Variété de Hecke et cohomologie cohérente

Introduction :

I) La famille d'Eisenstein

a) Rappels "classiques" :

Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$, pair. Il existe une forme G_k^* modulaire de poids k sur $\Gamma_0(p)$. Rappelons sa définition

* définition géométrique :

Soit E, E' deux courbes elliptiques $/\mathbb{C}$ et $\varphi : E \to E'$ une isogénie de degré p.
Soit $\omega : \mathrm{Lie}\, E \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ et $\omega' = \varphi_*(\omega)$.
($\omega \in \mathcal{O}_E^* \Omega^1_{E/\mathbb{C}} \setminus \{0\}$). On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Lie}\, E \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda' \arrow[r] \arrow[dr, hook, bend right] & \mathrm{Lie}\, E' \arrow[r] \arrow[d, "\wr\, \omega'"] & E' \arrow[r] & 0 \\
& & \mathbb{C} & &
\end{tikzcd}$$

$$G_k^*(E,E',\omega) = \left(\sum_{\ell \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\ell^k} - \frac{1}{p} \sum_{\ell \in \Lambda' \setminus \{0\}} \frac{1}{\ell^k} \right) \frac{(k-1)!}{2(2i\pi)^k}$$

* ~~définition~~ Comme fonction sur le demi plan de Poincaré : $(q = e^{2i\pi z})$

$$G_k^*(z) = \frac{\zeta^*(1-k)}{2} + \sum_{n \geq 1} \sigma^*_{k-1}(n) q^n$$

où :

- $\zeta^*(1-k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k) = (1-p^{k-1}) \frac{b_k}{k}$ où b_k est le k-ième nombre de Bernoulli

$$\boxed{G_k^*(z) = G_k^*\left(\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+z\mathbb{Z}},\ \mathbb{C}/_{\frac{1}{p}\mathbb{Z}+z\mathbb{Z}},\ \omega_{can}\right)}$$

- $\sigma^*_{k-1}(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ (d,p)=1}} d^{k-1}$

Les formes modulaires $G_k^*(q)$ sont propres pour les opérateurs de Hecke :

$$T_\ell\, G_k^*(q) = (1+\ell^{k-1}) G_k^*(q) \qquad \ell \neq p$$

$$U_p\, G_k^*(q) = G_k^*(q)$$

On a une rep galoisienne $\rho_{G_k^*(q)} = 1 \oplus \chi_p^{k-1}$

$\chi_p : G_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique.

b) Rapels p-adiques

5.1) L'espace des poids ($p \neq 2$)

On note $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ l'algèbre de groupe complétée de $\mathbb{Z}_p^\times$,

$$\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]] = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times]$$
$$\simeq \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times][[T]] \qquad (\mathbb{T} = 1+p)$$

On pose $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$.

On a un caractère universel $\kappa^{univ} : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]^\times$
$x \to x$

L'espace des poids est $\mathcal{W} = \mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$. On note W la fibre générique.

$$W(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr\,cont}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times) \simeq \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}^\times \times 1 + \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$$
$$\kappa \longrightarrow \kappa_{|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times}, \kappa(1+p)$$

$W = \coprod_{\psi \in \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}^\times} W_\psi$ où W_ψ est une boule unité ouverte

$\mathcal{W} = \coprod_{\psi \in \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}^\times} \mathcal{W}_\psi$ où $\mathcal{W}_\psi = \mathrm{Spf}\ \Lambda$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a un caractère algébrique $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$, $x \to x^k$. Ceci définit une application $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{W}$ d'image les ~~points~~ classiques.

5.2) La famille d'Eisenstein (Serre 71)

Théorème : $\forall \psi \in \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}^\times$, ψ pair, il existe une famille p-adique de q-développement :

$$G_\psi^\kappa(q) = \frac{1}{2}\zeta_\psi^\kappa + \sum_{n \geq 1} \sigma_\psi^\kappa(n)\, q^n \quad \text{où}$$

- $\sigma_\psi^\kappa(n) \in \mathcal{O}_{\mathcal{W}_\psi} = \Lambda$
- si $\psi \neq 1$, $\zeta_\psi^\kappa \in \mathcal{O}_{\mathcal{W}_\psi} = \Lambda$ et $\zeta_1^\kappa \in \frac{1}{T}\Lambda$

et $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \cap \mathcal{W}_\psi$,

$G_\psi^\kappa(q)|_k = G_k^\kappa(q)$

remarques : 1) Les $\{\zeta_\psi^\kappa\}$ sont les fn p-adique de Kubota-Leopoldt.

2) On a une famille de rep $\rho_{G_\psi^\kappa(q)} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\Lambda)$, $\sigma \to (\ \ X_{p,\psi}(\sigma))$

où $X_{p,\psi} : G_\mathbb{Q} \to \Lambda^\times$ tq $\forall k \in \mathbb{Z} \cap \mathcal{W}_\psi$, $X_{p,\psi}|_k = X_p^{k-1}$.

Notation : $E^\kappa(q) = G_1^\kappa(q) \dfrac{2}{\zeta_1^\kappa} \in 1 + qT\Lambda[[q]]$ est la famille d'Eisenstein "basique".

) Quelques questions/résultats

Problème général : Peut on interpoler p-adiquement toute forme modulaire propre (pour un groupe réductif PEL) en une famille de formes propres ?

Problème spécifique : Quelle est la nature "géométrique" de $G_\psi^\kappa(q)$?

a) Formes modulaires p-adiques

a.1) Notations

$N \geq 3$ un entier $(N, p) = 1$.

- $X/\mathbb{Z}[1/N]$: courbe modulaire propre de niveau $\Gamma_1(N)$
- $E \underset{e}{\rightleftarrows} X$: schéma semi-abélien universel, e son unité
- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\omega^k = (e^* \Omega^1_{E/X})^{\otimes k}$: le faisceau modulaire de poids k
- $\mathfrak{X}$: complétion formelle de X le long de $X_{\mathbb{F}_p}$
- X_{rig} : l'espace rigide associé
- $Ha \in H^0(X_{\mathbb{F}_p}, \omega^{p-1})$: l'invariant de Hasse
- $X^{ord}_{\mathbb{F}_p} = X - V(Ha)$: lieu ordinaire
- $\mathfrak{X}^{ord}$: l'ouvert formel ordinaire de $\mathfrak{X}$
- X^{ord}_{rig} : le tube jusque de X_{rig} ~~ordinaire~~ (lieu de réduction ordinaire)

a.2) Résultats de Katz, Hida

Th (Katz 72)

1) Il existe un faisceau inversible $\omega^{k\text{-univ}}/\mathfrak{X}^{ord} \times \Lambda$ tel que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\omega^{k\text{-univ}}|_{\mathfrak{X}^{ord} \times \{k\}} = \omega^k$ (interpolation p-adique des ω^k, $k \in \mathbb{Z}$)

2) $\forall \psi \neq 1$ $G_\psi^\kappa(q)$ est le q-développement d'un élément ~~$G_\psi \in H^0(\mathfrak{X}^{ord} \times \Lambda_\psi)$~~
$G_\psi^\kappa \in H^0(\mathfrak{X}^{ord} \times \Lambda_\psi, \omega^{k\text{-univ}})$
$E^\kappa(q)$ — d'un élément $E^\kappa \in H^0(\mathfrak{X}^{ord} \times \Lambda_1, \omega^{k\text{-univ}})$ inversible !

3) L'algèbre de Hecke agit naturellement sur $H^0(\mathfrak{X}^{ord} \times \Lambda, \omega^{k\text{-univ}})$

Rem :

1) $\forall K/\mathbb{Q}_p$ fini et $\kappa \in W(K)$ on note $\omega^\kappa = \omega^{k\text{-univ}}|_{\mathfrak{X}^{ord} \times \{\kappa\}}$ et $H^0(\mathfrak{X}^{ord} \times \{\kappa\}, \omega^\kappa)$ est l'espace des formes p-adiques de poids κ.

2) Toute forme modulaire de poids k, niveau $\Gamma_1(p^n N)$ est une forme p-adique de poids κ (dépend du niveau et de k, $\kappa = k_{/x \in (\mathbb{Z}_p^\times)}$)

Les formes p-adiques fournissent un cadre naturel à l'étude des formes de poids variable. Mais c'est un espace gigantesque !

Hida a introduit un projecteur d'ordinarité $e = \lim_{n\to\infty} U_p^{n!}$

Thm (Hida 86)

1) $e H^0(\mathcal{X}^{ord} \times W, \omega^{k^{univ}})$ est un Λ-module libre de rang fini.

2) $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $eH^0(\mathcal{X}^{ord}, \omega^k) = eH^0(X_0(p)_{K_p}, \omega^k)$ est l'espace de formes classiques ordinaires de poids k sur $\Gamma_0(p)\cap\Gamma_1(N)$.

3) Soit $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ une forme propre normalisée ordinaire sur $\Gamma_0(p)\cap\Gamma_1(N)$, de poids $k \in W_f \cap \mathbb{Z}$, cuspidale $(v(a_p) = 1)$.

Il existe :

- Un morphisme $w : \mathrm{Spf}\,\Lambda' \to W_f$ où Λ' est une Λ-algèbre finie et plate.
- Des fonctions q-développement $a_n \in \Lambda'$ $\forall n \geq 1$

telles que : • $\forall x \in \mathrm{Spf}(\Lambda')(\overline{\mathbb{Z}_p})$, $\sum_{n\geq 1} a_n(x) q^n$ est le q-dev. d'une forme propre ordinaire p-adique de poids $w(x)$.

• $\exists x_f \in \mathrm{Spf}(\Lambda')(\overline{\mathbb{Z}_p})$ tq $a_n(x_f) = a_n$ et $w(x_f) = k$.

Remarques : 1) $\mathrm{Spf}\,\Lambda'$ est une variété de Hecke ordinaire.

2) Soit $\rho_f : G_\mathbb{Q} \to GL_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ la rep p-adique associée à f. Si $\overline{\rho_f}$ est absolument irréductible, il existe une famille de représentations :

$\rho_{\Lambda'} : G_\mathbb{Q} \to GL_2(\Lambda')$ $\quad \mathrm{Tr}(\rho_{\Lambda'}(\mathrm{Frob}_\ell)) = a_\ell$ si $\ell \nmid Np$ est premier.

~~[illegible]~~

3) La classicité en poids 1 est délicate.

Thm (Buzzard-Taylor 99) Soit $f \in eH^0(\mathcal{X}^{ord}, \omega^1)$ propre, et $\rho_f : G_\mathbb{Q} \to GL_2(\overline{\mathbb{Z}_p})$ sa représentation.

Supposons :
- $\overline{\rho_f}$ abs. irréductible
- $\rho_f|_{I_p}$ non ramifiée en p, $\rho_f(\mathrm{Frob}_p) = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta \mod m_{\overline{\mathbb{Z}_p}}$

Alors il existe $f' \in H^0(X, \omega^1)$ propre telle que $\rho_f \simeq \rho_{f'}$ (d'image finie !)

b) Surconvergence

b.1) hauteur de Hodge

Soit $v : \overline{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ la valuation $v(p) = 1$

$v : \overline{\mathbb{Z}_p}/p\overline{\mathbb{Z}_p} \to [0,1]$ la valuation tronquée : $v(x) = \inf\{v(\hat{x}), 1\}$ où $\hat{x}$ relève x ds $\overline{\mathbb{Z}_p}$

Soit $E/\overline{\mathbb{Z}_p}$ une courbe elliptique, $\omega : \overline{\mathbb{Z}_p} \xrightarrow{\sim} e^*\Omega_{E/\overline{\mathbb{Z}_p}}$.

La hauteur de Hodge de E est :

$$Hdg(E) = v\left(Ha\left(E|_{\overline{\mathbb{Z}_p}/p\overline{\mathbb{Z}_p}}, \omega|_{\overline{\mathbb{Z}_p}/p\overline{\mathbb{Z}_p}}\right)\right) \in [0,1].$$

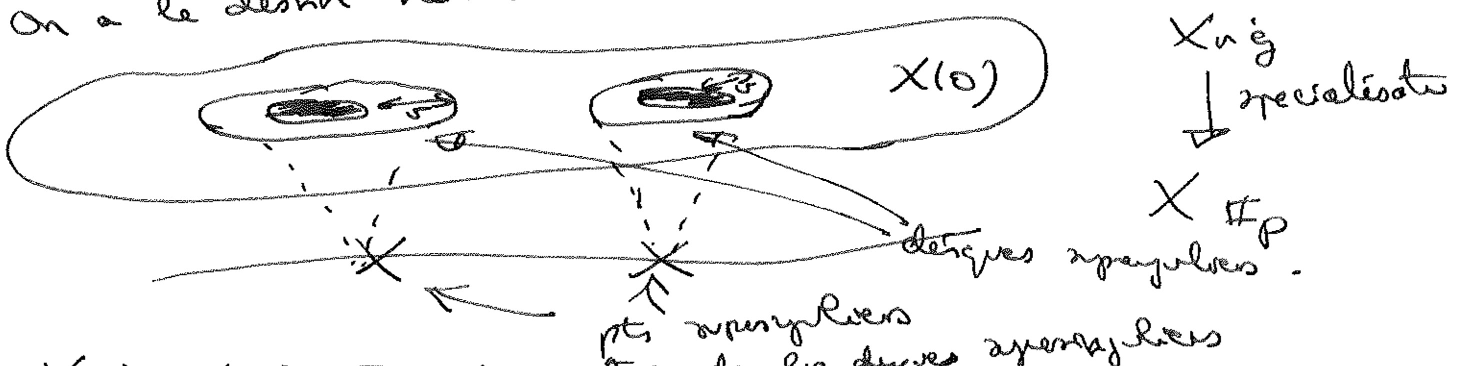
$Hdg(E)$ ne dépend pas de ω.

On obtient ainsi une application :

$$Hdg : X_{rig} \to [0,1], \quad E \mapsto Hdg(E)$$

Def : Soit $v \in [0,1]$. $X(v) = \{x \in X_{rig},\ Hdg(x) \leq v\}$: c'est un ouvert de X_{rig}. $X(0) = X_{rig}^{ord}$ est l'ouvert "ordinaire".

On a le dessin habituel :



$X(v) = X_{rig} \setminus$: on rentre dans les disques supersinguliers

b.2) Forme surconvergente

Def (Katz 72) Soit $v \in]0,1]$. Une forme v-surconvergente ~~...~~ de poids $k \in \mathbb{Z}$ est une section de $H^0(X(v), \omega^k)$.
Le module des formes surconvergentes de poids k est $\varinjlim_{v>0} H^0(X(v), \omega^k)$

rem : Soit $k \in \mathbb{Z}$, $v > 0$. On a une inclusion $H^0(X(v), \omega^k) \hookrightarrow H^0(X(0), \omega^k) = H^0(\mathcal{X}^{ord}, \omega^k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$

Thm (Katz, Serre) 1) Si $v < \frac{p-1}{p}$, l'opérateur U_p agit sur le Banach $H^0(X(v), \omega^k)$. C'est un opérateur compact.

2) On a une décomposition spectrale :

$$H^0(X(v), \omega^k) = \widehat{\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}}} H^0(X(v), \omega^k)^{\alpha} \oplus H^0(X(v), \omega^k)^{\infty}$$

de dimension finie

où $\forall \alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $H^0(X(v), \omega^k)^{\alpha}$ est le sous-espace sur lequel U_p est de pente α. Si $\alpha < +\infty$, il est

Thm (Coleman 92-36)

1) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha < k-1$. Alors $H^0(X(v), \omega^k)^\alpha = H^0(X_0(p), \omega^k)^\alpha$
$v > 0$

"les formes de petite pente sont classiques".

2) Soit $f = \sum a_n q^n$ une forme propre normalisée sur $\Gamma_0(p)$ de poids $k \in \mathbb{Z} \cap W_f$.

. On a un diagramme

$$\begin{array}{l} w : \mathcal{X}_f \\ \downarrow \text{fini surjectif} \\ \mathcal{U} \xrightarrow[\text{ouvert}]{} W_f \\ \ni k \end{array}$$

, $\mathcal{X}_f$ equidim. de dim 1.

des fonctions q-developpement $a_n \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}_f}$ tq ~~$\forall k \in \mathbb{Z} \cap W_f$~~

- $\forall x \in \mathcal{X}_f$, $w(x) \in \mathbb{Z} \cap \mathcal{U}$, $\sum a_n(x) q^n$ est le q-developpement d'une forme surconvergente propre normalisée de poids $w(x)$.
- $\exists x_f \in \mathcal{X}_f$, $w(x_f) = k$ et $a_n(x_f) = a_n$.

Rem : 1) $\mathcal{X}_f$ est un voisinage de x_f dans la courbe de Hecke $\mathcal{E}$.
2) Toute forme ordinaire surconverge
3) Coleman definit des formes surconvergentes de poids quelconque à l'aide de la serie d'Eisenstein E^κ : " formes surconvergentes de poids κ " = " E^κ_κ · formes surconvergentes de poids 0 ".
ex : Soit $\kappa \in W_1$

Coleman et Mazur ont posé la question d'une definition naturelle de formes surconvergentes.

Thm (Andreatta, Iovita, Stevens/—)

1) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert quasicompact de W. $\exists v > 0$ (explicite) et une famille de faisceaux inversibles $\omega^{\kappa^{un}} / X(v) \times W$ tq
- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\omega^{\kappa^{un}}|_{X(v) \times \{k\}} = \omega^k$
- ~~$\forall \kappa \in W(K)$~~ $\omega^{\kappa^{un}}|_{X(0) \times W}$ = (l'être unique) faisceau des formes p-adiques modulaires

2) Si $\mathcal{U}$ ouvert q.c de W_1, alors $E^\kappa \in H^0(X(v) \times \mathcal{U}, \omega^{\kappa^{un}})$ est inversible.

PLAN DU COURS

I) Interpolation p-adique de faisceaux modulaires sur les variétés de Siegel et construction de la variété de Hecke

Travail en commun avec Andreatta et Iovita. Nous rédigeons également le cas Hilbert. Brasca a traité dans sa thèse les courbes de Shimura.

II) Classicité des formes surconvergentes

- En poids régulier (~ Coleman/Hida) : Travail en commun avec B. Stroh. (Nous avons traité les variétés PEL pour un groupe G ~~totalement~~ symplectique/unitaire totalement décomposé en p. et les variétés de Hilbert lorsque p non-ramifié).
- En poids 1 pour les formes de Hilbert (~ B-T) : Voir également le travail de Kassaei.

Interpolation p-adique des faisceaux

I) Formes modulaires de Siegel classiques

I.1) Notations

- $g \geq 1$ un entier, p premier, $N \geq 3$, $(p,N)=1$
- $Y/\mathbb{Z}[1/N]$: le schéma de modules des variétés abéliennes ppav de dim g, munies d'un isom symplectique $\psi_N : A[N] \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^g \times \mu_N^g$.
- $X/\mathbb{Z}[1/N]$: une compactification toroïdale lisse.

X et Y sont de dim relative $g(g+1)/2$ sur Spec $\mathbb{Z}[1/N]$.

- $G \underset{e}{\to} X$: le schéma semi abélien qui étend le schéma abélien univ.
- $\mathcal{T}^\times \to X$: le GL_g-torseur $\mathrm{Isom}_X(\mathcal{O}_X^g, e^*\Omega^1_{G/X})$.
- $T \subset B \subset GL_g$: le tore diagonal et le Borel supérieur
- $X(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z}^g$: le groupe des caractères de T
- $X^+(T)$: le cône dominant $= \{\kappa = (k_1, \dots, k_g) \in X(T),\ k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_g\}$

I.2) Faisceaux classiques

Soit $\kappa \in X^+(T)$, $\kappa = (k_1, \dots, k_g)$. Posons $\kappa' = (-k_g, -k_{g-1}, \dots, -k_1) \in X^+(T)$.

Soit $\pi : \mathcal{T}^\times \to X$ la projection.

Déf : 1. Le faisceau modulaire de poids κ est

$$\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}^\times}[\kappa'] = \{ f \in \pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}^\times},\ f(wb) = \kappa'(b) f(w),\ \forall w \in \mathcal{T}^\times, b \in B \}.$$

2. $H^0(X, \omega^\kappa)$ est le module des formes de Siegel sur X de poids κ.

remarque : 1) Si $g=2$, $\kappa = (k_1, k_2) \in X^+(T)$. $\omega^\kappa = \mathrm{Sym}^{k_1-k_2} e^*\Omega^1_{G/X} \otimes \det^{k_2} e^*\Omega^1_{G/X}$

2) Si $g \geq 2$, le rang du faisceau ω^κ dépend de κ ! Pour interpoler les faisceaux, commençons par interpoler les représentations du groupe GL_g.

II) Interpolation des représentations du groupe GL_g

La théorie est triviale pour $g=1$. C'est $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{W}$

II.1) Notations

- $\mathcal{W}$: espace des poids, $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{gr}(T(\mathbb{Z}_p), \mathbb{C}_p^\times)$
- I groupe d'Iwahori $= \left\{ \begin{pmatrix} \times & \times \\ p\times & \times \end{pmatrix} \in GL_g(\mathbb{Z}_p) \right\}$
- $N^0 = \left\{ n \in GL_g(\mathbb{Z}_p),\ n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\times & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

On a une décomposition d'Iwahori : $B(\mathbb{Z}_p) \times N^0 \xrightarrow{\sim} I$

· $\kappa \in X^+(T)$. $V_\kappa = \mathrm{Ind}_B^{G_g} \kappa = \{ f : G_g \to \mathbb{A}^1,\ f(gb) = \kappa(b) f(g) \}$
l'induit algébrique

II.2) Les caractères sont loc. analytiques

Soit T_{rig} le tore rigide associé à $T(\mathbb{Z}_p)$ $(T(\mathbb{C}_p) = O_{\mathbb{C}_p}^\times)$
Pour tout $w > 0$, il existe un sous groupe rigide $T_w \hookrightarrow T_{rig}$ tq
$T_w(\mathbb{C}_p) \simeq (1 + p^w O_{\mathbb{C}_p})^g$.

<u>Prop</u> : 1) Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension fine, et $\kappa \in W(L)$: $T(\mathbb{Z}_p) \to L^\times$
$\exists w > 0$ tq κ admette une unique extension en un caractère analytique $\kappa : T(\mathbb{Z}_p) T_w \to \mathbb{G}_{m,rig}$

2) Soit $\mathcal{U} \subset W$ un ouvert quasicompact. $\exists w_0 > 0$ tq le caractère universel $\kappa^{univ}|_{\mathcal{U}}$ admette une extension analytique :
$\kappa^{univ} : T(\mathbb{Z}_p) T_{w_0} \times \mathcal{U} \to \mathbb{G}_{m,rig}$

II.3) Induction Iwahorique (Ash-Stevens, Chenevier, Jones, Urban)

Soit $L/\mathbb{Q}_p$ fine, $\kappa \in W(L)$, $w > 0$ tq κ w-analytique

<u>Def</u> : L'induite w-analytique est
$V_\kappa^{w\text{-an}} = \{ f : I \to L,\ f(ib) = \kappa(b) f(i)\ \ \forall i, b \in B(\mathbb{Z}_p),\ f|_{N^0}$
est w-analytique $\}$.

w-anal : $\forall x \in N^0$, $f|_{B(x, p^{-w})}$ est donnée par une série convergente en $\frac{g(g-1)}{2}$ variables

C'est un espace de Banach, muni d'une action de I.

<u>Prop</u> : Le Banach $V_\kappa^{w\text{-an}}$ ne dépend pas de κ w-analytique (l'action de I oui).

La construction peut se faire en famille :
Soit $\mathcal{U} \subset W$ qc.
$V_{\kappa^{univ}}^{w_0\text{-an}} = \{ f : I \to \mathcal{O}(\mathcal{U}),\ f(ib) = \kappa^{univ}(b) f(i),\ f|_{N^0}$ est w^0-analytique $\}$.

~~Et on a~~ <u>Soit $\kappa \in \mathcal{U}$,</u> $\qquad V_{\kappa^{univ}}^{w_0\text{-an}} = V_\kappa^{w_0\text{-an}} \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$

<u>dem</u> : 1/ On peut supposer $g = 1$. Pour $t \in \mathbb{C}_p$ proche de zéro, la fonction $(1+p)^t \mapsto \kappa(1+p)^t = \exp(t \log \kappa(1+p))$
est analytique de t.
2/ Similaire.

II.3) Des opérateurs compacts, classicité

Soit $1 \leq j \leq g-1$. Posons $d_j = \begin{pmatrix} p^{-1} 1_{g-j} & \\ & 1_j \end{pmatrix} \in GL_g(\mathbb{Q}_p)$. Soit $f \in V_\kappa^{w\text{-an}}$. Posons $\delta_j f(i) = f(d_j n d_j^{-1} b)$ $(i = nb)$

<u>Prop</u> : L'opérateur $\prod_{i=1}^{g-1} \delta_i$ est compact. Si $\kappa = (k_1, \dots, k_g) \in X^+(T)$ le sous espace de $V_\kappa^{w\text{-an}}$ où δ_i est de pente $< k_{g-i} - k_{g-i+1} + 1$ est inclus dans V_κ

<u>Remarque</u> : En fait il y a une suite exacte de I représentation (BGG) :

$$0 \to V_\kappa \to V_\kappa^{w\text{-an}} \xrightarrow{d} \bigoplus_{\alpha \text{ racines simples}} V^{w\text{-an}}_{\alpha \cdot \kappa} \quad \text{pour } w \leq 1.$$

d est un opérateur différentiel.

II.4) Explicitation de la théorie pour GL_2

Posons $\kappa = (k, 0)$ $k \geq 0$.

$$\begin{tikzcd}
V_\kappa \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \{\text{Polynômes homo de degré } k \text{ en } X, Y\} \arrow[r, "\sim"] & \{\text{Poly de degré} \leq k \text{ en } Y\} \arrow[d] \\
V_\kappa^{w\text{-an}} \arrow[rr, "\text{restrict à } N^0 \simeq p\mathbb{Z}_p", "\simeq"'] \arrow[d, "d"] & & \{f^n \ w\text{-analytiques sur } p\mathbb{Z}_p \ (\text{coordonnée } Y)\} \arrow[d, "\left(\frac{d}{dY}\right)^{k+1}"] \\
V^{w\text{-an}}_{(-1,k+1)} \arrow[rr, "\simeq"] & & \{f^n \ w\text{-analytiques sur } p\mathbb{Z}_p\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} X & Z \\ Y & W \end{pmatrix} \mapsto P(X,Y) \longleftarrow P(X,Y) \longrightarrow P(1,Y)$$

- L'opérateur δ_1 agit comme $f(Y) \mapsto f(pY)$ et les fonctions polynomiales $1, Y, \dots, Y^k$ sont une base de $V_\kappa^{w\text{-an} < k+1}$
- les éléments $i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I$ agissent par $i.f(Y) = (a+bY)^k f\left(\frac{c+dY}{a+bY}\right)$ sur $V_\kappa^{w\text{-an}}$