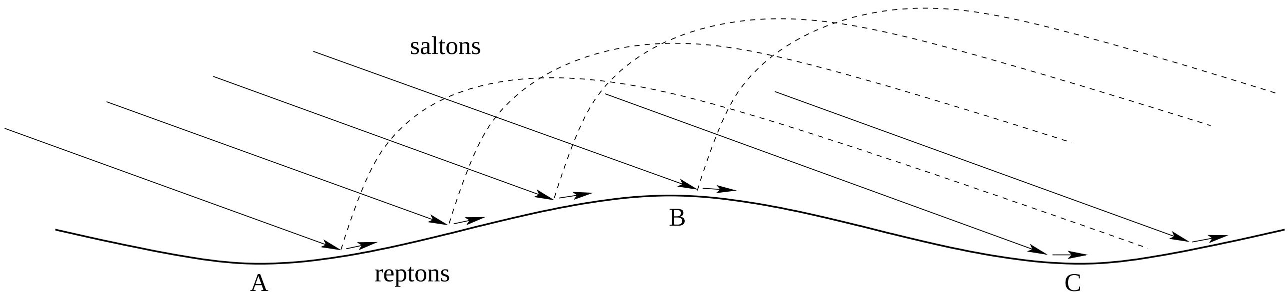
1. Description

a) À partir des photos ci-dessus, estimer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des rides éoliennes.

b) Peut-on estimer leur hauteur maximale ?

c) Pourquoi les rides n'apparaissent-elles en général que sur la face amont des dunes ?

2. À l'aide du schéma ci-dessous, inspiré de l'argument de Bagnold, expliquer qualitativement l'origine de l'apparition des rides.



Modélisation

3. Conservation de la masse. On suppose que le profil du lit de sable est décrit par la fonction $h(x,t)$. On note $\mathrm{Q}(x)$ le flux volumique de grains en reptation à travers une surface verticale située en x. Considérer la tranche de lit comprise entre les positions x et $x + \mathrm{d}x$.

a) Pourquoi peut-on éliminer du problème le flux de saltons ?

b) Exprimer la quantité de grains qui entrent et qui sortent de ce domaine en un temps $\mathrm{d}t$.

c) Pendant le même temps $\mathrm{d}t$, la hauteur du lit en ce point a varié de $\mathrm{d}h$. Écrire la conservation de la quantité de grains.

d) On note ϕ_{lit} la compacité du lit de sable. Déduire la loi d'évolution du profil

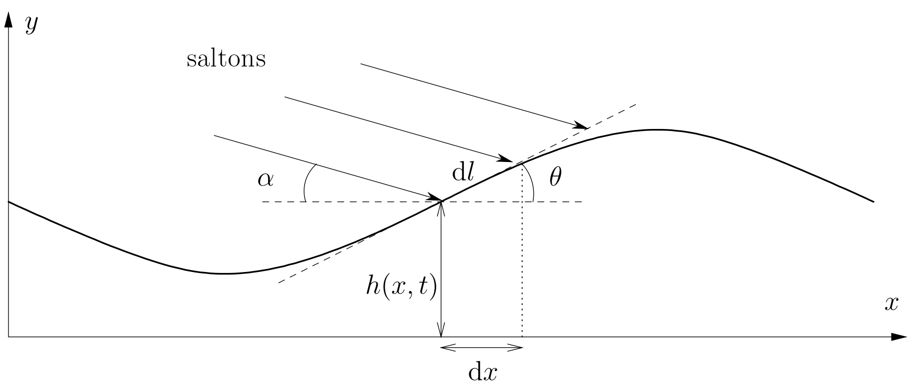
$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\phi_{\mathrm{lit}}} \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

e) Interpréter qualitativement cette équation.

4. Flux de reptons. On note $\mathrm{N}_{\text{éj}}(x)$ le nombre de reptons produits en x par unité de temps. Chaque repton produit fait un saut de longueur l_{R}. Montrer que le flux volumique de grains s'écrit

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{\pi d^3}{6} \int_{x-l_{\mathrm{R}}}^{x} \mathrm{N}_{\text{éj}}(x')\,\mathrm{d}x' \tag{2}$$

d étant le diamètre d'un grain. Injecter cette expression dans l'équation (1).



5. Impacts des saltons. On suppose que chaque impact d'un salton sur le lit éjecte n_0 reptons. On a alors $\mathrm{N}_{\text{éj}}(x) = n_0\,\mathrm{N}_{\text{imp}}(x)$. Il nous reste à calculer le nombre d'impacts à la position x, qui dépend de la pente locale du lit de sable $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \tan\theta$. On suppose que sur un lit plat, le nombre d'impacts de saltons par unité de temps et de surface est N_0.

a) Calculer le nombre d'impacts par unité de temps sur la surface infinitésimale dl.

b) Montrer que le nombre d'impacts par unité de temps et de surface s'écrit

$$\mathrm{N}_{\text{imp}}(\theta) = \mathrm{N}_0\,\cos\theta\left(1+\frac{\tan\theta}{\tan\alpha}\right) \tag{3}$$

Analyse de stabilité linéaire

Une surface de sable initialement plane, soumise au bombardement par des grains en saltation, est dite *instable* : on voit apparaître des rides de longueur d'onde donnée. Pour modéliser ce problème, on suppose qu'une petite perturbation est présente initialement, et on veut savoir si, selon sa taille, elle va tendre à grossir ou au contraire à être gommée.

6. Perturbation initiale. On suppose que le lit de sable présente une déformation

$$h(x,t) = h_1\,\cos\left(kx+\omega t\right)\,e^{\sigma t} \tag{4}$$

a) Que représentent physiquement les grandeurs $2\pi/k$, ω et σ ?

b) Réécrire l'équation (4) en notation complexe.

c) Exprimer $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial t}$.

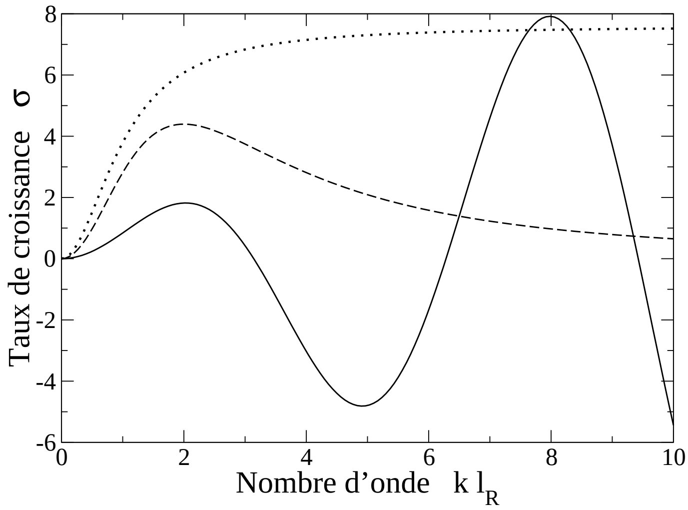
7. Relation de dispersion. On suppose que la pente reste faible et qu'on peut approximer $\cos\theta \approx 1$. Montrer que la loi d'évolution du lit se traduit par

$$\sigma + i\omega = -\mathrm{C}^{\text{te}}\cot\alpha\,ik\left(1-e^{-ikl_{\mathrm{R}}}\right) \tag{5}$$

8. En déduire le taux de croissance d'une perturbation de nombre d'onde k. À quelle courbe sur la figure ci-dessous correspond cette expression ?

9. Corrections au modèle. Pour améliorer le modèle, on prend en compte le fait que la longueur de reptation n'est pas parfaitement définie : elle vaut en moyenne l_{R} mais peut prendre d'autres valeurs. Si l'on suppose que la distribution des longueurs de reptation suit une loi exponentielle on obtient la courbe en pointillés, et celle en tirets pour une fonction Gamma. Laquelle des trois courbes de stabilité vous paraît la plus réaliste ?

10. Longueur d'onde. D'après cette courbe, quelle est la longueur d'onde prédite par la théorie ?



11. Trajectoire des reptons. On suppose que les grains éjectés à l'impact d'un salton le sont avec une vitesse moyenne $v_{\text{éj}} \simeq 8\sqrt{gd}$ et à un angle de 70°. En raison de la faible hauteur de leur trajectoire, ils ne subissent pas la force du vent mais ont une trajectoire purement ballistique.

a) Calculer le temps de vol caractéristique τ_{R} d'un repton.

b) En déduire la longueur moyenne de reptation l_{R} en fonction du diamètre des grains.

c) Que vaut l_{R} pour des grains de taille caractéristique $d = 200\ \mu$m ?

d) En déduire une estimation de la longueur d'onde des rides prédite par la théorie d'Anderson. Commenter.

Références

[1] R.A. Bagnold. *The physics of blown sand and desert dunes.* Chapman and Hall, London, 1941.

[2] R. Anderson. A theoretical model for aeolian impact ripples. *Sedimentology*, 34 :943–956, 1987.