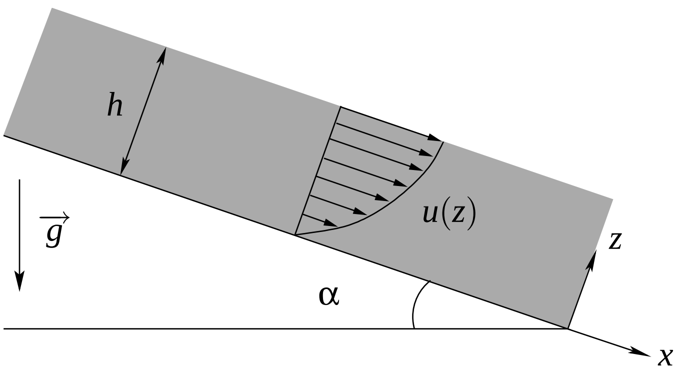
T.D. n°4
Écoulements gravitaires

Dans ce T.D. on s'intéressera à des modèles simples permettant de reproduire des écoulements gravitaires de matériaux granulaires secs (avalanches de roches) et de coulées de débris (mélanges eau-particules).



Écoulement à surface libre d'un fluide complexe

On considère l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide sur un plan incliné de pente α. Le champ de vitesses est supposé purement parallèle au plan, et donc invariant dans la direction x. On note $\dot{\gamma} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$ le taux de cisaillement et σ la contrainte visqueuse.



1. Quelle est la relation entre σ et $\dot{\gamma}$ pour un fluide newtonien ?

2. Équation de Navier-Stokes généralisée. Pour un fluide quelconque, on définit la viscosité généralisée par $\eta(\dot{\gamma}) = \dfrac{\sigma}{\dot{\gamma}}$.

a) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur une tranche de fluide d'épaisseur dz, parallèle au plan incliné.

b) En déduire l'équation de Navier-Stokes pour d'un fluide quelconque.

c) Justifier que les conditions aux limites suivantes s'appliquent :

$$u(z=0)=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}(z=h)=0 \tag{1}$$

3. Pression. Projeter l'équation sur l'axe z et établir l'expression de la pression $\mathrm{P}(x,z)$.

4. Montrer que

$$\eta(\dot\gamma(z))\,\dot\gamma(z)=\mathrm{A}\,(\mathrm{B}-z) \tag{2}$$

avec A et B des constantes que l'on explicitera. En déduire que si l'on suppose $\mathrm{P}_0 \ll \mathrm{P}(z)$, l'écoulement est décrit par l'équation

$$\sigma(z)=\tan\alpha\,\mathrm{P}(z) \tag{3}$$

Écoulement gravitaire d'un matériau granulaire sec

O. Pouliquen *et al.* [1] ont récemment proposé à partir de leurs résultats expérimentaux une loi de comportement pour un matériau granulaire. On montre que dans un écoulement granulaire la contrainte tangentielle est proportionnelle à la contrainte normale :

$$\sigma=\mu(\mathrm{I})\,\mathrm{P} \tag{4}$$

$\mu(\mathrm{I})$ a la nature d'un coefficient de friction, dont on observe qu'il dépend du taux de cisaillement imposé au matériau :

$$\mu(\mathrm{I})=\mu_{\mathrm{s}}+\frac{\mu_2-\mu_{\mathrm{s}}}{1+\mathrm{I}_0/\mathrm{I}} \tag{5}$$

I_0 et μ_2 étant des constantes, μ_{s} le coefficient de friction statique et I le *nombre inertiel* caractérisant l'écoulement :

$$\mathrm{I}=\frac{|\dot\gamma|d}{\sqrt{\mathrm{P}/\rho}} \tag{6}$$

5. Viscosité effective. Exprimer la viscosité du sable $\eta(\dot\gamma)$. Comment varie-t-elle avec le taux de cisaillement. Quelle est la nature du fluide ainsi défini ?

6. Profil de l'écoulement.

a) À l'aide de l'équation (3), montrer que

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}=\frac{\tan\alpha-\mu_{\mathrm{s}}}{\mu_2-\tan\alpha} \tag{7}$$

b) Quel est le signe de I/I_0 ? Que peut-on en déduire ?

c) Déduire l'expression du taux de cisaillement $\dot\gamma$.

d) Montrer que l'on retrouve le profil de vitesses de Bagnold observé expérimentalement :

$$u(z) = \mathrm{U}_{\mathrm{max}} \left[1 - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{3/2}\right] \tag{8}$$

e) Calculer la vitesse du sable à la surface de l'écoulement $\mathrm{U}_{\mathrm{max}}$.

Application numérique : Calculer la vitesse de surface pour une avalanche de roches de diamètre $d = 10$ cm et de densité $\rho = 2\,500$ kr/m^3, sur une épaisseur $h = 1$ m et le long d'une pente $\alpha = 25°$. On donne les paramètres expérimentaux suivants :

$$\mu_{\mathrm{s}} = \tan(21°) \qquad \mu_2 = \tan(33°) \qquad \mathrm{I}_0 = 0{,}28 \tag{9}$$

Coulées de débris

7. Fluide newtonien. En utilisant l'équation (3), établir le profil de vitesses dans l'écoulement pour un fluide newtonien de viscosité η_0. Calculer la vitesse de surface, le débit et la vitesse moyenne.

8. Fluide de Bingham. Une coulée de débris, composée d'une matrice liquide et de particules solides, peut être modélisée comme un *fluide à seuil*, avec une rhéologie

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & \text{si} \quad \sigma < \sigma_0 \\ \sigma = \sigma_0 + \eta_0 \dot{\gamma} & \text{si} \quad \sigma > \sigma_0 \end{cases} \tag{10}$$

a) Sur un terrain de pente α donnée, à partir de quelle épaisseur h_0 le matériau se met-il à couler ?

b) On suppose à présent que $h > h_0$. Calculer la forme du profil de vitesses $u(z)$ (on pourra diviser l'épaisseur du fluide en deux couches). Quelle est la vitesse moyenne ?

9. Fluide de Herschel-Bulkley. On peut également considérer que la matrice liquide a des propriétés rhéo-fluidifiantes (c'est le cas de la plupart des boues). La loi de comportement devient

$$\sigma = \sigma_0 + \kappa \dot{\gamma}^{1/2} \tag{11}$$

1. Justifier le terme de *rhéo-fluidifiant*.
2. Résoudre l'équation (3) pour calculer le profil de vitesses.

Références

[1] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441 :727–730, 2006.