Où va-t-on ?

X : compactification toroïdale de la variété de Siegel de genre g niveau premier à p

- $G \xrightarrow[F_e]{} X$: schéma semi-abélien, $\omega_G = e^*\Omega^1_{G/X}$ faisceau conormal.
- $\mathcal{T}^\times = \mathrm{Isom}_X(\mathcal{O}_X^g, \omega_G)$: GL_g-torseur associé. $\pi : \mathcal{T}^\times \to X$.
- T : tore de GL_g et $\forall \kappa \in X^+(T)$ $\omega^\kappa = \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}^\times}[\kappa']$

où si $\kappa = (k_1, \dots, k_g)$, $\kappa' = (-k_g, \dots, -k_1)$ et ω^κ est localement une induite algébrique $V_{\kappa'} = \mathrm{Ind}_B^{GL_g} \kappa'$

On a vu que $\forall \kappa \in X^+(T)$, on a une résolution :

$$0 \to V_\kappa \xrightarrow{i} V_\kappa^{w\text{-an}} \to \bigoplus_{\alpha \text{ racine simples}} V_{\alpha\cdot\kappa'}^{w\text{-an}}$$

où $V_\kappa^{w\text{-an}} = \mathrm{Ind}_{B,\, w\text{-an}}^{I} \kappa$ et que les espaces $V_\kappa^{w\text{-an}}$ se mettent en famille sur $\mathcal{W}$ $(= \mathrm{Hom}_{gr}(T(\mathbb{Z}_p), \mathbb{C}_p^\times))$ l'espace des poids.

Rem : pour GL_1, c'est un isom et la théorie est plus simple.

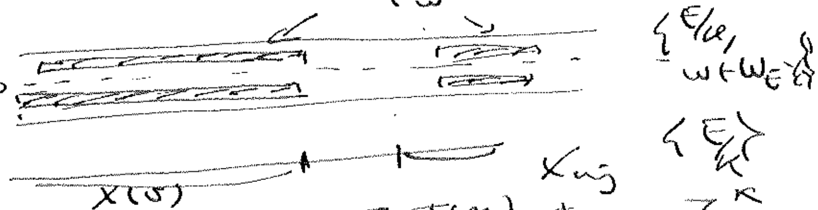
Pour "interpoler" les faisceaux $\{\omega^\kappa\}_{\kappa \in X^+(T)}$ (c'est impossible si $g \geq 2$) il faut créer les conditions de faire des induites analytiques sur des ouverts convenables de X.

Faisons un dessin pour $g = 1$:

$\mathcal{T}^\times \xrightarrow{\text{analytification}} \mathcal{T}^{\times an}_b$

$\downarrow$ le torseur

X $\qquad X_{rig}$



On va voir que $\forall w > 0$, $\exists$ un ouvert convenable et un $T_w T(\mathbb{Z}_p)$-torseur $\mathcal{T}_w^\times$

(rappel : $T_w T(\mathbb{Z}_p)(\mathbb{C}_p) = \mathbb{Z}_p^\times \cdot (1 + p^w \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$)

~~On posera~~ : Soit $\kappa \in \mathcal{W}$, w-analytique, on posera $\omega^\kappa = \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}_w^\times}[\kappa']$

c'est un faisceau inversible.

Cette construction repose sur la théorie du sous-groupe canonique.

III) Théorie du sous groupe canonique et applications

a) L'application de Hodge-Tate

S un schéma, G un groupe fini et plat sur S et $G^D \to S$ son dual de Cartier : $\forall T \to S$ $G^D(T) = \mathrm{Hom}_{gr}(G_T, \mathbb{G}_{m,T})$.

$\omega_G = e^* \Omega^1_{G/S}$ le faisceau conormal. Il lui correspond le foncteur faisceau abélien fppf

$\underline{\omega}_G : Sch/S \longrightarrow (Ab)$
$T \to S \longmapsto H^0(T, \omega_G|_T)$

Si $\omega_G \simeq \mathcal{O}_S^r$, $\underline{\omega}_G = \mathbb{G}_a^n$

Déf : L'application de Hodge-Tate de G^D est le morphisme de faisceaux abéliens :

$HT_{G^D} : G^D \longrightarrow \underline{\omega}_G$ défini par

$\forall T \to S$, $\varphi : G_T \to \mathbb{G}_{m,T} \in G^D(T)$, $HT_{G^D}(\varphi) = \varphi^* \frac{dt}{t}$ où

$\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Exemples :

1) $G = \mu_p = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_S[t]/t^p - 1$, $G^D = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|_S$

Soit $1 \in G^D(S)$ ($\mu_p|_S \hookrightarrow \mathbb{G}_{m_S}$). Alors $HT_{G^D}(1) = \frac{dt}{t} \in \omega_{\mu_p}$

2) $S = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ ($K/\mathbb{Q}_p$ fini) $(a, b) \in \mathcal{O}_K^2$, $ab = w_p = p \times$ unité universelle, (section $X = 0$).

On a un schéma en groupe de Oort-Tate $G_{a,b} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K[X]/X^p - aX$

$\omega_{G_{a,S}} = \mathcal{O}_K / a\mathcal{O}_K \, dX$. Soit $\beta \in \mathcal{O}_K$ tq $\beta^{p-1} = b$

$= G_{a,b}^D = G_{b,a} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K[X]/X^p - bX$. On montre que

$\beta \in G_{b,a}(\mathcal{O}_K)$ est un générateur de Oort-Tate.

$HT_{G_{b,a}}(\beta) = \beta\, dX \in \mathcal{O}_K / a\mathcal{O}_K \, dX$.

En particulier, $HT_{G_{b,a}}(\beta)$ engendre $\omega_{G_{a,S}}$ ssi $\beta \in \mathcal{O}_K^\times \Leftrightarrow b \in \mathcal{O}_K^\times$
$\Leftrightarrow G_{a,b}$ multiplicatif
$\Leftrightarrow a \in \mathcal{O}_K^?$ ssi $G_{a,b}$ est étale

5) Le sous groupe canonique sur un trait

. $K/\mathbb{Q}_p$ extension valuée complète, $v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la valuation ($v(p)=1$).
. O_K : anneau des entiers, $v : O_K/pO_K \to [0,1]$ valuation tronquée.

. Si M est un O_K-module de pres finie, de torsion, $M \simeq \bigoplus_{i=1} O_K/a_i O_K$ et on pose $\deg M = \sum v(a_i)$.
. Si G/O_K est un schéma en gpe fini et plat, $\deg(G) = \deg(\omega_G)$

. $w \geq 0$, $O_{K,w} = O_K/p^w O_K$. si M est O_K-module $M_w = M \otimes_{O_K} O_{K,w}$; S est un O_K schéma $S_w = S \times O_{K,w}$

. Soit $G \to O_K$ un schéma abélien de dim g p.p. (toute la théorie est valable pour G un Barsotti-Tate tronqué).

. $\forall n \in \mathbb{N}$, on a un groupe $G[p^n]$, un dessinage connexe-étale $G^m[p^n] \subset G[p^n]^0 \subset G[p^n]$ et $G[p^n]/G^0[p^n]$ est étale

$\underbrace{G^m[p^n]}_{\text{gpe mult}}$ composante connexe de 1

et une application $HT(n) \otimes 1 : G[p^n](K) \otimes O_K \to \omega_{G[p^n]} = \omega_G / p^n \omega_G \simeq O_K^g$

. On a $V : G[p]_1^{(p)} \to G[p]_1$ de différentielle : la matrice de Hasse-Witt $V^* : \omega_{G[p]} \to \omega_{G[p]^{(p)}}$ et de déterminant $Ha = \det^{p-1}_{G[p]}$ l'invariant de Hasse.

. $Hdg(G) = v(Ha) \in [0,1]$

5.1) Cas ordinaire

Prop : sont équivalents
1) $Hdg(G) = 0$
2) $\forall n \geq 1$, $G[p^n]^0 = G[p^n]^m$ est un schéma en gpe fini et plat de rg p^{ng} mult
3) Si $K = K^{nr}$, $\forall n \geq 1$, $HT(n) \otimes 1$ est surjective.

dem (esquisse)
. 2) $\Rightarrow$ 1) et 3) se ramène à un calcul sur $\mu_p = G_{m,p,1}$
 . $V^* : \omega_{\mu_p} \to \omega_{\mu_p}^{(p)}$ est un isomorphisme ~~est un iso~~ engendré ω_{μ_p}.
 . $HT_{\mu_p}(1)$ ~~...~~
. 2) équivaut à $G[p]_1^0 = G[p]_1^m$ par dévissage et déformation des groupes multiplicatifs

On a une suite exacte : $0 \to \operatorname{Ker} F \to G[p]_1 \xrightarrow{HT_{G[p]_1}} \underline{\omega}_{G[p]} \xrightarrow{F_{G_a}^g - V^*} \omega_{G[p]}^{(p)} \to 0$
$\underline{\omega}_{G[p]} \simeq G_a^g|O_{K,1}$, $\omega_{G[p]}^{(p)} \simeq G_a^{(p)g}|O_{K,1}$

$Hdg(G) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} F_{G_a}^g - V^*$ est un gpe étale $\Leftrightarrow HT_{G[p]} \otimes 1$ surjectif sur O_K/m_K
$\Leftrightarrow G[p]_1/\operatorname{Ker} F$ est étale $\Leftrightarrow HT_{G[p]} \otimes 1$ surjectif sur K^{nr}
$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} F = G[p]_1^0$ soit multiplicatif $\Leftrightarrow HT_{G[p^n]} \otimes 1$

Def : On note $H_n = G[p^n]^0$, on l'appelle sous groupe canonique d'échelon n.

rem : . $H_{n,1} = \mathrm{Ker} F$

Remarque : On a un diagramme : $HT(n)$:

$$\begin{tikzcd} H_n(K) \arrow[d] & \\ G[p^n](K)\otimes O_K \arrow[r] \arrow[d] & \omega_{G[p^n]} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ H_n^D(K)\otimes O_K \arrow[r, "\sim"] & \omega_{H_n} \end{tikzcd}$$

En particulier, $\omega_{G[p^n]} \cong \omega_{H_n} \cong O_{K,n}^g$ a une structure de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-module libre sous-jacente.

4.2) Cas général

Lubin-Katz (?) : $g=1$

Abbès Mokrane : g quelconque $n\geq 1$ $p\geq 3$

Andreatta Gasbarri :

Tian : BT, $n=1$ — $p\geq 3$

Fargues : BT, n quelconque — $p\geq 3$

Hattori : $p=2$ (?)

Thm : Posons $v = \mathrm{Hdg}(G)$. Supposons n et ... si $v < \frac{1}{2p^{n-1}}$ ($\frac{1}{3p^{n-1}}$ si $p=3$)

la filtration de Harder Narasimhan de $G[p^n]$ possède un cran H_n appelé sous groupe canonique d'échelon n qui vérifie :

- $H_n(\bar K) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$
- $\deg H_n = ng - \frac{p^n-1}{p-1}v$
- $H_n[p^k] = H_k$ si $k\leq n$.
- $H_1|_{1-v} = \mathrm{Ker} F$.
- $H_n^\perp = H_n$.

Remarque : 1) ~~On a une surjecti~~ On a une surjection $\omega_{G[p^n]} \to \omega_{H_n} \to 0$, $\omega_{G[p^n]} = O_{K,n}^g$

et $\deg H_n = ng - \frac{p^n-1}{p-1}v \Rightarrow$ l'application $\omega_{G[p^n],\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v} \xrightarrow{\sim} \omega_{H_n,\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v}$, où $\omega_{G[p^n],\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v} = O_{K,\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v}^g$

2) Supposons $K=\bar K$. On a une suite exacte :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(K) \arrow[r] & G[p^n](K) \arrow[r, "HT(n),\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v"] \arrow[d] & \omega_{G[p^n],\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v} \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ & & H_n^D(K) \arrow[r, "HT_{H_n^D},\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v"] & \omega_{H_n^D,\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v} \end{tikzcd}$$

de plus : $\deg(\mathrm{Coker}\, HT(n),\, n-\frac{p^n-1}{p-1}v \otimes 1) = \frac{v}{p-1}$

Par rapport au cas ordinaire on a donc :

- léger défaut de surjectivité de $HT\otimes 1$
- léger défaut d'injectivité de $\omega_{G[p^n]} \to \omega_{H_n}$

$\Big\}$ quantifiables en fonction de v

c) La théorie du sg canonique en famille

Soit $K/\mathbb{Q}_p$ une ext finie.

<u>Adm</u> : Catégorie des O_K-alg de Tate (admissibles) $(R = O_K\langle X_1, \dots, X_r\rangle / \mathfrak{a}$ plateau $O_K)$

<u>NAdm</u> : + normalité

soit $R \in$ <u>Adm</u>

<u>RAdm</u> : R-algèbres admissibles

<u>RNAdm</u> : " normales admissibles.

Soit $R \in$ <u>Adm</u>. On lui associe $S = \operatorname{Spec} R$, $\hat{S} = \operatorname{Spf} R$, $S_{rig} = \operatorname{Spm} R[\frac{1}{p}]$

<u>ex</u> : $R = O_K\langle X\rangle$, S_{rig} = boule unité

Soit $G \to S$ un schéma abélien de dim g, principalement polarisé.

<u>Thm</u> : Supposons $R \in$ <u>NAdm</u>, $v \in v(O_K)$, $v < \frac{1}{2p^{n-1}}$ $(\frac{1}{3p^{n-1}})$, $\forall x \in S_{rig}$, $\operatorname{Hdg}(G(x)) \leq v$.

Alors il existe un schéma en grpe fini et plat $H_n \hookrightarrow G[p^n]$ tq

- $\forall x \in S_{rig}$ $H_n(x)$ est le ss grpe canonique d'échelon n,
- H_n / S_{rig} est étale $\underset{\text{loc étale}}{\simeq} (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$
- $\omega_{G, n - v\frac{p^n-1}{p-1}} \xrightarrow{\sim} \omega_{H_n, n - v\frac{p^n-1}{p-1}} \underset{\text{loc. tor}}{\simeq} (R/p^{n - v\frac{p^n-1}{p-1}})^g$
- si $H_n^D(R) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$ (i.e. $H_n/_{S_{rig}}$ constant) alors :

$\operatorname{Coker}(HT_{H_n^D(R)} \otimes_{\mathbb{Z}} R \to \omega_{H_n})$ est tué par $p^{v/p-1}$

<u>rem</u> : 1) L'existence de H_n/S_{rig} résulte des propriétés de la filtration de Harder Narasimhan.

2) L'existence de H_n/S fini et plat provient du fait que $\forall x \in S_{rig}$, $H_n(x)$ se spécialise sur $\operatorname{Ker} F^n$: pas besoin d'éclater la fibre spéciale.

d) Modification de ω_G : le faisceau $\mathcal{F}$

<u>Prop</u> Supposons $H_n^D(R) = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$. Il existe un unique faisceau $\mathcal{F} \subset \omega_G$ vérifiant : (petite modification!)

- $p^{v/p-1}\omega_G \subset \mathcal{F}$
- $\forall w \in]0, n - v\frac{p^n}{p-1}]$, l'application $HT_{H_n^D}$ induit un isomorphisme :

HT_w : $H_n^D(R) \otimes_{\mathbb{Z}} R_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}/p^w\mathcal{F} \simeq \mathcal{F} \otimes_R R_w$

<u>dem</u> : ops $\omega_G \simeq R^g$. Soit $x_1, \dots x_g$ une base de $H_n^D(R) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$

~~Soit~~ Pour $1 \leq i \leq g$, soit $\hat{s}_i$ un relevant dans ω_G de $HT_{H_n^D}(x_i) \in \omega_{H_n}$. Soit $\mathcal{F}$ le ~~faisceau~~ sous faisceau de ω_G engendré par $\{\hat{s}_i\}_{1 \leq i \leq g}$, ne dépend pas des choix.

rem : 1/- Supposons $\mathcal{G}$ ordinaire et soit R^{nr} le revêtement universel de R. ~~Pour tout~~

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a un isom : $\quad HT_{H_n^D} \otimes 1 : H_n^D(R^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} R^{nr} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathcal{G}[p^n]} \otimes_R R^{nr}$

& la limite : $\quad HT_{H_\infty^D} \otimes 1 : T_p(H_\infty^D)(R^{nr}) \otimes_{\mathbb{Z}} R^{nr} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathcal{G}} \otimes_R R^{nr}$

~~Calcul~~ et $\omega_{\mathcal{G}} \otimes_R R^{nr}$ provient d'un $\mathbb{Z}_p$-module libre $T_p(H_\infty^D)(R^{nr})$.

Quand $\mathcal{G}$ n'est pas ordinaire mais admet un ss grpe canonique,

$(\mathcal{F}, HT_w \otimes 1)$ servent de substitution.

2/ $\mathcal{F}$ ne peut être défini que si $H_1^D(R) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^g$ dans le cas non ordinaire.

e) Structure Iwahorique

. e.1) Notations

. $GR_{\mathcal{F}}/S$: Grassmannienne de $\mathcal{F}$ qui paramètre les drapeaux :

$Fil_0 \mathcal{F} = 0 \subset Fil_1 \mathcal{F} \subset \cdots \subset Fil_g \mathcal{F} = \mathcal{F}$

. $GR^+_{\mathcal{F}}/S \to GR_{\mathcal{F}}/S$: le T-torseur qui paramètre des ~~bases~~ $\omega_i \in Gr_i \mathcal{F}$ pour $1 \leq i \leq g$

(c'est $Gl_g/U \to Gl_g/B$)

. $\psi : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \simeq H_n^D(R)$ un isom fixé

. $e_1, \ldots, e_g$ la base canonique de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$, $\{Fil_i^+ := \langle e_1, \ldots e_i \rangle\}$ le drapeau canonique. Pour $1 \leq i \leq g$ $e_i \bmod Fil_{i-1}^+$ est un générateur canonique de Gr_i^+.

e.2) Construction

Soit $w \in]0, n - v\frac{p^n}{p-1}]$. On a un isomorphisme :

$$HT_w \otimes 1 : \quad H_n^D(R) \otimes_{\mathbb{Z}} R_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}/p^w \mathcal{F}$$

Déf : Soit $R' \in \underline{RAdm}$.

1) $Fil_\bullet \mathcal{F} \otimes_R R' \in GR_{\mathcal{F}}(R')$ est w-compatible avec ψ si

$Fil_\bullet \mathcal{F} \otimes_R R' \bmod p^w R' = HT_w \otimes 1\, (Fil_\bullet^+ \otimes_{\mathbb{Z}} R'_w)$

2) $(Fil_\bullet \mathcal{F} \otimes_R R', \{w_i\}_{1 \leq i \leq g}) \in GR^+_{\mathcal{F}}(R')$ est w-compatible avec ψ si de plus $w_i \bmod p^w Fil_i \mathcal{F} \otimes_R R' = HT_w \otimes 1(e_i \otimes 1)$

Prop : Les foncteurs :

$$\begin{aligned} IW_w : \underline{RAdm} &\longrightarrow Ens \\ R' &\longmapsto \{Fil_\bullet \mathcal{F} \otimes_R R' \in GR_{\mathcal{F}}(R'),\ w\text{-compatibles}\} \\ IW_w^+ : \underline{RAdm} &\longrightarrow Ens \\ R' &\longmapsto \{(Fil_\bullet \mathcal{F} \otimes_R R', \{w_i\}),\ w\text{-compatibles}\} \end{aligned}$$

sont représentables

par des schémas formels affines :

dans localement, $\mathcal{F} \simeq R^g$. Soit $f_1 \dots f_g$ une base de $\mathcal{F}$ telle que

$f_i \bmod p^w \mathcal{F} = HT_{\omega}(e_i \otimes 1)$.

Dans cette base :

$$JW_w \simeq \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ p^w B(0,1) & \ddots & \\ p^w B(0,1) & p^w B(0,1) & 1 \end{pmatrix} \subset GL_g / B$$

où $B(0,1) = \mathrm{Spf}\, R\langle X \rangle$

$$JW_w^+ \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ p^w B(0,1) & \ddots & \\ p^w B(0,1) & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{paramètre le drapeau}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1+p^w B(0,1) & & \\ & \ddots & \\ & & 1+p^w B(0,1) \end{pmatrix}}_{\text{paramètre le vecteur de base des gradués.}}$$

Soit $\mathcal{F}_w$ le groupe formel défini par $\mathcal{F}_w(R') = \ker(\mathcal{F}(R') \to \mathcal{F}(R'/p^w R'))$

pour tout $R' \in \underline{\mathrm{Adm}}$

$$\begin{array}{c} JW_w^+ \\ \downarrow \\ JW_w \end{array} \quad \text{est un } \mathcal{F}_w \text{ torseur.}$$

III) Formes surconvergentes localement analytiques

1) Notations

- $K/\mathbb{Q}_p$ est finie, $n \in \mathbb{N}$ entier, $v \in \mathbb{R}_+$, $v < \frac{1}{2p^{n-1}}$ $\left(\frac{1}{3p^{n-1}}\right)$
- X/O_K : var de Siegel compactifiée, niveau premier à p, D son bord.
- $G \to X$: schéma semi abélien de dim g
- $\mathfrak{X}$: complété de X le long de $X_{\mathbb{F}_p}$, X_{rig} fibre générique
- Ha : invariant de Hasse
- $Hdg : X_{rig} \to [0,1]$ la hauteur de Hodge
- $X(v) = \{x \in X_{rig},\ Hdg(x) \leq v\}$.
- $\mathfrak{X}(v) = \mathrm{Spf}\ O_{\mathfrak{X}}\langle X\rangle / (p^v - Ha\,X)$: modèle formel de $X(v)$, normal.
- $H_n^D \to \mathfrak{X}(v)$: le dual du groupe canonique d'échelon n. C'est un $tg(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$-

Def : 1) $X_1(p^n)(v) = \mathrm{Isom}_{X(v)}(H_n^D, (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g)$. $\psi : H_n^D \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}^g$ l'objet universel. torseur étale au dessus de $X(v)$.

2) $\mathfrak{X}_1(p^n)(v)$: normalisation de $\mathfrak{X}(v)$ ds $X_1(p^n)(v)$.

3) $X_{Iw}(p)(v) = X_1(p)(v)/B(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (paramètre des drapeaux ds H_1^D)

$\mathfrak{X}_{Iw}(p)(v) = \mathfrak{X}_1(p)(v)/B(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: modèle formel.

fibre générique   schéma formel

$$\begin{tikzcd}
\psi \quad X_1(p^n)(v) \arrow[r] \arrow[d, "\text{étale}"] & \mathfrak{X}_1(p^n)(v) \arrow[d, "\text{fini}"] \\
\text{drapeau ds } H_1^D \quad X_{Iw}(p)(v) \arrow[r] \arrow[d, "\text{étale}"] & \mathfrak{X}_{Iw}(p)(v) \arrow[d, "\text{fini}"] \\
X(v) \arrow[r] & \mathfrak{X}(v)
\end{tikzcd}$$

rq : 1) si $g=1$ $X_{Iw}(p)(v) = X(v)$ et $\mathfrak{X}_{Iw}(p)(v) = \mathfrak{X}(v)$, $\mathfrak{X}_{Iw}(p)(v)$ est la base "naturelle" de toute la théorie.

2) Tous ces espaces ont des interprétations modulaires raisonnables.

Par exemple : $\forall R \in \mathrm{NAdm}$, $\mathfrak{X}_1(p^n)(v) - D(R) = \{G/R, \psi, \psi_n\}$, $Hdg(G_x) \leq v$ $\forall x \in \mathrm{Spm}\,R[1/p]$

- G/R schéma semi-abélien de dim g, p.p. et
- $\psi : H_n^D(R) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g$.

2) Les faisceaux

On dispose de :

Sur $\mathfrak{X}_1(p^n)(v)$

- $\mathcal{F}$ modification de ω_G
- $\forall w \in \left]0, n - v\frac{p^n}{p-1}\right]$ $\quad HT_w \otimes 1 : (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^g \otimes_{\mathbb{Z}} O_{\mathfrak{X}_1(p^n)(v)} \simeq \mathcal{F}/p^w\mathcal{F}$
- $\mathcal{IW}_w^+ \to \underbrace{\mathcal{IW}_w \to \mathfrak{X}_1(p^n)(v) \to \mathfrak{X}_{Iw}(p)(v)}_{\pi}$

drapeaux + base des gradués w-compatibles   drapeaux w-compat de $\mathcal{F}$

$\mathrm{Gr}^+\mathcal{F}$ $\mathrm{Gr}\,\mathcal{F}$

Soit : - $\mathfrak{B}_w$ le groupe formel $B_w(R) = \ker(\mathfrak{B}(R) \to \mathfrak{B}(R/p^w R))$
$R \in \mathrm{Adm}$
- $\mathfrak{U}_w$ son radical unipotent $U_w(R) = \ker(\mathfrak{U}(R) \to U(R/p^w R))$

$\mathfrak{T}_w = \mathfrak{B}_w / \mathfrak{U}_w$

· On a une action de $\mathfrak{T}_w$ sur $\mathfrak{IW}_w^+$ ($\mathfrak{U}_w$ agit trivialement) $/\mathcal{X}_1(p^n)(v)$

· Une action de $B(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{X}_1(p^n)(v) / \mathcal{X}_{Iw}(p)(v)$.

· Autre action de $B(\mathbb{Z}_p)\cdot\mathfrak{B}_w$ sur $\mathfrak{IW}_w^+ \to \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^+ / \mathcal{X}_{Iw}(p)(v)$

Soit $w \in]n-1, n - v\frac{p^n}{p-1}]$. (normalisation de v) Soit $\kappa \in \mathcal{W}(K)$, w-anal.

Déf. : 1) Le faisceau de Banach formel des formes modulaires v-surconvergentes, w-analytique est :

$\mathfrak{w}_w^{+\kappa} = \pi_* \mathcal{O}_{\mathfrak{IW}_w^+}[\kappa^{-1}]$

2) Le module des formes v surconvergente, w-analytique de poids κ est

$H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \mathfrak{w}_w^{+\kappa})$

~~faisceau de Banach formel sur un schéma formel $\mathfrak{X} = \varinjlim \mathfrak{X}_n$ est la donnée : $(\mathcal{F}_n \in \mathcal{M},$~~ où $\mathfrak{X}_n$ = réduction modulo p^n de $\mathfrak{X}$

Rq : 1) Si $g \geq 2$, $\mathfrak{w}_w^{+\kappa}$ n'est pas cohérent. On reviendra plus tard sur la notion de faisceau de Banach.

2) Si $g = 1$, $\mathfrak{w}_w^{+\kappa}$ est cohérent, génériquement inversible, indépendant de w car $\mathfrak{IW}_w = \mathcal{X}_1(p^n)(v)$

3) Une recette $f \in H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v) - D, \mathfrak{w}_w^{+\kappa})$ est une loi qui à $R \in \mathrm{NAdm}$, $(V/R, \psi, \psi_N, \mathrm{Fil}.\mathcal{F}, \{w_i\}_{1\le i\le g})$ associe

$f(V_R, \psi, \psi_N, \mathrm{Fil}.\mathcal{F}, \{w_i\}_{1 \le i \le g}) \in R$ qui vérifie :

$$f(V_R, b\psi, \psi_N, \mathrm{Fil}.\mathcal{F}, b.\{w_i\}_{1\le i\le g}) = \kappa'(b)\, f(V, \psi, \psi_N, \mathrm{Fil}.\mathcal{F}, \{w_i\})$$

$b \in B(\mathbb{Z}_p)\,\mathfrak{B}_w(R)$

4) Passage à la limite : $\varinjlim_{v\to 0} \varinjlim_{w\to\infty} H^0(\mathcal{X}_{Iw}(p)(v), \mathfrak{w}_w^{+\kappa})$: module des formes surconvergente entières, surconvergentes localement analytique de poids κ