Mémoire d'habilitation à diriger des recherches
ENS de Lyon
Mention : Mathématiques

présenté par

Vincent Pilloni

soutenu le 25 Janvier 2017

Cohomologie cohérente et formes automorphes p-adiques

Composition du jury :

L. Berger	ENS de Lyon
C. Breuil	Université Paris 11
L. Clozel	Université Paris 11
J-F. Dat	Université Paris 6
L. Fargues	Université Paris 6
J. Tilouine	Université Paris 13

Rapporteurs :

L. Fargues	Université Paris 6
M. Harris	Columbia University
H. Hida	University of California at Los Angeles

Je tiens à remercier l'ensemble de la communauté mathématique et dire le plaisir que j'ai à participer à cette belle aventure collective.

Mes remerciements vont en particulier à mes collaborateurs : Benoit Stroh, Fabrizio Andreatta, Adrian Iovita et Stéphane Bijakowski et à mon étudiant Valentin Hernandez.

Je remercie également mon directeur de thèse Jacques Tilouine de m'avoir initié à des nombreux problèmes passionnants.

Je remercie l'UMPA qui m'offre les meilleurs conditions de travail possibles et en particulier l'équipe de géométrie arithmétique.

Je remercie les rapporteurs Laurent Fargues, Michael Harris et Haruzo Hida qui ont accepté de relire ce mémoire et les membres du Jury Laurent Berger, Christophe Breuil, Laurent Clozel, Jean-François Dat, Laurent Fargues et Jacques Tilouine qui me font l'honneur d'assister à la soutenance.

Je pense enfin à ma famille et mes amis. En particulier María, Joaquín et Paloma.

Table des matières

1. Introduction 3
2. Formes modulaires p-adiques 4
3. Modularité 17
4. Construction de représentations galoisiennes 21
Articles présentés 25
Références 25

1. Introduction

Un des buts du programme initié par Langlands dans les années 70 est de mettre en relation des objets de nature géométrique (des motifs de variétés algébriques), arithmétique (des représentations galoisiennes) et de théorie des représentations (les formes automorphes). Cette hypothétique correspondance est contrôlée par les fonctions L de ces différents objets.

La géométrie algébrique joue un rôle central dans la correspondance. Pour étudier l'arithmétique des formes automorphes, il faut réussir à les réaliser dans la cohomologie d'une variété de Shimura. La cohomologie cohérente, contrairement à la cohomologie étale, n'est pas munie d'une action du groupe de Galois. Elle présente néanmoins quelques avantages. Le premier est son caractère concret : il arrive souvent que le groupe de cohomologie de degré 0 soit intéressant, et les sections de faisceaux localement libres se prêtent à de nombreuses constructions (congruences, fonctions L p-adiques...). En second, elle s'impose si on souhaite étudier certaines formes automorphes reliées à des objets arithmétiques naturels. Par exemple, les formes modulaires de poids 1 pour le groupe $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$ qui correspondent à des représentations d'Artin ne se réalisent pas dans la cohomologie étale, mais seulement dans la cohomologie cohérente. Il en va de même de certaines formes de poids 2 pour le groupe $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$ qui doivent correspondre à des variétés abéliennes...

L'utilisation des méthodes p-adiques est particulièrement fructueuse. On étudie des congruences entre formes automorphes et des déformations de représentations galoisiennes. Cela permet parfois d'étendre une propriété connue ponctuellement à un voisinage p-adique, à toute une famille.

Dans notre travail, nous avons abordé trois axes de recherche. Le premier concerne les formes modulaires p-adiques. Après avoir ré-examiné la théorie de Hida dans [**P2**], nous avons développé, en collaboration avec F. Andreatta et A. Iovita, une théorie géométrique des familles de pente finie en cohomologie cohérente dans [**P4**], [**AIP1**], [**AIP2**], [**AIP3**], [**AIP4**]. Dans [**P3**], [**PS2**], [**PS3**] et [**BPS**], en collaboration avec Bijakowski et Stroh, on établit que certaines formes modulaires surconvergentes de petite pente sont classiques.

Le second thème concerne la modularité. Dans [**P1**], on démontre un théorème de relèvement modulaire pour le groupe $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$ en utilisant la méthode Taylor-Wiles en cohomologie cohérente. Dans [**P5**] et [**PS4**], en collaboration avec Stroh, on s'intéresse aux représentations d'Artin de dimension 2 des groupes de Galois des corps totalement réels.

Le dernier thème concerne enfin la construction de représentations galoisiennes. Dans [**PS5**], en collaboration avec Stroh, on explique comment associer des représentations galoisiennes à certaines formes automorphes apparaissant dans la cohomologie cohérente des variétés de Shimura.

2. Formes modulaires p-adiques

Nous expliquons la construction de familles de formes modulaires p-adiques dans le contexte des variétés de Siegel. On construit des variétés de Hecke qui sont paramétrées par le poids des formes modulaires. La géométrie des variétés de Hecke est fascinante et mystérieuse. La possibilité de faire varier le poids a de nombreuses applications arithmétiques : construction de représentations galoisiennes, théorème de modularité... Il existe plusieurs approches à la construction de ces variétés de Hecke. On peut utiliser, suivant Hida, Ash-Stevens et Urban ([**51**]), la cohomologie des groupes arithmétiques agissant sur des symboles modulaires. Une autre approche est développée dans [**21**] via la cohomologie complétée. Nous proposons ici d'expliquer une troisième voie, initiée par Katz [**37**], Hida [**31**] et Coleman [**17**] qui utilise la cohomologie cohérente du lieu ordinaire. Ces approches sont complémentaires.

2.1. Formes modulaires classiques. — On fixe p un nombre premier et N un entier premier à p. On note Y l'espace de modules sur Spec $\mathbb{Z}_p$ qui paramètre les classes d'isomorphismes de :

1. variétés abéliennes A de dimension g, principalement polarisées,
2. isomorphismes symplectiques à similitude près $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^{2g} \simeq A[N]$.

On désigne par X une compactification toroidale de Y et par G le schéma semi-abélien qui prolonge le schéma abélien universel A ([**23**]). On appelle $D = X \setminus Y$ le bord de la compactification.

Soit ω_G le faisceau conormal de la variété abélienne universel. C'est un faisceau localement libre de rang g. On note $T^\times = \mathrm{Isom}(\mathscr{O}_X^g, \omega_G)$ le GL_g-torseur associé.

On dispose d'après [**44**] d'un foncteur qui à toute représentation du groupe GL_g associe un faisceau localement libre automorphe .

Explicitons cette construction. Commençons par rappeler la construction de certaines représentations du groupe GL_g suivant [**33**]. Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{GL}_g$ le sous-groupe de Borel triangulaire supérieur et soit T le tore diagonal. On note $X(\mathrm{T})$ le groupe des caractères de T. Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^g$ via l'application qui envoie $(k_1, \cdots, k_g)$ sur le caractère $\mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_g) \mapsto \prod_{i=1}^g t_i^{k_i}$. On note $X(\mathrm{T})^+$ le cône des caractères dominants, donné par la condition $k_1 \geq k_2 \cdots \geq k_g$. Si $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$, on considère l'induite $V^\kappa = \{f : \mathrm{GL}_g \to \mathbb{A}^1,\ f(gb) = \kappa(b)f(g),\ \forall (g,b) \in \mathrm{GL}_g \times \mathrm{B}\}$. Le groupe GL_g agit sur cet espace via $f \mapsto f(g\ \cdot)$.

A tout $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$, on associe un faisceau localement libre automorphe ω^κ sur X. Il est défini ainsi. Soit $\pi : T^\times \to X$ la projection. Alors $\omega^\kappa = \pi_\star \mathscr{O}_{T^\times}[\kappa']$ où

$\kappa = (k_1, \cdots, k_g)$, $\kappa' = (-k_g, \cdots, -k_1)$, $[\kappa']$ désigne la partie κ'-isotypique pour l'action de B.

On s'intéresse aux groupes de cohomologie cohérente $\mathrm{H}^i(X, \omega^\kappa)$ ainsi qu'à leur variante cuspidale $\mathrm{H}^i(X, \omega^\kappa(-D))$. Ce sont des $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini munis d'une action de l'algèbre de Hecke.

On est aussi amené à considérer l'espace de modules de niveau Iwahorique en p, $Y_{\mathrm{Iw}} \to Y$ qui paramètre des drapeaux complets autoduaux $\mathrm{Fil}^\bullet A[p]$. On désigne par X_{Iw} une compactification toroidale de Y_{Iw} ([**48**]).

2.2. Théorie de Hida pour le groupe GSp_{2g}. — La théorie est due à Hida ([**32**]), certains énoncés sont précisés dans [**P2**]. On va construire des familles p-adique de formes modulaires ordinaires de poids variables. La première étape est d'interpoler p-adiquement les faisceaux ω^κ. Il y a un obstacle évident : le rang du faisceau ω^κ est le rang de la représentation V^κ et il dépend donc de κ dès que $g \geq 2$. Il faut donc commencer par expliquer comment interpoler les représentations du groupe GL_g.

2.2.1. Interpolation des représentations du groupe GL_g *: l'induite continue.* — Considérons le groupe d'Iwahori $\mathrm{Iw} \subset \mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$ des matrices triangulaires supérieures modulo p. Soit N^0 le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$, qui se réduisent sur l'identité modulo p. On a la décomposition d'Iwahori : $\mathrm{Iw} = \mathrm{N}^0 \times \mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$.

Pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$, on peut considérer l'espace $\mathfrak{V}^\kappa$ des fonctions continues sur Iw à valeur dans $\mathbb{Z}_p$ qui vérifient $f(ib) = \kappa(b)f(i)$. C'est une représentation du groupe Iw. D'après la décomposition d'Iwahori, on déduit que $\mathfrak{V}^\kappa$ s'identifie à l'espace $\mathcal{C}^0(N^0, \mathbb{Z}_p)$. Ainsi, l'espace sous-jacent à la représentation $\mathfrak{V}^\kappa$ est indépendant de κ. Cela suggère la possibilité d'interpoler les différents $\mathfrak{V}^\kappa$.

On possède aussi une application évidente $V^\kappa \hookrightarrow \mathfrak{V}^\kappa$. Afin de comparer ces deux espaces, on définit un premier projecteur d'ordinarité sur $\mathfrak{V}^\kappa$. Pour $1 \leq i \leq g-1$, notons $d_i = \mathrm{diag}(p^{-1}1_i, 1_{g-i}) \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{Q})$ la matrice diagonale. On définit une action δ_i sur $\mathfrak{V}^\kappa$ par la formule $f \mapsto f(d_i^{-1}.d_i)$. On pose $\delta = \prod_{i=1}^{g-1} \delta_i$.

Lemme 2.1 **([P2], sect. 3.2)**. — *La suite d'opérateurs $(\delta^{N!})_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers un projecteur e sur $\mathfrak{V}^\kappa$. On possède un isomorphisme $eV^\kappa \simeq e\mathfrak{V}^\kappa$.*

On peut maintenant interpoler les représentations $\mathfrak{V}^\kappa$. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)]]$ et $\mathfrak{W} = \mathrm{Spf}\ \Lambda$. Soit $\kappa^{un} : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to \Lambda^\times$ le caractère universel. Pour tout caractère continu $\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to R^\times$ (où R est une algèbre I-adiquement complète et séparée pour un idéal $I \subset R$ qui contient p) on possède un unique morphisme d'algèbres $f : \Lambda \to R$ tel que $f \circ \kappa^{un} = \kappa$. Tous les caractères algébriques $\kappa \in X(\mathrm{T})$ induisent des caractères $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_p^\times$ et donc des points $\kappa \in \mathfrak{W}(\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p)$. On les appelle parfois les points classiques.

Soit $\mathfrak{V}^{\kappa^{un}}$ l'espace des fonctions continues sur Iw à valeur dans Λ qui vérifient $f(ib) = \kappa^{un}(b)f(i)$. La représentation $\mathfrak{V}^{\kappa^{un}}$ interpole les représentations $\{\mathfrak{V}^\kappa\}_{\kappa \in X(\mathrm{T})^+}$.

2.2.2. Tour d'Igusa. — On va utiliser la construction de l'induite continue afin de construire un faisceau qui interpole les différents faisceaux ω^κ. L'idée, due à Katz [**37**] et Hida [**32**], est de se restreindre au lieu ordinaire et de fabriquer un torseur sous le groupe Iw qui est relié au GL_g-torseur $T^\times$ via un isomorphisme de Hodge-Tate.

Soit $\mathfrak{X}$ la complétion formelle de X et $\mathfrak{X}^{or}$ l'ouvert ordinaire. On note $\mathfrak{IG} \to \mathfrak{X}$ le schéma formel p-adique qui paramètre des isomorphismes :

$$\mathbb{Z}_p^g \simeq \mathrm{T}_p(G^m)^D$$

où G^m désigne la partie multiplicative du groupe $G[p^\infty]$ et

$$\mathrm{T}_p(G^m)^D = \mathrm{Hom}(\mathrm{T}_p(G^m), \mathbb{Z}_p(1))$$

est le dual de Cartier de son module de Tate. C'est un torseur pro-étale sous le groupe $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$.

On note $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}$ le schéma formel $\mathfrak{IG}/\mathrm{Iw}$ qui est fini étale sur $\mathfrak{X}^{or}$. Ainsi, $\mathfrak{IG}$ est un torseur sous Iw au dessus de $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}$.

On considère le caractère

$$(\kappa^{un})' : \mathrm{B}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\ '\ } \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\kappa^{un}} \Lambda^\times$$

où le premier morphisme est la réduction modulo le radical unipotent et le second morphisme $'$ est l'involution $(x_1, \cdots, x_g) \mapsto (x_g^{-1}, \cdots, x_1^{-1})$. On définit un faisceau $\mathfrak{w}^{\kappa^{un}}$ sur $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m} \times \mathfrak{W}$. C'est le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathfrak{IG}\times\mathfrak{W}}$ des fonctions qui se transforment selon le caractère $(\kappa')^{un}$ sous l'action du groupe $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$. Pour tout caractère continue $\kappa : \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p) \to R^\times$ on note $\mathfrak{w}^\kappa = \mathfrak{w}^{\kappa^{un}} \otimes_\Lambda R$ le faisceau obtenu par changement de base. Ce faisceau réalise l'interpolation des faisceaux ω^κ dans le sens suivant.

Proposition 2.2. — *Pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$, on possède une injection canonique :*

$$\omega^\kappa|_{\mathfrak{X}_0(p)^{or-m}} \hookrightarrow \mathfrak{w}^\kappa.$$

La proposition se déduit (voir [**P2**], sect. 4.2) de l'isomorphisme de Hodge-Tate

$$\mathrm{T}_p(G^m)^D \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}} \simeq \omega_G \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{IG}}.$$

L'inclusion précédente est localement pour la topologie pro-étale celle de $V^{\kappa'}$ dans $\mathfrak{V}^{\kappa'}$.

2.2.3. Famille de formes modulaires p-adiques. — On définit le Λ-module des familles de formes modulaires p-adiques cuspidales $M_{cusp}^{p-ad} = \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m} \times \mathfrak{W}, \mathfrak{w}^{\kappa^{un}}(-D))$. Il possède la propriété importante de changement de base :

Proposition 2.3 **([32], th. 3.2, [P2], th. 6.2).** — *Pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$, le morphisme de changement de base :*

$$M_{cusp}^{p-ad} \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}, \mathfrak{w}^\kappa(-D))$$

est surjectif.

Pour $g = 1$, la proposition résulte du caractère affine de $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}$. La cuspidalité est d'ailleurs superflue. Pour $g \geq 2$, le lieu ordinaire est affine dans la compactification minimale mais les faisceaux sont définis sur la compactification toroidale. La proposition se démontre en étudiant la projection du faisceau $\mathfrak{w}^{\kappa^{un}}(-D)$ vers la compactification minimale.

Remarque 2.4. — *Quand on travaille avec les variétés de Shimura non-compactes, on doit souvent utiliser les deux types de compactifications algébriques : minimale et toroidales. Un résultat fondamental est le théorèmes d'annulation pour les images directes supérieures des faisceaux localement libres automorphes cuspidaux. Ils permettent de passer d'un type de compactification à l'autre et de tirer le maximum d'avantages des propriétés de ces deux compactification. Dans* [**32**]*, une propriété un peu moins forte que le théorème d'annulation était utilisée. Ces théorèmes d'annulation ont été ensuite démontrés simultanément dans* [**29**] *et dans* [**AIP1**] *pour le faisceau constant, puis en grande généralité dans* [**41**].

2.2.4. La variété de Hecke ordinaire. — On réalise le groupe GSp_{2g} comme le sous-groupe de GL_{2g} des matrices symplectique à un facteur de similitude près pour la forme symplectique de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

où A est la matrice carré de taille g composée de 1 sur l'anti-diagonale et de 0 ailleurs. Soit K_{Iw} le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p)$ des matrices triangulaires supérieures modulo p. On note $\mathcal{H}_p$ la sous-algèbre de Hecke dilatante de l'algèbre $\mathcal{C}_c^0(\mathrm{GSp}_{2g}//K_{\mathrm{Iw}}, \mathbb{Z}_p)$. C'est une algèbre commutative, engendrée par g opérateurs donnés par les doubles classes $U_i = K_{\mathrm{Iw}}\mathrm{diag}(pd_i, p^2 d_{g-i})K_{\mathrm{Iw}}$ pour $1 \leq i \leq g-1$ ainsi que $U_g = K_{\mathrm{Iw}}\mathrm{diag}(1_g, p1_g)K_{\mathrm{Iw}}$. Le module M_{cusp}^{p-ad} est gigantesque. Suivant l'idée classique de Hida, on peut en prendre la partie ordinaire pour l'opérateur $U = \prod_{i=1}^{g} U_i \in \mathcal{H}_p$. On note e le projecteur d'ordinarité associé.

Théorème 2.5 **([32], th. 1.1, [P2], th. 7.1).** — *Le module eM_{cusp}^{p-ad} est un Λ-module projectif de type fini. Pour tout $\kappa \in X(T)^+$, on a un isomorphisme de classicité au niveau du faisceau :*

$$eM_{cusp}^{p-ad} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathbb{Z}_p \simeq e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}, \omega^\kappa(-D)).$$

Grâce au lemme de Nakayama, on déduit la finitude du module eM_{cusp}^{p-ad} de celle de $eM_{cusp}^{p-ad} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathbb{Z}_p$. On établit dans un premier temps la classicité "faisceautique" $eM_{cusp}^{p-ad} \otimes_{\Lambda,\kappa} \mathbb{Z}_p \simeq e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}, \omega^\kappa(-D))$ en utilisant le lemme 2.1. On démontre ensuite que $e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}, \omega^\kappa(-D))$ est un module de type fini en contrôlant les pôles le long du lieu non-ordinaire.

Soit $\mathcal{H}^{Np}$ l'algèbre de Hecke sphérique de niveau premier à Np. On note $\mathbb{T}^{ord}$ l'algèbre des endomorphismes de $e\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_0(p)^{or-m}, \mathfrak{w}^{\kappa^{un}}(-D))$ engendrée par $\mathcal{H}^{Np} \otimes \mathcal{H}_p$. C'est une Λ-algèbre de type fini sans torsion. Soit $\mathfrak{E}^{ord} \to \mathfrak{W}$ la schéma formel affine associé. C'est la variété de Hecke ordinaire. Elle est finie et sans torsion sur $\mathfrak{W}$.

2.3. Théorie de Coleman pour le groupe GSp_{2g}**.** — La théorie des familles de pente finie est un raffinement de la théorie précédente. L'objectif est de définir un sous-espace de l'espace des formes modulaires p-adiques sur lequel on puisse faire de l'analyse spectrale pour l'algèbre $\mathcal{H}_p$. Pour $g = 1$, Katz dans [**37**] introduit les formes surconvergentes de poids entier et observe le caractère compact de l'opérateur U. Dans [**16**], Coleman définit les familles de formes surconvergentes en utilisant la famille d'Eisenstein et étend la théorie spectrale de Serre au cas d'une base générale pour construire des familles de pente finie. Dans [**18**], Coleman et Mazur introduisent la courbe de Hecke. Nous allons à présent décrire une approche géométrique à la construction des familles de formes surconvergentes qui n'utilise pas la famille d'Eisenstein. Cette approche fonctionne pour des variétés de Shimura PEL. Voir [**3**], [**P4**], [**AIP1**], [**AIP2**], [**9**].

2.3.1. Au niveau des représentations du groupe GL_g *: induite analytique.* — On reprend la théorie esquissée au numéro 2.2.1 en remplaçant les induites continues par des induites analytiques.

Pour tout rationnel $w > 0$, on note $\mathrm{GL}_{g,w} \subset \mathrm{GL}_g$ le sous-groupe adique analytique de GL_g des matrices qui sont congrues modulo p^w à un élément de $\mathrm{GL}_g(\mathbb{Z}_p)$. Notons $\mathrm{Iw}_w \subset \mathrm{GL}_g$ le sous-groupe des matrices qui sont congrues à une élément de Iw modulo p^w, B_w, T_w, N_w^0 ce définissent de la même façon.

On note $\mathcal{W}$ l'espace adique analytique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ associé à $\mathfrak{W}$. Soit $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{W}$ un ouvert quasi-compact. Il existe w tel que le caractère universel se prolonge en un accouplement $\kappa_{\mathcal{U}} : \mathrm{T}_w \times \mathcal{U} \to \mathbb{G}_m$. On dit que le caractère κ^{un} est w-analytique sur $\mathcal{U}$.

On définit la représentation du groupe Iw_w :

$$V_w^{\kappa_{\mathcal{U}}} = \{f : \mathrm{Iw}_w \times \mathcal{U} \to \mathbb{A}^1 \times \mathcal{U},\ \forall (i,b) \in \mathrm{Iw}_w \times \mathrm{B}_w \quad f(ib) = \kappa_{\mathcal{U}}(b) f(i)\}.$$

Si $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$, alors κ est algébrique et donc w-analytique pour tout w. On a une suite d'inclusion $V^\kappa \to V_w^\kappa \to \mathfrak{V}^\kappa$.

Remarque 2.6. — *Supposons que $g = 2$ et $\kappa = (k, 0)$ avec $k \geq 0$. Par restriction à $\mathrm{N}^0 \simeq \mathbb{Z}_p$, l'espace V^κ s'identifie à l'espace des polynômes de degré inférieur à k, V_w^κ à l'espace des fonctions w-analytique sur $\mathbb{Z}_p$ et $\mathfrak{V}^\kappa$ à l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$.*

Pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T})^+$ et tout $w \in]0, 1[$, on possède en fait une suite exacte de type BGG analytique ([**34**], [**51**]) :

$$0 \to V^\kappa \to V_{w^-}^\kappa \to \oplus_\alpha V_{w^-}^{\alpha.\kappa}$$

où $V_{w^-}^\kappa = \mathrm{colim}_{w'<w} V_{w'}^\kappa$ et la somme se fait sur les racines simples positives α de $X(\mathrm{T})$. Les opérateurs $\{\delta_i\}_{1 \leq i \leq g-1}$ du numéro 2.2.1 agissent dans ce contexte. L'opérateur δ améliore la convergence et il est donc compact sur $V_{w^-}^\kappa$. A l'aide de la suite BGG décrite au dessus, on montre :

Lemme 2.7. — *Pour tout $w \in]0, 1[$, tout vecteur de V_w^κ de pente pour δ_i strictement inférieure à $k_i - k_{i+1} + 1$ est dans V^κ.*

Remarque 2.8. — *Dans le cas $g = 2$, $\kappa = (k, 0)$, l'application $V_{w^-}^{\kappa} \to V_{w^-}^{\alpha.\kappa}$ est l'opérateur différentiel "dérivée $k+1$-ième", qui a pour noyau les fonctions polynomiales de degré au plus k.*

2.3.2. Théorie du sous-groupe canonique et modification du faisceau ω_G^+. — On note $\mathcal{X}$ l'espace adique analytique associé à X. Pour tout rationnel $v \in [0,1]$ on note $\mathcal{X}(v)$ l'ouvert rationnel constitué des points $x \in \mathcal{X}$ qui vérifient $|\widetilde{\mathrm{Hasse}}|_x \geq |p^v|_x$ où $\widetilde{\mathrm{Hasse}}$ désigne n'importe quel relèvement local de l'invariant de Hasse. Ainsi, $\mathcal{X}(0) = \mathcal{X}^{or}$ est l'ouvert ordinaire.

D'après la théorie du sous-groupe canonique ([**37**], [**1**], [**2**], [**24**]), si $v < \frac{1}{2p^{n-1}}$ on possède un sous-groupe canonique d'échelon n, $H_n \subset G[p^n]$ sur $\mathcal{X}(v)$. Il est localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ et sa restriction à $\mathcal{X}(0)$ est le groupe $G^m[p^n]$.

Introduisons $\omega_{H_n}^+$ le faisceau conormal entier de H_n. Pour le définir, on peut fixer un modèle formel $\mathfrak{X}(v)$ pour $\mathcal{X}(v)$ sur lequel H_n se prolonge en un groupe fini et plat. On possède alors le faisceau conormal usuel ω_{H_n} sur $\mathfrak{X}(v)$. On définit $\omega_{H_n}^+$ comme son image inverse sur $\mathcal{X}(v)$ (comme faisceau de $\mathscr{O}_{\mathcal{X}(v)}^+$-modules). Il est bien sûr de p-torsion. On possède une application de Hodge-Tate

$$\mathrm{HT} \otimes 1 : H_n^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_{\mathcal{X}(v)}^+ \to \omega_{H_n}^+$$

qui est un isomorphisme sur le lieu ordinaire et qui a un petit noyau et conoyau en général. On possède aussi une surjection $\omega_G^+ \to \omega_{H_n}^+$. On considère, pour la topologie étale, la modification suivante $\mathcal{F}$ du faisceau ω_G^+ : c'est l'image inverse de $\mathrm{HT} \otimes 1(H_n^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_{\mathcal{X}(v)}^+)$ dans ω_G^+.

On montre ([**AIP1**], sect. 4.3), que $\mathcal{F}$ est un faisceau localement libre pour la topologie étale de $\mathscr{O}_{\mathcal{X}(v)}^+$-modules et qu'on possède un isomorphisme déduit de l'application de Hodge-Tate pour $w \in]0, n - v\frac{p^n}{p-1}]$:

$$\mathrm{HT}_w : H_n^D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_{\mathcal{X}(v)}^+/p^w \to \mathcal{F}/p^w\mathcal{F}.$$

Remarque 2.9. — *Sur le lieu ordinaire, on disposait d'un isomorphisme de Hodge-Tate entier. Cet isomorphisme de Hodge-Tate modifiée est une variante, valable sur un voisinage strict du lieu ordinaire. Pour l'obtenir, on doit travailler avec des coefficients de torsion et modifier le faisceau ω_G.*

Soit $\mathcal{T}_w^\times$ le torseur des isomorphismes $\psi : (\mathscr{O}_{\mathcal{X}(v)}^+)^g \simeq \mathcal{F}$ tels que modulo p^w, la base canonique de $(\mathscr{O}_{\mathcal{X}(v)}^+/p^w)^g$ s'envoie sur $\mathrm{HT}_w(H_n^D)$. C'est un $\mathrm{GL}_{g,w}$-torseur pour la topologie étale.

2.3.3. Construction des faisceaux de Banach. — Soit $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(v) \to \mathcal{X}(v)$ le revêtement étale qui paramètre des drapeaux complets $\mathrm{Fil}^\bullet H_1$. Le morphisme $\mathcal{T}_w^\times \to \mathcal{X}(v)$ se factorise à travers un morphisme $\pi : \mathcal{T}_w^\times \to \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(v)$ qui est un torseur étale sous le groupe Iw_w. On est donc en mesure d'appliquer la théorie esquissée au numéro 2.3.1 pour construire une famille de faisceaux. Ce sont des faisceaux d'un type un peu particulier.

Définition 2.10 **([AIP1], def. A.2.1.2).** — *Soit $\mathcal{S}$ un espace adique analytique. Un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathcal{S}$ est un faisceau de Banach si :*

1. *Pour tout ouvert quasi-compact $\mathcal{V}$ de $\mathcal{S}$, $\mathscr{F}(\mathcal{V})$ est un $\mathscr{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})$-module de Banach.*
2. *Il existe un recouvrement $\mathcal{S} = \cup_i \mathcal{V}_i$ par des ouverts quasi-compacts tel que pour tout ouvert quasi-compact $\mathcal{W}_i \subset \mathcal{V}_i$, on a*
$$\mathscr{F}(\mathcal{W}_i) = \mathscr{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}_i)\hat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V}_i)}\mathscr{F}(\mathcal{V}_i).$$

Remarque 2.11. — 1. *Un faisceau cohérent est un faisceau de Banach.*

2. *Il n'est pas vrai qu'un faisceau de Banach sur un affinoide est engendré par ses sections globales et n'a pas de cohomologie cohérente supérieure. Dans* [**52**], *sect. 15.1, il est construit un espace affinoide X et un morphisme $i : V \to X$ qui est localement au-dessus de X affine, mais qui n'est pas affine. Le faisceau $i_\star\mathscr{O}_V$ est un faisceau de Banach sur X. On vérifie facilement que $i_\star\mathscr{O}_V$ a de la cohomologie en degré* 1.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert affine de $\mathcal{W}$. On suppose que le caractère κ^{un} est w-analytique sur $\mathcal{U}$. On définit $\omega_w^{\kappa_{\mathcal{U}}}$ sur $\mathcal{X}(v)$. C'est le sous-faisceau de $\mathscr{O}_{\mathcal{T}_w^\times \times \mathcal{U}}$ des fonctions qui se transforment selon le caractère $\kappa'_{\mathcal{U}}$ sous l'action de B_w. C'est un faisceau de Banach.

On note $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger,v,w}(\mathcal{U})$ le module des sections globales du faisceau $\omega_w^\kappa(-D)$ sur $\mathcal{U}$. C'est l'espace de Banach des formes v-surconvergentes, w-analytiques, paramétrées par $\mathcal{U}$.

Proposition 2.12 **([AIP1], prop. 8.2.3.3).** — *Le module $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger,v,w}(\mathcal{U})$ est facteur direct d'un $\mathscr{O}_{\mathcal{W}}(\mathcal{U})$-module de Banach orthonormalisable. Pour tout caractère $\kappa \in \mathcal{U}$, le morphisme de spécialisation $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger,v,w}(\mathcal{U}) \to \mathcal{M}_{cusp}^{\dagger,v,w}(\kappa)$ est surjectif.*

Cette proposition est l'analogue de la proposition 2.3. Le principe de démonstration reste le même : on projette sur un voisinage affine du lieu ordinaire dans la compactification minimale. Néanmoins, les mauvaise propriétés cohomologiques des faisceaux de Banach sur les affinoides compliquent notre tâche.

Passons à la limite inductive sur v et w. On définit l'espace des formes surconvergentes localement analytiques paramétrées par $\mathcal{U}$:
$$\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger}(\mathcal{U}) = \mathrm{colim}_{v\to 0, w\to\infty}\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger,v,w}(\mathcal{U}).$$
C'est un limite inductive compact d'espaces de Banach. On possède en fait un faisceau $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger}$ sur $\mathcal{W}$ dont les sections sur $\mathcal{U}$ sont $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger}(\mathcal{U})$.

2.3.4. Variétés de Hecke. — L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_p$ agit sur le faisceau $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger}$. Les opérateurs $U_1, \cdots, U_{g-1}$ améliorent l'analyticité (ils agissent localement sur le faisceau comme les opérateur δ_i) et l'opérateur U_g améliore la convergence ([**AIP1**], sect. 6.2). On note $U = \prod_{i=1}^g U_i$. C'est un opérateur compact. La variété spectrale $\mathcal{Z}$ associée est le fermé de $\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ qui a pour point des couples (κ, α^{-1}) où $\kappa \in \mathcal{W}$ et α est une valeur propre non-nulle de U agissant sur $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger}|_\kappa$. Coleman a démontré que le morphisme $\mathcal{Z} \to \mathcal{W}$ est localement fini et plat sur la base et la source. Grâce à Coleman, on possède un faisceau cohérent d'espace propre généralisé $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{Z}$ découpé dans $\mathcal{M}_{cusp}^{\dagger}$. On peut alors considérer $\mathscr{O}_{\mathcal{E}}$, la $\mathscr{O}_{\mathcal{Z}}$-algèbre cohérente engendrée par l'image de $\mathcal{H}^{Np}$ dans $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathcal{Z}}}(\mathcal{M})$. On note $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ la variété de Hecke associée à $\mathcal{Z}$. Le morphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{W}$ est localement fini et sans torsion.

2.4. Les formes de petite pente sont classiques. — Nous démontrons qu'un point de $\mathcal{E}$ de poids classique et de pente petite devant le poids provient d'une vraie forme modulaire (une forme classique). Pour $g = 1$, Hida dans le cas ordinaire [**31**], puis Coleman [**16**] dans le cas de pente fini ont obtenu un tel critère de classicité. Kassaei [**35**] a obtenu une nouvelle démonstration du théorème de Coleman. En généralisant la méthode de Kassaei, on obtient :

Théorème 2.13 **([AIP1], thm. 7.1.1, [BPS]).** — *Soit f une forme surconvergente localement analytique de poids $\kappa = (k_1, \cdots, k_g) \in X(\mathrm{T})^+$. Si f est de pente strictement inférieure à $k_i - k_{i+1} + 1$ pour U_i, $1 \leq i \leq g$, et de pente strictement inférieure à $k_g + \frac{g(g+1)}{2}$ pour U_g alors f est classique.*

La démonstration du théorème s'effectue en deux-temps. On démontre d'abord un théorème de classicité au niveau du faisceau, à savoir qu'un telle forme surconvergente localement analytique est en fait algébrique : elle provient d'une section surconvergente du faisceau ω^κ. Ceci repose sur la résolution de BGG localement analytique et le lemme 2.7. On prouve ensuite que la forme est classique en utilisant l'opérateur U_g. C'est de loin la partie la plus difficile de la démonstration qui fait l'objet de [**PS2**] et [**BPS**]. Supposons pour simplifier que f est propre pour U_g. On a $U_g f = a_g f$. On voit alors, suivant [**12**], la relation $f = a_g^{-1} U_g f$ comme une équation fonctionnelle reliant la valeur de f en différents points de l'espace de modules. Cette équation fonctionnelle permet d'étendre le domaine de définition de f grâce au principe général suivant : pour tout point de l'espace de module x, les points images par la correspondance sont "plus proches" du lieu ordinaire multiplicatif $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(0)$. Ainsi, si $U_g(x)$ est dans le domaine de définition de f, la formule $f(x) = a_g^{-1} U_g f(x)$ permet de définir f en x. Néanmoins, il y a des zones de l'espace de modules $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}$ qui ne sont pas contractées par l'opérateur U_g vers $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}(0)$. La proposition suivante caractérise les points problématiques :

Proposition 2.14 **([P3], cor. 2.3.3).** — *Si $x = (G, \mathrm{Fil}^\bullet G[p]) \in \mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}$ n'est pas contracté vers le lieu ordinaire multiplicatif, alors $G[p^\infty]$ est un Barsotti-Tate non-simple.*

Ceci permet d'analyser la correspondence U_g au voisinage de tels points problématiques. On peut découper la correspondance U_g selon les bonnes contributions qui contractent et les mauvaises. Selon la méthode de Kassaei et sous l'hypothèse poids-pente, on peut fabriquer une série qui converge vers le prolongement souhaité.

Remarque 2.15. — *Dans un premier travail* [**P3**], *on a démontré le théorème de classicité pour le groupe* $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$. *On effectuait le prolongement sur un gros ouvert de la variété de Siegel, puis utilisait un argument de prolongement automatique. Dans un second travail avec Stroh* [**PS2**], *on étendait le résultat aux données PEL déployées en p de type A et C. Dans* [**PS3**], *on démontrait le résultat pour les variétés de Hilbert sur un corps totalement réel F non-ramifié. Il s'agissait du premier cas non-déployé. Dans ce cas, le prolongement était construit sur toute la variété de Hilbert. Dans sa* *thèse, Bijakowski a compris comment unifier et simplifier ces différents résultats et a traité le cas de variétés PEL très générales.*

2.5. Perspective : théorie de Hida supérieure. — Dans toute la théorie des formes modulaires p-adiques dont il a été question jusqu'à présent, on travaille avec un seul groupe de cohomologie : le H^0. D'un point de vue technique, c'est parce qu'on s'est systématiquement restreint au lieu ordinaire, qui est affine dans la compactification minimale. D'un point de vue philosophique, ceci s'explique par le fait que sur $\mathfrak{W}$, l'ensemble des poids classiques κ tels que ω^κ n'a de la cohomologie qu'en degré 0 est Zariski dense.

Fixons $g = 2$. Pour la famille de poids $(k, 2)$ avec $k \geq 2$, des calculs de $(\mathfrak{p}, K)$-cohomologie (**[28]**) montrent que le faisceau $\omega^{(k,2)}(-D)$ possède sur $\mathbb{C}$ de la cohomologie en (au moins) deux degrés : 0 et 1.

On peut chercher à interpoler ces groupes de cohomologie dans une famille à une variable. Dans un travail en préparation, on montre le théorème suivant :

Théorème 2.16. — *Il existe un complexe parfait de $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$-modules $M^\bullet$, d'amplitude $[0,1]$, tel que pour tout $k \geq 2$, on a*

$$M^\bullet \otimes^L_{\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]],k} \mathbb{Q}_p \simeq e\mathrm{R}\Gamma(X_{\mathrm{Iw}}, \omega^{(k,2)}(-D)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

Ici e est un projecteur d'ordinarité. Pour construire ce complexe parfait, on ne travaille pas sur le lieu ordinaire, mais sur la réunion des deux strates de Newton de p-rang au moins 1.

2.6. Le halo spectral. — Nous supposons à présent que $g = 1$. La théorie des familles de pente finie présentée dans la section précédente est une théorie analytique sur $\mathbb{Q}_p$. La théorie de Hida est en revanche une théorie entière sur $\mathrm{Spf}\,\Lambda$. Soit $P(X)$ la série caractéristique de l'opérateur U. Coleman démontre dans **[17]** que $P(X)$ est à coefficients dans Λ (l'algèbre des fonctions bornées par 1 sur $\mathcal{W}$). Fixons un isomorphisme $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times][[T]] = \oplus_{\chi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times \to \mathbb{F}_p^\times} \mathbb{Z}_p[[T]]$ (on suppose $p \geq 3$ pour simplifier la discussion). La topologie sur Λ est la topologie (p, T)-adique. La série caractéristique $P(X)$ se décompose donc en les séries caractéristiques $P_\chi(X) \in \mathbb{Z}_p[[T]][[X]]$. L'observation cruciale de Coleman est que $P_\chi(X) \mod p \in \mathbb{F}_p[[T]][[X]]$ est une fonction entière de la variable X sur le corps non-archimédien $\mathbb{F}_p((T))$. Coleman conjecture alors :

Il existe un espace de formes surconvergentes sur le corps $\mathbb{F}_p((T))$ et un opérateur compact U dont la série caractéristique vaut $P_\chi(X) \mod p$.

Le poids de ces formes surconvergentes doit être le caractère $\overline{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ correspondant au quotient $\Lambda \to \mathbb{F}_p[[T]]$ donné par la réduction modulo p et la projection sur la composante χ.

2.6.1. Formes modulaires surconvergentes en caractéristiques positives. — Désormais, X désigne donc la courbe modulaire sur $\mathbb{Z}_p$. Soit $\overline{X}$ sa réduction modulo p et $\overline{\mathcal{X}}$ l'éspace adique analytique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_p((T)), \mathbb{F}_p[[T]])$ associé à $\overline{X} \times \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p((T))$.

Pour tout rationnel $v \in [0,1]$ on note $\overline{\mathcal{X}}(v)$ l'ouvert rationnel constitué des points $x \in \overline{\mathcal{X}}$ qui vérifient $|\mathrm{Hasse}|_x \geq |T^v|_x$ où Hasse est l'invariant de Hasse. On a donc recopié la définition usuelle en remplaçant p par T.

On souhaite définir des faisceaux associés aux représentations du groupe $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$. Contrairement au cas de la caractéristique zéro, ce caractère n'est pas localement analytique ! Cependant, on est sauvé par le fait que la théorie du sous-groupe canonique marche beaucoup mieux en égale caractéristique. Pour tout entier n, on possède un sous-groupe canonique $H_n = G[F^n]$ (le noyau du Frobenius itéré n fois) sur $\overline{\mathcal{X}}(v)$. De plus, le groupe H_n^D est étale. Ainsi, le groupe $\lim_n H_n^D$ est localement pour la topologie pro-étale isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. L'idée est de considérer le torseur des trivialisations du groupe $\lim_n H_n^D$ puis des fonctions homogènes de poids $\overline{\kappa}_\chi$ sur ce torseur. Le problème est que ce torseur est représentable par une limite projective d'espaces adiques analytiques (la limite projective sur n du torseur des trivialisations de H_n^D) et on doit éventuellement "compléter" cette limite projective si on veut espérer obtenir des fonctions homogènes non-nulles de poids $\overline{\kappa}_\chi$. Pour compléter, il faut choisir une topologie sur la limite inductive et ce choix est assez délicat. La définition suivante fonctionne :

Définition 2.17 **([AIP3], sect. 4.4.6)**. — *Une forme v-surconvergente f de poids $\overline{\kappa}_\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{F}_p[[T]]^\times$ est une loi fonctorielle qui à*

1. *(R, R^+) une $(\mathbb{F}_p((T)), \mathbb{F}_p[[T]])$-algèbre affinoide complète de Tate telle que R^+ est bornée dans R,*
2. *$x \in \mathcal{X}(v)(R, R^+)$ un point correspondant à un schéma semi-abélien G qui s'étend en un schéma semi-abélien sur* Spf R^+*,*
3. *$\psi : \mathbb{Z}_p \to \lim_n H_n^D$ un isomorphisme,*

associe un élément $f(x,\psi) \in R$ qui satisfait $f(x, \sigma\psi) = \overline{\kappa}_\chi^{-1}(\sigma) f(x,\psi)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Proposition 2.18 **([AIP3], thm. 4.1)**. — *Pour v assez proche de 0, les formes v-surconvergentes sont les sections d'un faisceau localement libre $\omega^{\overline{\kappa}_\chi}$ sur $\mathcal{X}(v)$.*

Remarque 2.19. — *La proposition entraîne que l'espace des formes v-surconvergentes est un espace de Banach de dimension infini puisque $\mathcal{X}(v)$ est un espace affinoide. Il n'est pas du tout clair à priori que cet espace est non trivial. Voici une situation tout à fait semblable. Le rôle de $\mathcal{X}(v)$ est joué par* $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$. *On considère au lieu de la tour des trivialisations des H_n^D, la tour cyclotomique* $\lim_n \mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), \mathbb{Z}_p(\zeta_{p^n}))$ *et au lieu du caractère $\overline{\kappa}_\chi$, le caractère identique $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$. On sait qu'il n'existe pas d'élément non-nul $x \in \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ tel que $\sigma.x = \sigma x$ pour $\sigma \in \mathbb{Z}_p^\times$. Dans la situation des formes surconvergentes, une étude délicate (***[AIP3]***, prop. 3.4) de la ramification des groupes H_n^D le long du lieu supersingulier nous permet de montrer que notre espace de formes surconvergentes est non-trivial.*

On peut également construire un opérateur U qui améliore la convergence et est donc compact. Il admet une série caractéristique. On va vérifier la conjecture de Coleman et montrer que cette série caractéristique est bien $P_\chi \mod p$ grâce à la construction de familles T-adiques que nous expliquons dans la section suivante.

2.6.2. Familles de pente finie pour la topologie T-adique. — On fait le lien entre l'espace construit précédemment et l'espace des formes modulaires surconvergentes en caractéristique zéro. Désignons par $\mathcal{W}^{an} = \mathrm{Spa}(\Lambda,\Lambda)^{an}$, l'ouvert analytique de $\mathrm{Spa}(\Lambda,\Lambda)$. L'espace $\mathcal{W}^{an}$ est la réunion de $\mathcal{W}$ (l'espace adique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p,\mathbb{Z}_p)$ associé à $\mathrm{Spa}(\Lambda,\Lambda)$ qui est une réunion finie de disques ouverts de rayon 1) et d'un nombre fini de points en caractéristique p : les points $\{\overline{\kappa}_\chi\}$. Les points de caractéristique p ont pour système fondamental de voisinages dans $\mathcal{W}$ les anneaux d'équation $|T| \geq |p^v|$ avec $v > 0$.

On peut décrire chaque composante connexe de $\mathcal{W}^{an}$ comme le recollement de deux disques : l'un de centre $|T| = 0$ et de rayon $|T| \leq |p|$, l'autre de centre $|p| = 0$ et de rayon $|p| \leq |T|$. Sur le premier disque, le paramètre est T et la topologie sur l'espace de fonctions est la topologie p-adique. Sur le second disque, le paramètre est p et la topologie sur l'espace de fonctions est T-adique. L'intersection des deux disques est un anneau d'équation $|T| = |p|$. Sur cet anneau, T et p sont égaux à une unité près et les topologies T et p-adiques coïncident.

On note $\mathcal{X}^{an}$ l'espace adique analytique $X \times \mathcal{W}^{an}$. C'est une famille de courbes modulaires analytiques paramétrées par les points de $\mathcal{W}^{an}$. On observera le passage de la caractéristique 0 au-dessus de $\mathcal{W}$ à la caractéristique p au dessus du bord $\{\overline{\kappa}_\chi\}$. On note $\mathcal{X}^{an}(v)$ l'ouvert rationnel d'équation

$$|\widetilde{\mathrm{Hasse}}| \geq \sup\{|p^v|, |T^v|\}.$$

On observe qu'on a fusionné les définitions de voisinage strict de caractéristique 0 et de caractéristique p.

Théorème 2.20 **([AIP3], thm. 1.2).** — *Pour v assez petit, on possède un faisceau localement libre inversible $\omega^{\kappa^{un}}$ sur $\mathcal{X}^{an}(v) \times \mathcal{W}^{an}$ des formes surconvergentes qui interpole les constructions précédentes de formes surconvergentes en caractéristique* 0 *et p.*

L'image directe de ce faisceau sur $\mathcal{W}^{an}$ est un faisceau de Banach sur $\mathcal{W}^{an}$ et en passant à la limite sur v on obtient le faisceau $\mathcal{M}^{\dagger,an}$ des formes modulaires surconvergentes. Sa fibre en tout caractère κ de $\mathcal{W}^{an}$ (qui peut être un point de caractéristique 0 ou p) est l'espace des formes surconvergentes de poids κ.

La construction du faisceau $\omega^{\kappa^{un}}$ est assez compliquée. En effet, en caractéristique 0 on avait utilisé la propriété que le caractère universel est localement analytique et la théorie du sous-groupe canonique à un niveau fini. En caractéristique positive, on utilise l'existence d'un sous-groupe canonique de niveau infini. Pour recoller les deux constructions, on utilise ([**AIP3**], sect. 6) un revêtement pro-fini de $\mathcal{X}^{an}(v) \times \mathcal{W}^{an}$ (la tour anti-canonique introduite dans [**49**]) sur lequel on a tautologiquement un sous-groupe canonique d'ordre infini. On peut facilement recoller les deux constructions sur ce revêtement. On étudie ensuite la descente au moyen de traces de Tate.

On disposait jusqu'à présent d'une courbe de Hecke : $\mathcal{E} \to \mathcal{Z} \to \mathcal{W}$. On peut à présent la prolonger au-dessus de $\mathcal{W}^{an}$ en

$$\mathcal{E}^{an} \to \mathcal{Z}^{an} \to \mathcal{W}^{an}.$$

La fibre de $\mathcal{E}^{an}$ au-dessus d'un point $\kappa \in \mathcal{W}^{an}$ est l'ensemble des systèmes de valeurs propres de formes de pente finie. On peut étendre le théorème de Coleman à tout $\mathcal{E}^{an}$:

Théorème 2.21 **([AIP3], thm. 1.3)**. — *Le morphisme $\mathcal{E}^{an} \to \mathcal{W}^{an}$ est localement sur la source et le but fini et sans torsion.*

Le théorème implique en particulier que toute forme f de pente finie de caractéristique p s'insère dans une famille F de pente finie pour la topologie T-adique. La forme f est donc une limite de formes surconvergentes de caractéristique 0. On peut même être plus précis.

Proposition 2.22. — *Une forme propre surconvergente de pente finie de poids $\overline{\kappa}_\chi$ est limite d'une suite de formes classiques de poids k (avec nebentypus en p !) pour n'importe quel $k \geq 2$.*

Expliquons la démonstration. Soit f la forme de la proposition et F une famille de pente finie passant par f. Voyons $k \in \mathbb{Z}$ comme un caractère algébrique de $\mathbb{Z}_p^\times$. Soit $\{\chi_n : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times\}$ une suite de caractères finis de conducteur p^n. On suppose de plus que $\chi_n|_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times} = \chi k^{-1}$ est indépendant de n. On vérifie facilement que la suite de caractères $\{k\chi_n\}$ converge dans $\mathcal{W}^{an}$ vers le caractère $\overline{\kappa}_\chi$. Ainsi, on possède sur la famille F une suite de points $\{f_n\}$ de poids $k\chi_n$ pour tout n suffisamment grand, qui converge vers f. Comme la famille F est de pente finie pour la topologie T-adique, on en déduit que la pente p-adique de f_n tend vers 0. La pente p-adique de f_n est donc strictement inférieure à 1 dès que n est assez grand. D'après le théorème de classicité de Coleman, f_n est classique.

Remarque 2.23. — *Au bord, on oublie donc la partie "algébrique" du poids. Cela donne envie de passer par le bord pour changer cette partie algébrique...*

Remarque 2.24. — *Dans* **[AIP4]**, *on étend la théorie au groupe GL_2/F avec F un corps totalement réel. Dans ce contexte, les composantes de caractéristique p de l'espace des poids restent de codimension 1, et sont donc de dimension strictement positive : on a donc de véritables familles de pente finie en caractéristique positive.*

2.7. Quelques perspectives et des questions ouvertes. —

2.7.1. Pentes de l'opérateur U. — Il est conjecturé par Coleman-Mazur-Buzzard-Kilford que les pentes de l'opérateur U sur les formes surconvergentes en caractéristique p déterminent les pentes de l'opérateur U dans un grand voisinage de celle-ci :

Conjecture 2.25 **([43])**. — *Le polygone de Newton T-adique de P est constant au voisinage de $\overline{\kappa}_\chi$. Plus précisément, il est constant en tous les points x de rang 1 de $\mathcal{W}^{an}$ qui sont sur le disque de centre $\overline{\kappa}_\chi$ et d'équation $|p|_x < |T|_x$*

Pour les formes surconvergentes quaternioniques, cette conjecture est démontrée dans la prépublication [**43**]. Signalons également que dans [**6**], il est démontré que la conjecture entraîne que les pentes du polygone de Newton de $P_\chi \mod p$ forment une union finie de progressions arithmétiques. Ce résultat est obtenu indépendamment dans [**43**].

1. Peut-on comprendre directement sur le module $\mathcal{M}^{\dagger,an}_{\bar{\kappa}_\chi}$ l'existence de cette progression arithmétique ?
2. Peut-on démontrer la conjecture par une méthode géométrique ?

2.7.2. Théorie de Hodge T-adique et modularité. — Soit $f \in M^{\dagger}_{\bar{\kappa}_\chi}$ une forme surconvergente de pente finie, propre pour l'algèbre de Hecke. On peut alors lui associer une représentation semi-simple continue :

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(k(f))$$

où$k(f)$ est une extension finie de $\mathbb{F}_p((T))$. Cette représentation est impaire et vérifie la compatibilité locale globale semi-simplifiée hors de p. De plus det $\rho_f = (\bar{\kappa}_\chi^{-1} \circ \chi_{cycl}).\omega$ où χ_{cycl} désigne le caractère cyclotomique et ω sa réduction modulo p. Se pose la question de décrire la représentation $\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$. Si f de pente nulle vérifie $U_p f = \alpha.f$, alors d'après la théorie de Hida ([**54**], thm. 2),

$$\rho_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} nr(\alpha) & \star \\ 0 & nr(\alpha^{-1})(\bar{\kappa}_\chi^{-1} \circ \chi_{cycl}).\omega \end{pmatrix}$$

où $nr(\alpha)$ est le caractère non ramifié qui applique le Frobenius géométrique sur α.

Dans le cas de pente finie, on peut espérer que les choses se passent comme en caractéristique 0. Soit $\mathbb{D}$ la boule unité ouverte de la variable Z sur le corps non-archimédien $\mathbb{F}_p((T))$. On définit des actions de ϕ et $\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times$ par les formules habituelles $\phi(Z) = Z^p$ et $\gamma(Z) = (1+Z)^\gamma - 1$. L'anneau de Robba $\mathcal{R}$ est (dans ce contexte) l'anneau des séries $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^n$ à coefficient dans $\mathbb{F}_p((T))$ qui convergent sur une couronne non-vide $0 < v(Z) < r(f)$. Un (ϕ,Γ)-module est un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini muni d'actions semi-linéaires de ϕ et Γ qui commutent, et telles que le linéarisé de ϕ soit un isomorphisme. En utilisant les méthodes de [**7**], on démontre :

Théorème 2.26. — *Soit k une extension finie de $\mathbb{F}_p((T))$. A toute représentation continue $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(k)$ on peut associer un (ϕ,Γ)-module $\mathscr{D}(\rho)$.*

On devrait pouvoir (suivant [**30**]) construire une filtration de Harder-Narashiman sur la catégorie des (ϕ,Γ)-modules et démontrer qu'on a une équivalence entre représentations de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et (ϕ,Γ)-modules semi-stables de pente 0.

Soit ρ_f la représentation associée à une forme modulaire de pente finie. Le (ϕ,Γ)-module $\mathscr{D}(\rho_f)$ est-il triangulin ?

Plus précisément, on devrait posséder une suite exacte $0 \to L \to \mathscr{D}(\rho_f) \to L' \to 0$ où L est le (ϕ,Γ)-module de rang 1 avec action de ϕ par α et action triviale de Γ.

On conjecture que toute représentation semi-simple continue impaire $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(k)$ trianguline comme ci-dessus est la représentation associée à une forme surconvergente de pente finie.

Remarque 2.27. — *On espère pouvoir démontrer ce résultat à partir des théorèmes de modularité pour les représentations potentiellement semi-stables et triangulines en poids de Hodge-Tate* $(0, k)$ *pour n'importe quel* $k \geq 1$ *en s'inspirant entre autre des résultats de* **[11]**. *Inversement, le théorème de modularité en caractéristique p pourrait impliquer les theorèmes de modularité pour les représentations potentiellement semi-stables et triangulines de poids de Hodge-Tate* $(0, k)$ *pour tout* $k \geq 1$ *(qui sont bien sûr déjà connus par* **[40]** *et* **[22]***). La philosophie ici est donc que le passage par les points de caractéristique p permet de changer le poids de Hodge-Tate. Idéalement, on pourrait commencer par montrer un théorème de modularité en poids de Hodge-Tate* $(0, 1)$ *(c'est plus aisé), puis déduire la modularité en caractéristique p, et ensuite propager la modularité aux autres poids de Hodge-Tate. Pour faire fonctionner une telle stratégie, on se heurte néanmoins à des questions très subtiles (et sûrement un peu hors d'atteinte) sur la géométrie des espaces de représentations triangulines.*

3. Modularité

Soit F un corps de nombres et G_F son groupe de Galois. On dit qu'une représentation galoisienne géométrique $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est régulière, si pour toute place v au-dessus de p les poids de Hodge-Tate sont deux à deux distincts. On rencontre assez naturellement des représentations non-régulières :

1. Une représentation d'Artin (d'image finie) est non-régulière dès qu'elle est de dimension au moins 2.
2. Le module de Tate d'une variété abélienne de dimension au moins 2 et non-régulier.

Les formes automorphes qui doivent correspondre à ces motifs non-réguliers sont par contre un peu exotiques. Ce sont les formes modulaires de poids 1 qui correspondent aux représentations d'Artin de dimension 2, impaires du groupe $G_{\mathbb{Q}}$ mais aussi les formes de Maass algébriques qui doivent correspondre aux représentations d'Artin paires. Pour le groupe $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$, on trouve par exemple les formes modulaires cuspidales rationnelles de poids $(2, 2)$ qui doivent correspondre aux variétés abéliennes simples sur $\mathbb{Q}$.

3.1. Sur la conjecture d'Artin. — La conjecture d'Artin prédit que les fonctions L des représentations complexes, continues, irréductibles et non-triviales des groupes de Galois des corps de nombres possèdent un prolongement holomorphe à tout le plan complexe. Dans les quelques cas où on sait prouver cette conjecture, on démontre en fait que ces représentations d'Artin sont associées à des formes automorphes.

Théorème 3.1 **([PS4], th. 0.2)**. — *Les fonctions L des représentations impaires de dimension* 2 *irréductibles des groupes de Galois des corps totalement réels sont entières. Elles proviennent des formes modulaires de Hilbert cuspidales de poids* 1.

Le théorème était connu dans le cas des représentations d'image résoluble grâce aux travaux de Rogawski-Tunnell (**[46]**). Il restait à traiter le cas des représentations icosaédrales (image projective A_5)

Remarque 3.2. — *Pour le corps $\mathbb{Q}$, le théorème est une conséquence de la conjecture de Serre (*[**39**]*).*

Au début des années 2000, Taylor ([**14**]) a initié un programme de démonstration. Le programme est en trois parties. Voici grossièrement l'architecture. Un changement de base résoluble permet de supposer que ρ est partout non-ramifiée.

1. La représentation ρ est d'image finie. Elle est donc définie sur un corps de nombres et on peut la réduire modulo les idéaux premiers. On montre que la réduction modulo un premier au-dessus de 5 est modulaire. Pour cela, il s'agit (à un autre changement de base résoluble près) de trouver une courbe elliptique modulaire dont la 5-torsion réalise la représentation souhaitée. Cela est rendu plausible par l'isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathrm{A}_5$. L'existence d'une courbe elliptique ayant ces propriétés repose d'une part sur l'étude de l'espace des modules de courbes elliptiques avec une 5-torsion prescrite (on montre que c'est un espace projectif, qui a donc plein de points rationnels...), d'autre part sur des théorèmes de relèvement modulaires pour les courbes elliptiques appliqués au module de Tate 3-adique. Voir [**47**] et [**PS4**], sect. 2.

2. On prouve un théorème de relèvement modulaire 5-adique : la représentation ρ est associée à une forme modulaire 5-adique ordinaire. Il n'est pas possible de démontrer directement que ρ est modulaire en utilisant la méthode de Taylor-Wiles classique. Les congruences entre formes classiques de poids 1 sont obstruées par la non-annulation du H^1. On prouve néanmoins l'existence de plusieurs formes modulaires 5-adique associées à ρ. Celles-ci sont paramétrées par les différentes racines des polynômes caractéristiques des Frobenius aux places au-dessus de 5. Voir [**PS4**], partie II.

3. On démontre que les formes modulaires 5-adiques obtenues par relèvement modulaire sont classiques. Ceci représente la partie la plus importante du travail. Essayons d'expliquer en quelques mots l'idée derrière ce théorème de classicité. Les formes modulaires p-adiques ordinaires sont surconvergentes. Cela signifie qu'elles définissent des sections du faisceau inversible automorphe de poids 1 sur un voisinage du lieu ordinaire dans la variété de Hilbert-Blumenthal qui paramètre des variétés abéliennes avec structures additionnelles. Pour démontrer qu'une forme surconvergente est classique, on peut essayer de construire son prolongement : c'est-à-dire de déterminer la valeur de la forme en tout point de l'espace de modules. On peut démontrer que toute variété abélienne est isogène à une variété abélienne arbitrairement proche du lieu ordinaire. On démarre l'argument avec des formes propres pour les opérateurs de Hecke en p. L'équation "être vecteur propre" exprime des relations entre la valeur de la forme en différents point de l'espace de modules qui sont reliés par des isogénies. On peut essayer de définir la forme modulaire en tout point de l'espace de modules en utilisant ces relations. C'est néanmoins un procédé assez subtil, notamment car il peut y avoir différents choix d'isogénies permettant de s'approcher du

lieu ordinaire. Dans notre situation, c'est l'existence de plusieurs formes modulaires surconvergentes qui permet de démontrer l'indépendance en les choix. Voir [**PS4**], part. III.

Remarque 3.3. — *Le théorème de classicité du 3. est du à Buzzard-Taylor (*[**14**], [**12**]*) pour $F = \mathbb{Q}$. Sasaki l'a étendu au cas où p est totalement décomposé dans le corps F. Dans* [**36**] *et* [**P5**] *on démontre le résultat lorsque p est peu ramifié dans F. Finalement, dans* [**PS4**]*, on élimine toute hypothèse sur la ramification. C'est important, car on peut alors utiliser le changement de base résoluble sans restriction.*

Remarque 3.4. — *Pour arriver au théorème de classicité du 3. ou au théorème de classicité du numéro 2.4, on commence par utiliser l'équation fonctionnelle pour faire un prolongement analytique. Après cette première étape, les techniques divergent. Dans ce numéro, on obtient à la fin une forme classique sur la variété de Hilbert de niveau premier à p grâce à une descente étale. Au numéro 2.4 on obtient une forme classique sur la variété de niveau Iwahorique en p en utilisant des séries qui ne convergent qu'en poids suffisamment grand.*

On dégage en fait le critère de classicité suivant, qui est d'une nature assez différente du critère usuel de petite pente :

Théorème 3.5 **([PS4], th. 0.6)**. — *Une forme surconvergente de pente finie f est classique si et seulement si le frobenius de f est une forme surconvergente de pente finie.*

Remarque 3.6. — *On peut montrer assez facilement l'énoncé suivant qui est l'analogue du théorème précédent. Soit f une forme modulaire p-adique ordinaire, modulo p pour le groupe* $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$*, de niveau premier à p, de poids* 1 *(ainsi f est une section du faisceau ω^1 sur le lieu ordinaire, qui est dans l'image du projecteur d'ordinarité). Supposons que le frobenius de f soit encore une forme modulaire p-adique modulo p ordinaire. Alors f est une forme classique de poids* 1.

Donnons à présent quelques détails supplémentaires pour $F = \mathbb{Q}$. Dans ce cadre, le résultat est dû à [**14**]. Nous donnons néanmoins une preuve légèrement différente (due à A. Genestier), dans l'esprit de [**P5**] et [**PS4**]. Supposons pour fixer les idées que α et β sont deux racines distinctes du polynôme caractéristique de frobenius et que f_α et f_β sont les deux formes propres construites à l'étape 2. On introduit

$$F = \frac{\alpha f_\alpha - \beta f_\beta}{\alpha - \beta}, \quad G = \frac{f_\alpha - f_\beta}{\alpha - \beta}.$$

Un calcul de q-développement qui utilise crucialement la relation entre valeurs propres de Hecke et q-développement, permet de montrer que G est le frobenius de F.

On possède un projection $p_1 : X_{\mathrm{Iw}} \to X$ qui est $(G, H \subset G[p]) \mapsto G$ et une projection $p_2 : X_{\mathrm{Iw}} \to X$ qui est $(G, H) \mapsto G/H$. Si on restreint p_2 au lieu ordinaire multiplicatif, on observe que $p_2 : \mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m} \overset{p_1}{\simeq} \mathfrak{X}^{or} \to \mathfrak{X}^{or}$ s'identifie au frobenius. Voyons G comme une section sur $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-m}$ et F comme une section sur $\mathfrak{X}^{or}$. On a alors $p_2^\star F = G$. On remarque à présent que G est une combinaison linéaire de deux formes ordinaires.

Par la méthode de prolongement analytique, on sait que f_α et f_β se prolongent jusqu'au complémentaire U dans $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}$ de l'ouvert $\mathcal{X}_{\mathrm{Iw}}^{or-et}$ formé des couples (G,H) avec G ordinaire et H étale.

On vérifie facilement que U se surjecte sur $\mathcal{X}$. On veut maintenant établir que G descend de U à $\mathcal{X}$ en une forme qui va prolonger F. On a un diagramme de descente :

$$U \times_{\mathcal{X}} U \rightrightarrows U \to \mathcal{X}$$

Si on note $q_1, q_2 : U \times_{\mathcal{X}} U \to U$ les deux projections, on doit montrer que $q_1^\star G = q_2^\star G$. Cette identité est établie sur le lieu ordinaire car G provient de F. On montre qu'elle se propage, car toutes les composantes connexes de $U \times_{\mathcal{X}} U$ rencontrent le lieu ordinaire.

Le même principe de démonstration fonctionne en général, au prix de nombreuses complications. Dans un premier travail, on montrait ce résultat de classicité pour des corps totalement réel peu ramifiés en p. Cette hypothèse assurait (en reprenant les même notations qu'au-dessus) que l'ouvert U sur lequel se prolonge G a une image très grosse dans $\mathcal{X}$, de tel sorte qu'une fois démontré la descente à $p_2(U)$, on avait automatiquement le prolongement à $\mathcal{X}$. Dans un second travail avec Stroh, on s'affranchit de l'hypothèse sur la ramification. Dans ce cas, l'ouvert $p_2(U)$ n'est pas assez gros. On doit alors itérer deux fois le processus. A chaque étape de l'argument, on se heurte à des questions subtiles sur la géométrie de la variété de Hilbert-Blumenthal et des espaces de modules de groupes p-divisibles. Si nous avons pu résoudre ces questions, c'est grâce à la théorie du modèle local, à la théorie de Dieudonnée, de Breuil-Kisin et aux display.

Les conjectures de Fontaine-Mazur [**25**] concernent les représentations p-adiques des groupes de Galois des corps de nombres qui sont géométriques au sens de la théorie de Hodge p-adique. Nous démontrons un cas particulier de ces conjecture.

Théorème 3.7 (**[PS4],th. 0.2**). — *Soit F un corps totalement réel et $\rho : G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ une représentation continue, impaire, irréductible, géométrique, à poids de Hodge-Tate nuls. On suppose en outre :*

1. *$p \geq 3$,*
2. *$\overline{\rho}|_{F(\zeta_p)}$ est absolument irréductible.*
3. *Si $p = 5$ et $\mathrm{Proj}\bar{\rho}(G_F) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ alors $[F(\zeta_5) : F] = 4$.*

Alors ρ est modulaire, associée à une forme modulaire de Hilbert de poids 1.

Remarque 3.8. — *L'hypothèse "à poids de Hodge-Tate nuls" equivaut à l'hypothèse $\rho(I_v)$ est finie pour toute place v au-dessus de p. Il est remarquable que cette hypothèse suffise à entraîner la finitude de la représentation.*

Pour montrer le théorème, il suffit de voir que ρ est une représentation d'Artin justiciable du théorème 3.1. On peut bien sûr le démontrer après un changement de base F'/F avec F' totalement réel. D'après un résultat de modularité potentielle résiduelle de [**5**], on peut trouver F'/F convenable tel que $\overline{\rho}|_{G_{F'}}$ soit modulaire. On reprend alors les étapes 2 et 3 de la stratégie expliquée précédemment pour montrer la modularité de $\rho|_{G_{F'}}$, qui est donc une représentation d'Artin.

3.2. Sur les surfaces abéliennes. — Il est conjecturé que les surfaces abéliennes simples sur $\mathbb{Q}$ sont associées à des formes modulaires de Siegel de genre 2, cuspidales, de poids $(2,2)$ et rationnelles. Cette conjecture généralise la conjecture bien connue de Shimura-Taniyama-Weil (un théorème d'après [**55**], [**10**]) qui prédit la modularité des courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$. Cependant, d'un point de vue plus technique, cette conjecture a d'avantage de points communs avec la conjecture d'Artin étudiée dans le numéro précédent : dans les deux cas, on a multiplicité 2 des poids de Hodge-Tate.

On démontre l'analogue du 2. de la section 3.1 :

Théorème 3.9 ([**P1**]). — *Sous des hypothèses techniques, si une surface abélienne A sur $\mathbb{Q}$ est ordinaire en p et si son module de Tate p-adique $\mathrm{T}_p(A)$ est congrue à la représentation associée à une forme modulaire de Siegel ordinaire, il existe une forme modulaire p-adique ordinaire de poids $(2,2)$ de représentation associée $\mathrm{T}_p(A)$.*

La démonstration de ce résultat utilise la méthode de Taylor-Wiles. Pour le groupe GSp_4 et des poids cohomologiques, celle-ci a été mise en œuvre dans [**26**]. Ici, on utilise les formes modulaires p-adiques ordinaires plutôt que la cohomologie cohérente classique. En effet, le H^1 le la cohomologie cohérente en poids $(2,2)$ obstrue les congruences et ne permet pas la mise en œuvre de la méthode de Taylor-Wiles classique.

Il semble difficile de passer à l'analogue de l'étape 3. de la section 3.1 et d'établir la modularité de A sous les hypothèses du théorème. L'obstruction principale réside dans le fait que pour le groupe $\mathrm{GSp}_4/\mathbb{Q}$, les valeurs propres de Hecke ne déterminent pas le q-développement de façon explicite.

Calegari et Geraghty ont proposé dans [**15**] de modifier la méthode de Taylor-Wiles pour qu'elle s'applique dans des situations obstruées comme celle qui nous concerne. Pour mettre en place cette méthode modifiée, on doit cependant (entre autres) s'assurer que le cohomologie cohérente concernée est concentrée en exactement deux degrés 0 et 1. Jusqu'à présent, on n'a pas réussi à démontrer que la cohomologie usuelle $\mathrm{H}^\bullet(X,\omega^{(2,2)})$ a cette propriété. En utilisant le complexe $M^\bullet$ construit dans la section 2.5 plutôt que la cohomologie usuelle, on éspère pouvoir appliquer la méthode de Calegari-Geraghty et ainsi améliorer le théorème ci-dessus.

4. Construction de représentations galoisiennes

4.1. Approximation de la cohomologie cohérente supérieure. — Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On considère $Y(p^n)_{\mathbb{Q}_p} \to Y_{\mathbb{Q}_p}$ le revêtement étale qui paramètre des isomorphismes symplectiques à similitude près $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^{2g} \to A[p^n]$. Notons $X(p^n)_{\mathbb{Q}_p}$ une compactification toroidale de $Y(p^n)_{\mathbb{Q}_p}$. On s'intéresse aux groupes de cohomologie cohérente $\mathrm{H}^i(X(p^n)_{\mathbb{Q}_p},\omega^\kappa)$ ainsi qu'à leur variante cuspidale $\mathrm{H}^i(X(p^n)_{\mathbb{Q}_p},\omega^\kappa(-D))$. Soit $\mathcal{H}^{Np}$ l'algèbre de Hecke non-ramifiée de niveau premier à Np, à coefficient dans $\mathbb{Z}_p$. Pour tout entier n et tout ensemble de poids $(\kappa_1,\cdots,\kappa_r) \in (X(\mathrm{T})^+)^r$ on note $\mathbb{T}(n,\kappa_1,\cdots,\kappa_r)$ l'image de $\mathcal{H}^{Np}$ dans les endomorphismes de $\mathrm{H}^0(X(p^n)_{\mathbb{Q}_p},\oplus_{i=1}^r\omega^{\kappa_i}(-D))$. C'est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre finie et plate. On la munit de la topologie p-adique. On définit $\mathbb{T}^{p-ad}$ la limite projective des

$\mathbb{T}(n,\kappa_1,\cdots,\kappa_r)$ (la limite est prise sur les entiers n et les ensembles de poids). On munit cette algèbre de la topologie de la limite projective.

Théorème 4.1 (**[PS5]**). — *Pour tout entier i, l'action de $\mathcal{H}^{Np}$ sur $\mathrm{H}^i(X(p^n)_{\mathbb{Q}_p},\omega^\kappa)$ ou $\mathrm{H}^i(X(p^n)_{\mathbb{Q}_p},\omega^\kappa(-D))$ se factorise à travers une action continue de $\mathbb{T}^{p-ad}$.*

Cet énoncé signifie donc que l'action de l'algèbre de Hecke sur la cohomologie cohérente supérieure est une limite p-adique de l'action sur la cohomologie cuspidale de degré 0.

Remarque 4.2. — *En fait, on démontre le même résultat pour toutes les variétés de Shimura de type Hodge. On montre également un résultat pour des groupes de cohomologie entiers qui ne sont pas reliés à la cohomologie du modèle entier de Kottwitz mais aux modèles étranges définis par Scholze. Signalons que Boxer* [**8**] *et Goldring-Koskivirta* [**27**] *ont obtenu des résultats analogues par une méthode différente qui utilise des invariants de Hasse généralisés. Leurs résultats s'appliquent à la cohomologie du modèle entier de Kottwitz.*

4.2. Représentations galoisiennes. — On fixe à présent $g=2$. Soit $f\in \mathrm{H}^0(X(p^n)_{\mathbb{Q}_p},\omega^{(k_1,k_2)}(-D))\otimes_{\mathbb{Q}_p}\overline{\mathbb{Q}}_p$ une forme modulaire cuspidale propre de poids cohomologique $k_2\geq 3$. On peut lui associer, grâce aux travaux [**50**], [**42**], [**52**], une représentation Galoisienne non ramifiée hors de Np,

$$\rho_\pi : G_{\mathbb{Q}}\to \mathrm{GL}_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

qui vérifie la compatibilité locale-globale aux places non-ramifiées (ne divisant pas Np), qui est de De Rham en p avec poids de Hodge-Tate $(k_1+k_2-3,k_1-1,k_2-2,0)$.

En utilisant le théorème précedent, on peut alors propager cette construction à toute les classes de cohomologie cohérentes et on obtient :

Théorème 4.3. — *Soit $c\in \mathrm{H}^i(X(p^n)_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\omega^\kappa)$ ou $c\in \mathrm{H}^i(X(p^n)_{\overline{\mathbb{Q}}_p},\omega^\kappa(-D))$ une classe de cohomologie propre. Alors on possède une représentation associée $\rho_c : G_{\mathbb{Q}}\to \mathrm{GL}_4(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ qui vérifie la compatibilité locale globale hors de Np.*

Remarque 4.4. — *La réstriction $g=2$ provient du fait que les représentations associées aux formes automorphes sur GSp_{2g} ne sont pas disponibles dans la littérature. Néanmoins, leur existence (peut-être sous quelques hypothèses) est annoncée par Kret et Shin. On a un théorème du même type pour des variétés de Shimura associées à des groupes unitaires sur un corps CM ou au groupe spécial symplectique sur un corps totalement réel. Dans ces cas, les représentations galoisiennes associées aux formes modulaires cuspidales de poids cohomolgique sont disponibles (voir notamment* [**4**], [**38**], [**45**]*).*

4.3. Limites non-dégénérées de série discrète. — On dit qu'une forme automorphe $\pi=\pi_\infty\otimes\pi_f$ sur le groupe GSp_4 est C-algébrique si le caractère infinitésimal de π_∞ est dans $X(\mathrm{T}_{\mathrm{GSp}_4})+\rho$ où $X(\mathrm{T}_{\mathrm{GSp}_4})$ est le groupe des caractères algébriques du tore maximal et ρ est la demi-somme des racines positives ([**13**], def. 2.3.3). Si π est C-algébrique, il est conjecturé (voir [**13**], conj. 5.3.4) que π_f est définie sur un corps de nombres $E(\pi)$ et que pour toute place finie λ de $E(\pi)$, on possède une représentation galoisienne associée $\rho_{\pi,\lambda} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GSp}_4(E(\pi)_\lambda)$ qui est non ramifiée en dehors de l'ensemble fini des places ramifiées de π_f et du premier p en dessous de λ. Cette représentation doit vérifier la compatibilité locale-globale aux places non-ramifiées et doit être de de Rham en p.

Si π_∞ est dans la série discrète, la conjecture est démontrée par les travaux [**50**], [**42**], [**52**].

On peut montrer en partie la conjecture si π_∞ est une limite non dégénérée de série discrète. Rappelons la description des séries discrètes et des limites non dégénérées. Le tore maximal $\mathrm{T}_{\mathrm{GSp}_4}$ de GSp_4 est $\{\mathrm{diag}(ct_1, ct_2, ct_2^{-1}, ct_1^{-1}), (c, t_1, t_2) \in \mathbb{G}_m^3\}$. Le groupe des caractères est $X(\mathrm{T}_{\mathrm{GSp}_4}) = \{(a_1, a_2; c), c = a_1 + a_2 \mod 2\} \subset \mathbb{Z}^3$. Notons $\alpha_1 = (1, 0; 0)$ et $\alpha_2 = (0, 1; 0)$. Les racines positives sont $\{\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2\}$. L'unique racine positive compacte est $\alpha_1 - \alpha_2$.

Les séries discrètes et limites de séries discrètes sont paramétrées par des couples (λ, C) formés d'un caractère $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2; c) \in X(\mathrm{T}) + (2, 1; 0) \subset X(\mathrm{T})_{\mathbb{C}}$ qui vérifie $\lambda_1 > \lambda_2 \geq -\lambda_1$ et d'une chambre de Weyl C qui rend λ dominant (voir [**28**]). On note $\pi(\lambda, C)$ la représentation obtenue.

Si $\lambda_2 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq -\lambda_1$, $\pi(\lambda, C)$ est une série discrète. Si $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\pi(\lambda, C)$ est une limite non-dégénérée de série discrète.

***Théorème 4.5* ([28], th. 3.4)**. — *Si $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ et $\pi_\infty = \pi(\lambda, C)$ alors π se réalise dans la cohomologie cohérente du faisceau ω^κ avec $\kappa = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2)$.*

Corollaire 4.6. — *Si $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ et $\pi_\infty = \pi(\lambda, C)$ est une limite non-dégénérée de série discrète, alors π_f est définie sur un corps de nombres $E(\pi)$ et on possède un système de représentations galoisiennes $\{\rho_{\pi,\lambda}\}$ indexé par les places finies de $E(\pi)$. Chaque $\rho_{\pi,\lambda}$ vérifie la compatibilité locale globale aux places non-ramifiées.*

Si π se réalise dans un H^0 de cohomologie (cas d'une limite holomorphe de série discrète), le résultat était accessible par des méthodes plus simples (utilisant l'invariant de Hasse classique). Il est conjecturé que la représentation construite est de De Rham en p avec des poids de Hodge-Tate (à un twist près) $(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1, 0)$. On observe donc que les limites non dégénérées de série discrètes produisent conjecturalement des représentations non-régulières de poids de la forme (à twist près) $(k, k, 0, 0)$ ou $(k, 0, 0, -k)$ avec $k \neq 0$. Cette conjecture est accessible pour des représentations qui se réalisent dans le H^0 grâce aux variétés de Hecke notamment. Au-delà, la question est complètement ouverte.

4.4. Eléménts de démonstration du théorème 4.1. — La démonstration utilise les idées de P. Scholze [**49**] et l'introduction de modèles entiers étranges. On note $\mathcal{X}(p^n)$ l'espace adique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ associé à $X(p^n)_{\mathbb{C}_p}$. On obtient un modèle formel $\mathfrak{X}(p^n)$ (pour des choix convenables de décompositions polyédrales) en normalisant la variété de Siegel formelle $\mathfrak{X}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ de niveau hyperspécial en p dans $\mathcal{X}(p^n)$.

On possède un morphisme de Hodge-Tate sur $\mathfrak{X}(p^n)$ (nous ignorons les problèmes de bord) :

$$\mathrm{HT} : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{2g} \to G[p^n] \to \omega_G/p^n\omega_G$$

sur $\mathfrak{X}(p^n)$.

En passant au déterminant, on a $\Lambda^g\mathrm{HT} : \Lambda^g\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^{2g} \to \det\omega_G/p^n\det\omega_G$. Soit $e_1, \cdots, e_r$ une base de $\Lambda^g\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^{2g}$ comme $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module. Les classes $\{\Lambda^g\mathrm{HT}(e_i)\}$ sont des formes modulaires de poids $(1, \cdots, 1)$ modulo p^n sur $\mathfrak{X}(p^n)$. On montre même qu'elles descendent à la compactification minimale $\mathfrak{X}(p^n)^\star$ (obtenue également par normalisation de la compactification minimale $\mathfrak{X}^\star$). On rappelle que le faisceau $\det\omega_G$ est ample sur $\mathfrak{X}(p^n)^\star$. Imaginons une seconde que les classes $\Lambda^g\mathrm{HT}(e_i)$ engendrent le faisceau $\det\omega_G/p^n$.

On pourrait alors considérer le recouvrement affine $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}(p^n)^\star$ associé au lieu de non-annulation de ces formes modulaires. La cohomologie cohérente sur $\mathfrak{X}(p^n)^\star$ se calcule à la Chech à l'aide de ce recouvrement.

D'autre part, on sait que les images directes supérieures de $X(p^n)_{\mathbb{C}_p}$ vers $X(p^n)^\star_{\mathbb{C}_p}$ pour le faisceau $\omega^\kappa(-D)$ sont nulles (voir [**41**]). Ainsi, le complexe de Chech pour $\mathfrak{U}$ evalué sur l'image direct du faisceau $\omega^\kappa(-D)$ a la propriété de calculer la cohomologie $\mathrm{H}^\star(\mathcal{X}(p^n)_{\mathbb{C}_p}, \omega^\kappa(-D))$. Chaque terme du complexe de Chech est un espace de formes modulaires de poids $\omega^\kappa(-D)$ sur un ouvert de la variété de Siegel $\mathfrak{X}(p^n)$. En multipliant par des grandes puissances (de relèvements de) $\Lambda^g\mathrm{HT}(e_i)^k$ on peut alors chasser les pôles. Le point fondamental est que les opérateurs de Hecke de niveau premier à p commutent à la multiplication par ces classes de Hodge-Tate. Ainsi, on peut approximer toute classe de cohomologie par des formes modulaires cuspidales, en préservant l'action de Hecke hors p.

En réalité, hors du lieu ordinaire les classes $\Lambda^g\mathrm{HT}(e_i)$ n'engendrent pas le faisceau $\det\omega_G/p^n$. Scholze dans [**49**] introduit un modèle étrange $\mathfrak{X}(p^n)^{\star-\mathrm{HT}}$ de $\mathcal{X}(p^n)^\star$ (la fibre générique de $\mathfrak{X}(p^n)^\star$) grâce auquel l'argument précédent fonctionne.

Expliquons la relation entre ce modèle et de modèle standard de Kottwitz normalisé. Grâce à un théorème de Fargues ([**24**], sect. 5.3.2), le conoyau de l'application de Hodge-Tate est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. On peut commencer par remplacer $\det\omega_G$ par son sous-faisceau $\det\omega_G^{mod}$ engendré par (des relèvements locaux) des classes $\Lambda^g\mathrm{HT}(e_i)$. Cette modification du faisceau $\det\omega_G$ n'est plus localement libre, mais elle le redevient après un éclatement $\mathfrak{X}(p^n)^{\star-mod}$. On possède donc un schéma formel $\mathfrak{X}(p^n)^{\star-mod} \to \mathfrak{X}(p^n)^\star$. Ce schéma formel est muni d'un faisceau localement libre $\det\omega_G^{mod}$ et d'un ensemble de sections, $\{\Lambda^g\mathrm{HT}(e_i)\}$ qui engendrent ce faisceau modulo p^n. Cependant, le faisceau $\det\omega_G^{mod}$ n'est plus ample. Scholze démontre qu'il existe une contraction $\mathfrak{X}(p^n)^{\star-mod} \to \mathfrak{X}(p^n)^{\star-HT}$ pour laquelle le faisceau $\det\omega_G^{mod}$ descend en un faisceau inversible ample. Il montre aussi que les sections $\{\Lambda^g\mathrm{HT}(e_i)\}$ descendent. L'ensemble de l'argument peut alors être adapté sur ce modèle modifié.

La construction du modèle modifié de Scholze utilise la construction préalable de la variété de Siegel perfectoide de niveau p^∞, et la propriété que le morphisme des périodes de Hodge-Tate est affinoide.

Remarque 4.7. — *Scholze montre que la compactification minimale $\mathcal{X}(p^\infty)^\star$ est perfectoide. Dans notre étude des classes de Hodge-Tate, nous sommes amenés à* *examiner le bord des compactifications toroidales $\mathcal{X}(p^n)$ et nous déduisons (*[**PS5**]*, th. 0.4) que la compactification toroidale $\mathcal{X}(p^\infty)$ de niveau p^∞ est aussi perfectoide.*

Articles présentés

[AIP1] F. Andreatta, A. Iovita et V. Pilloni, *p-adic families of Siegel modular cuspforms*, Annals of Mathematics, **181** (2015), 623-697.

[AIP2] F. Andreatta, A. Iovita et V. Pilloni, *On overconvergent Hilbert modular cuspforms*, "Arithmétique p-adique des formes de Hilbert", Astérisque 382 (2016).

[AIP3] F. Andreatta, A. Iovita et V. Pilloni, *Le halo spectral*, à paraître aux Annales de l'ENS.

[AIP4] F. Andreatta, A. Iovita et V. Pilloni, *The adic, Hilbert, cuspidal eigenvarieties*, à paraître dans Research in the mathematical science, un volume en l'honneur de R. Coleman.

[BPS] S. Bijakowski, V. Pilloni et B. Stroh, *Classicité de formes modulaires surconvergentes*, Annals of Mathematics (2016), no 3, 975-1014.

[P1] V. Pilloni, *Modularité, formes de Siegel et surfaces abéliennes*, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, Volume 2012, 666, p 35-82.

[P2] V. Pilloni, *Sur la théorie de Hida pour le groupe GSp_{2g}*, Bull. SMF 140 (2012).

[P3] V. Pilloni, *Prolongement analytique sur les variétés de Siegel*, Duke Math. J. **175** (2011), p. 167-222.

[P4] V. Pilloni, *Formes modulaires surconvergentes*, Annales de l'Institut Fourier, 43, p. 219-239 (2013).

[P5] V. Pilloni, *Formes modulaires p-adiques de Hilbert de poids* 1, Inventiones Mathematicae (2016).

[PS1] V. Pilloni & B. Stroh, *Sous-groupes canoniques partiels* , Manus. Math., Volume 133, 1, pp 19–39 (2010).

[PS2] V. Pilloni & B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas déployé* (2013).

[PS3] V. Pilloni & B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, à paraître au Jour. of the Ramanujan Math. Soc. (2016).

[PS4] V. Pilloni & B. Stroh, *Surconvergence, ramification et modularité*, "Arithmétique p-adique des formes de Hilbert", Astérisque 382 (2016).

[PS5] V. Pilloni & B. Stroh, *Cohomologie cohérente et représentations galoisiennes*, Annales Mathématiques du Québéc (Volume en l'honneur de G. Stevens) vol. 40, 1, p. 167-202 (2016).

Références

[1] A. Abbès et F. Mokrane, *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adic pour les variétés abèliennes*, Publ. Math. IHES, **99**, 2004.

[2] F. Andreatta et C. Gasbarri, *The canonical subgroup for families of abelian varieties*, Compositio Math., **143** (2007), p.566 à 602.

[3] F. Andreatta, A. Iovita et G. Stevens, *Overconvergent modular sheaves and modular forms for* GL_2/F, Israel Journal of Mathematics, vol. 201 (2014), p. 299-359.

[4] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic groups*, Colloquium Publications of the American Mathematical Society, volume 61.

[5] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty & R. Taylor, *Potential modularity and change of weight*, Ann. of Math. **179** (2014), p. 501-609

[6] J. Bergdall et R. Pollack, *Arithmetic properties of Fredholm series for p-adic modular forms*, Proc. of the London Math. Soc. (2016).

[7] L. Berger et P. Colmez, *Familles de représentations de De Rham et monodromie p-adique*, Astérisque 319 (2008), 303-337.

[8] G. Boxer, *Torsion in the Coherent Cohomology of Shimura Varieties and Galois Representations*, prépublication.

[9] R. Brasca, *Eigenvarieties for cuspforms over PEL type Shimura varieties with dense ordinary locus*, à paraître dans Canadian Journal of Mathematics.

[10] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 843-939

[11] C. Breuil, E. Hellman et B. Schraen, *Une interprétation modulaire de la variété trianguline*, à paraître à Math. Annalen.

[12] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Am. Math. Soc., **16** , n. 1, p. 29 à 55, 2002.

[13] K. Buzzard et Toby Gee, *The conjectural connection between automorphic representations and Galois representations*, Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011.

[14] K. Buzzard et R. Taylor, *Companion forms and weight* 1 *forms*, Annals of Math. **149**, 1999.

[15] F. Calegari & D. Geraghty, *Modularity lifting beyond the Taylor-Wiles method*, prépublication (2014).

[16] R. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math., **124**, 215-241, 1996.

[17] R. Coleman, *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math., **127**, 417-479, 1997.

[18] R. Coleman et B. Mazur, *The eigencurve*, Galois representations in *arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, vol. **254** of London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1-113. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[19] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaire Bourbaki **11** (1968-1969), p 139-172.

[20] P. Deligne & J-P Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4ème série **7**, n. 4 (1974), p. 507-530.

[21] M. Emerton, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke aigenforms*, Invent. Math. **164** (2006), 1-84.

[22] M. Emerton, *Local-global compatibility in the p-adic Langlands program*, prépublication.

[23] G.Faltings et C.-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzbgebiete (3), vol. **22**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, with an appendix by D. Mumford.

[24] L.Fargues, *La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles*, avec la collaboration de Yichao Tian, Prépublication.

[25] J.M. Fontaine et B. Mazur, *Geometric Galois Representations*, Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem (Hong Kong 1993). Internat. Press, Cambridge MA, p. 41 à 78, 1995.

[26] A. Genestier et J. Tilouine, *Système de Taylor-Wiles pour* GSp_4, Formes Automorphes (II), le cas du groupe GSp(4), p. 177 à 287, Astérisque **302**, SMF, 2005.

[27] W. Goldring et J-S Koskivirta, *Strata Hasse invariants, Hecke algebras and Galois representations*, prépublication.

[28] M. Harris, *Automorphic forms and the cohomology of vector bundles on Shimura varieties*, dans « Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions », vol. 2, Ann Arbor, édité par L. Clozel et J. Milne (1988).

[29] M. Harris, K.W. Lan, R. Taylor et J. Thorne, *On the rigid cohomology of certain Shimura varieties*, prépublication.

[30] U. Hartl et R. Pink, *Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc*, Compositio Math. 140 (2004) 689-716.

[31] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. ENS, **19**, 231-273, 1986.

[32] H. Hida, *Control theorems for coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, Jour. Inst. Math. Jussieu, **1**, 2002.

[33] J.C.Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Pure and applied mathematics, vol. **131**, Academic Press, 1987.

[34] O. Jones, *An analogue of the BGG resolution for locallt analytic principal series*, Jour. of Number Theory **131** (2011), p. 1616-1640.

[35] P. Kassaei, *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. Journal **132** (2006), no. 3, p. 509 à 529.

[36] P. Kassaei, *Modularity lifting in parallel weight one*, J. Amer. Math. Soc. **26** (2013), no. 1, 199–225.

[37] N. Katz, *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III, SLN, **350**, p. 69 à 190.

[38] T. Kaletha, A. Minguez, S.W. Shin, P.J. White, *Endoscopic Classication of Representations : Inner Forms of Unitary Groups*, prépublication (2014).

[39] C. Khare et J.P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture I*, Invent. Math. **178** (2009), no. 3, p. 485-504. .

[40] M. Kisin, *The Fontaine-Mazur conjecture for* GL_2, J.A.M.S. 22(3) (2009) 641-690.

[41] K-W. Lan et B. Stroh, *Relative cohomology of cuspidal forms on PEL Shimura varieties*, Algebra and Number Theory 8 (2014).

[42] G. Laumon, *Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension 3*, Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4), Astérisque no. 302 (2005), p.1-66.

[43] R. Liu, D. Wan, L. Xiao, *The eigencurve at the boundary of the weight space*, à paraître à Duke Math. Journal.

[44] J. Milne, *Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles*, dans « Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions », vol. 1, Ann Arbor, édité par L. Clozel et J. Milne (1988).

[45] C.P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, à paraître dans Memoirs of the American Mathematical Society.

[46] J. Rogawski & J. Tunnell, *On Artin L-functions associated to Hilbert modular forms of weight 1*, Invent. Math. **74** (1983), p. 1-42.

[47] N.Shepherd-Barron & R.Taylor, *Mod* 2 *and mod* 5 *icosahedral representations*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), p. 283-298.

[48] B. Stroh, *Compactifications de variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction*, Bull. Soc. Math. France 138 (2010), no. 2, p. 259-315.

[49] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric spaces*, Annals of Mathematics 182 (2015), no. 3, p. 945 -1066.

[50] R. Taylor, *On the cohomology of the Siegel threefolds*, Inv. Math. **114**, p. 289 à 310, 1993.

[51] E. Urban, *Eigenvarieties*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), 1685-1784.

[52] J. Weinstein, *Peter Scholze's lectures on p-adic geometry.*

[53] R. Weissauer, *Four dimensional Galois representations*, Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4), Astérisque no. 302 (2005), p.67-150

[54] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. 94 (1988), 529-573.

[55] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Math. 141 (1995), 443-551.