T.D. n°3

Équations de Saint-Venant
Formation des bancs de sable

Quand le rapport d'aspect largeur/profondeur d'une rivière alluviale augmente, se développe une instabilité du fond qui conduit à la formation de bancs de sable alternés (lesquels peuvent servir de précurseurs à la formation de méandres ou de tresses). Dans la première partie

Fig. 1 – Bancs alternés dans les lits de la rivière Tokachi (Japon) et de l'Ornain (Bar-le-Duc).

du T.D., on cherchera à obtenir les équations de Saint-Venant, qui décrivent les écoulements naturels à surface libre et en eau peu profonde. Dans la seconde partie on effectuera une analyse de stabilité simplifiée pour prévoir les conditions d'apparition des bancs de sable.

1 Équations de Saint-Venant

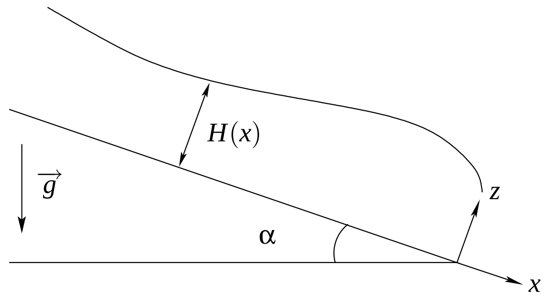
Dans tout le problème, on adoptera l'hypothèse classique de quasi-stationnarité : le relief se déplace très lentement par rapport à l'écoulement. On se limitera donc aux équations de l'hydrodynamique en régime stationnaire.

1. Équations de base. Écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un écoulement bidimensionnel. On notera ν la viscosité effective (comprenant la viscosité moléculaire et la viscosité turbulente).

Approximation des eaux peu profondes

Soient L_0 et H_0 les dimensions caractéristiques de l'écoulement respectivement dans les directions x et z, U_0 l'échelle de vitesse longitudinale. On suppose que $\varepsilon = \mathrm{H}_0/\mathrm{L}_0 << 1$. Les nombres de Reynolds et Froude s'écrivent respectivement

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathrm{H}_0 \mathrm{U}_0}{\nu} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Fr} = \frac{\mathrm{U}_0}{\sqrt{g \mathrm{H}_0 \cos\alpha}} \tag{1}$$



2. Équations adimensionnées.

a) Montrer que l'échelle de vitesse verticale est $\mathrm{W}_0 = \varepsilon \mathrm{U}_0$.

b) Réécrire les trois équations de la question précédente en adoptant les variables

$$\widetilde{x} = \frac{x}{\mathrm{L}_0} \qquad \widetilde{z} = \frac{z}{\mathrm{H}_0} \qquad \widetilde{u} = \frac{u}{\mathrm{U}_0} \qquad \widetilde{w} = \frac{w}{\mathrm{W}_0} \qquad \widetilde{p} = \frac{p}{\rho \mathrm{U}_0^2} \tag{2}$$

c) Pour la suite on néglige tous les termes du second ordre en ε. En déduire que

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\widetilde{u}\,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{x}} + \widetilde{w}\,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{z}} \right] &= -\varepsilon\,\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\tan\alpha}{\mathrm{Fr}^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \widetilde{z}^2} \\ \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial \widetilde{z}} &= -\frac{1}{\mathrm{Fr}^2} \end{aligned} \tag{3}$$

3. Pression hydrostatique. En déduire que la pression vérifie

$$p(x,z,t) = \mathrm{P}_0 - \rho g \cos\alpha (z - h(x,t)) \tag{4}$$

4. Vérifier que l'on a par conséquent

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = -g\cos\alpha\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + g\sin\alpha + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{5}$$

Équations intégrées sur la verticale.

On va maintenant moyenner les équations sur la profondeur. On utilise la notation suivante :

$$\mathrm{U}(x) = \frac{1}{\mathrm{H}(x)} \int_0^{\mathrm{H}} u(x,z)\mathrm{d}z \tag{6}$$

5. Conservation de la masse. Faire un bilan de matière et en déduire que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U}\,\mathrm{H}) = 0 \tag{7}$$

6. Montrer que la conservation de la quantité de mouvement se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\mathrm{H}} u^2 \mathrm{d}z + g\cos\alpha\,\mathrm{H}\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = g\mathrm{H}\,\sin\alpha - \frac{\tau_b}{\rho} \tag{8}$$

avec $\tau_b = \rho\nu\partial u/\partial z(z=0)$ la contrainte de cisaillement au fond. On rappelle la formule de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{a(s)}^{b(s)} f(s,z)\mathrm{d}z = \int_{a(s)}^{b(s)} \frac{\partial f}{s}\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s}\,f(s,b(s)) - \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}\,f(s,a(s)) \tag{9}$$

Pour « fermer » le système d'équations, il reste à faire deux hypothèses :

$$\int_0^{\mathrm{H}} u^2 \mathrm{d}z \simeq \mathrm{H}\,\mathrm{U}^2 \qquad \text{et} \qquad \tau_b = \rho\,\mathrm{C_f}\,\mathrm{U}^2 \tag{10}$$

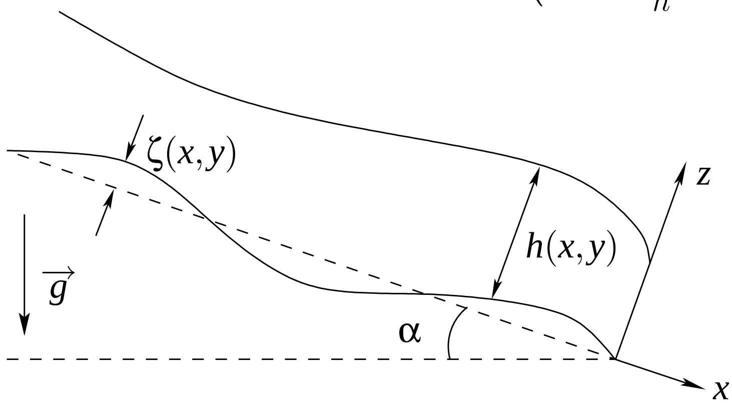
En déduire l'équation de Saint-Venant :

$$\mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + g\cos\alpha\,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = g\sin\alpha - \mathrm{C_f}\,\frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{H}} \tag{11}$$

2 Formation des bancs de sable

On considère maintenant une rivière de profondeur $h(x,y)$, de largeur b, de pente moyenne α, et dont le fond présente un relief $\zeta(x,y,t)$. Le champ de vitesse moyennée en épaisseur est $\overrightarrow{u}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. On admet que les équations de Saint-Venant pour la quantité de mouvement s'écrivent dans cette géométrie

$$(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{u} + g\,\cos\alpha\,\overrightarrow{\nabla}(h+\zeta) = \overrightarrow{\mathrm{G}} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\mathrm{G}} = \begin{pmatrix} g\sin\alpha - \dfrac{\mathrm{C_f}\,u}{h}\sqrt{u^2+v^2} \\ -\dfrac{\mathrm{C_f}\,v}{h}\sqrt{u^2+v^2} \end{pmatrix} \tag{12}$$



1. Conservation de la masse. Généraliser l'équation (7) à deux dimensions.

2. Équation d'Exner. On note $\overrightarrow{q}(x,y)$ le flux de grains entraînés en surface par l'écoulement. En se plaçant suffisamment loin du seuil de mise en mouvement, et en tenant compte de l'effet de la pente, la loi de transport devient :

$$q(x,y) = q_0\,(u^2+v^2)^{3/2}\,\left[\frac{\overrightarrow{u}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\nabla}h\right] \tag{13}$$

Écrire la conservation de la quantité de grains.

3. Ordre 0. Nous avons maintenant un système de quatre équations pour les quatre variables u, v, h et ζ, pour lequel on va effectuer une analyse de stabilité linéaire. Quelle est la solution de base, correspondant à l'écoulement sur un fond plat ?

4. Développement au premier ordre. On pose

$$\begin{array}{ll} u(x,y) = \mathrm{U}_0 + u_1(x,y) & v(x,y) = v_1(x,y) \\ h(x,y) = h_0 + h_1(x,y) & \zeta(x,y) = \zeta_1(x,y) \end{array} \tag{14}$$

Développer les quatre équations au premier ordre en u_1,v_1,h_1 et ζ_1. Les adimensionner en utilisant U_0 comme échelle de vitesse, b comme échelle de longueur horizontale et h_0 comme échelle de longueur verticale. On notera $r = b/h_0$ le rapport d'aspect de la rivière.

5. Analyse de stabilité. On suppose à présent l'existence d'une perturbation de la forme

$$\zeta_1(x,y) = \widehat{\zeta}_1\, e^{i\pi y}\, e^{\sigma t}\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{15}$$

Montrer que le taux de croissance complexe $(\sigma + i\omega)$ est donné par l'équation

$$\det \mathrm{M} = 0 \tag{16}$$

où M est la matrice définie par

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} ik + 2r\,\mathrm{C_f} & 0 & ik - r\,\mathrm{C_f}\,\mathrm{Fr}^2 & ik \\ 0 & ik + r\,\mathrm{C_f} & i\pi & i\pi \\ ik & i\pi & ik\,\mathrm{Fr}^2 & 0 \\ 3\,ik & i\pi & 0 & \sigma + i\omega + \dfrac{\mathrm{Fr}^2}{2r}(k^2+\pi^2) \end{bmatrix} \tag{17}$$

6. Diagramme de stabilité. La résolution de l'équation (16) permet de tracer la courbe de stabilité marginale (à gauche), pour les paramètres $\mathrm{C_f} = 0{,}01$, $\mathrm{Fr} = 0{,}1$ et le taux de croissance (à droite) pour une rivière de rapport d'aspect $r = 20$. Interpréter ces courbes.