T.D. n°2

Un modèle simple de transport dans l'eau : la resuspension visqueuse

Le but de cet exercice est de prédire une loi de transport de sédiments dans un écoulement laminaire à partir des arguments empiriques proposés par Leighton et Acrivos en 1986. On associe habituellement la resuspension à un écoulement turbulent (où elle est causée par les fluctuations verticales de vitesse), mais nous allons voir que le phénomène existe aussi en régime laminaire.

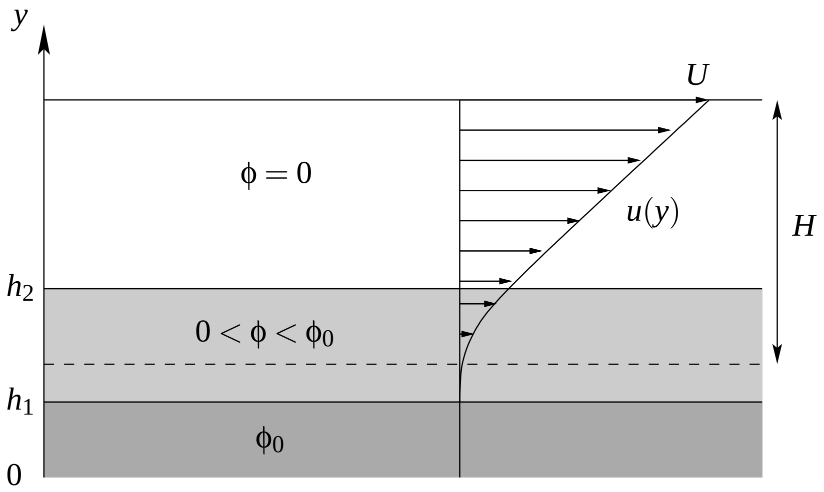
Nombre de Shields

1. Forces. On considère un grain sphérique de diamètre d dans un écoulement de vitesse u. Exprimer les différentes forces subies par le grain (on suppose que le nombre de Reynolds particulaire est faible).

2. On suppose à présent que l'écoulement est un cisaillement simple en deux dimensions, décrit par $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \mathrm{U}/\mathrm{H}$, avec H la hauteur de l'écoulement et U la vitesse en haut. Quelle est la vitesse caractéristique à l'échelle d'un grain ? En déduire l'expression du nombre de Shields.

Diffusion de particules

On divise arbitrairement le système en trois régions : une zone de fluide limpide ; un lit de grains immobiles, de fraction volumique $\phi_0 = 0{,}58$; et entre les deux une couche de grains en mouvement d'épaisseur Δh. On suppose que cette suspension (eau+grains) a une concentration volumique en grains ϕ, et se comporte comme un fluide newtonien, de masse volumique $\rho(\phi)$ et de viscosité effective $\mu(\phi) = \mu_0\, \mu_\mathrm{r}(\phi)$, μ_0 étant la viscosité de l'eau pure.



3. Mécanisme. Expliquer qualitativement pourquoi, une fois mises en mouvement par l'écoulement, les particules ont tendance à migrer des régions de forte concentration vers les régions de faible concentration. On formalise cette diffusion par l'équation suivante (loi de Fick), donnant le flux de particules :

$$\overrightarrow{\mathrm{N_d}} = -\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y}\,\overrightarrow{u_y} \tag{1}$$

On introduit le taux de cisaillement $\dot{\gamma}(y) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, et un coefficient de diffusion adimensionné $\widehat{\mathrm{D}}$:

$$\widehat{\mathrm{D}}(\phi) = \frac{4}{\dot{\gamma}d^2}\mathrm{D} \tag{2}$$

4. Vitesse de Stokes. Calculer la vitesse de sédimentation d'une sphère seule dans un fluide au repos $\mathrm{V_s}$.

5. Flux à l'équilibre. Dans une suspension concentrée, l'écoulement créé par la chute d'une particule influe sur le mouvement des autres. La vitesse de sédimentation des particules est alors modifiée et devient $\mathrm{V'_s} = f(\phi)\mathrm{V_s}$.

a) Que peut-on dire de la variation de la fonction f en fonction de ϕ ?

b) Exprimer le flux de particules vers le bas dû à la sédimentation $\overrightarrow{\mathrm{N_s}}$.

c) Le système étant à l'équilibre, montrer que

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} = -\frac{4f(\phi)\mathrm{V_s}}{\widehat{\mathrm{D}}(\phi)d^2\dot{\gamma}}\,\phi \tag{3}$$

Écoulement laminaire à viscosité variable

6. Conservation de la quantité de mouvement

a) Considérer une tranche horizontale de fluide, située entre y et $y + \mathrm{d}y$. Écrire les forces visqueuses exercées par le reste du fluide sur cette tranche.

b) En déduire l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\mu(y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right] = 0 \tag{4}$$

c) Intégrer cette équation sur y.

d) Évaluer la constante d'intégration dans le liquide clair (on supposera que le profil de vitesses y est quasiment inchangé par rapport à l'écoulement sans resuspension). En déduire que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \Theta\,\frac{18\mathrm{V_s}}{\mu_\mathrm{r}(\phi)\,d} \tag{5}$$

7. Profil de concentration

a) En insérant l'équation (5) dans l'équation (3), montrer que

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} = -\frac{2}{9}\,\frac{1}{\Theta}\,\frac{\mu_\mathrm{r}(\phi)\,\phi\,f(\phi)}{d\,\widehat{\mathrm{D}}(\phi)} \tag{6}$$

b) Intégrer l'équation précédente entre les hauteurs h_1 et h_2, correspondant respectivement au bas et au haut de la couche de grains en mouvement, soit à des concentrations respectives en grains ϕ_0 et 0.

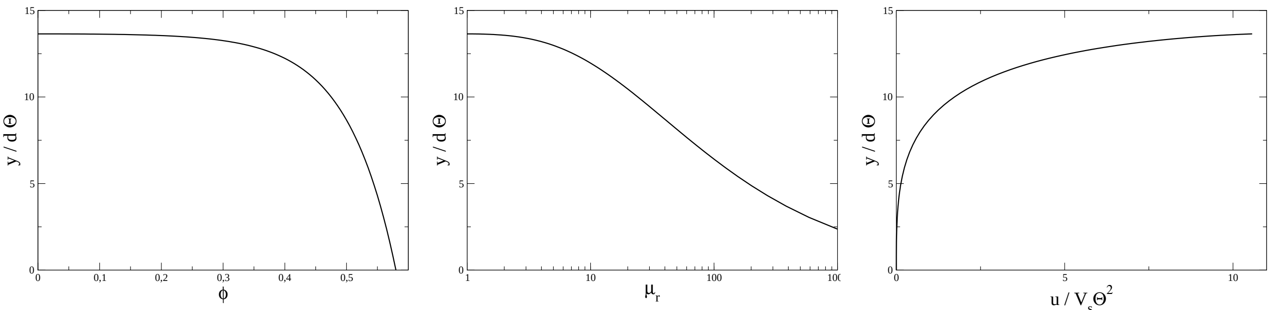
c) Leighton et Acrivos ont proposé les formules empiriques suivantes :

$$\mu_\mathrm{r}(\phi) = \left[1 + \frac{3}{2}\,\frac{\phi}{1-\phi/\phi_0}\right]^2, \quad f(\phi) = \frac{1-\phi}{\mu_\mathrm{r}(\phi)}, \quad \widehat{\mathrm{D}}(\phi) = \frac{\phi^2}{3}\left(1 + \frac{\exp(8,8\phi)}{2}\right) \tag{7}$$

On donne

$$\int_0^{\phi_0} \frac{\widehat{\mathrm{D}}(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{\mu_\mathrm{r}(\phi)\,\phi\,f(\phi)} = 3{,}03 \tag{8}$$

Exprimer la hauteur de la couche en suspension $\Delta h = h_2 - h_1$ en fonction du nombre de Shields.



8. Loi de transport

a) En utilisant le fait que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} \tag{9}$$

montrer que le profil de vitesses est donné par

$$\frac{u(y)}{\mathrm{V_s}} = 81\,\Theta^2 \int_{\phi(y)}^{\phi_0} \frac{\widehat{\mathrm{D}}(\phi)\,\mathrm{d}\phi}{\mu_\mathrm{r}(\phi)^2\,\phi\,f(\phi)} \tag{10}$$

b) En déduire que le flux de grains transportés par l'écoulement obéit à la loi de transport suivante (on ne demande pas le calcul de la constante) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{V_s}d} = \mathrm{C^{te}}\,\Theta^3} \tag{11}$$

9. Limites du modèle. Que manque-t-il à cette loi de transport ? Quelle hypothèse implicite empêche de prendre en compte ce phénomène ?