
FORMES MODULAIRES SURCONVERGENTES

par

Vincent Pilloni

Résumé. — Nous donnons une définition géométrique des formes surconvergentes de poids p -adique quelconque. Ceci nous permet d'obtenir la théorie des familles p -adiques de formes modulaires de Coleman et de reconstruire la courbe de Hecke de Coleman et Mazur sans utiliser la famille d'Eisenstein.

1. Introduction

Nous donnons une définition géométrique des formes surconvergentes de poids p -adique quelconque. Ceci nous permet de reconstruire la courbe de Hecke de Coleman et Mazur sans utiliser la famille d'Eisenstein.

Soit p un nombre premier, N un entier premier à p , X la courbe modulaire compactifiée de niveau $\Gamma_1(N)$ sur $\text{Spec } \mathbb{Z}_p$ et \mathcal{E} le schéma semi-abélien universel. Notons $\omega_{\mathcal{E}}$ le faisceau conormal de \mathcal{E}/X en la section unité. Une forme modulaire de poids k est une fonction sur le GL_1 -torseur associé à $\omega_{\mathcal{E}}$ qui est homogène de poids k .

L'espace \mathcal{W} des poids p -adiques est $\text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_p^{\times}, \mathbb{C}_p^{\times})$. Pour étudier les congruences entre formes modulaires propres de poids différents, on veut définir des espaces de formes modulaires de poids w pour chaque $w \in \mathcal{W}$.

En utilisant l'existence du sous-groupe canonique, nous construisons des fibrations en boules sur des voisinages stricts du lieu ordinaire. Ces fibrations se plongent dans le fibré $\omega_{\mathcal{E}}$ et sont munies d'une action du groupe \mathbb{Z}_p^{\times} . Les formes modulaires surconvergentes de poids $w \in \mathcal{W}$ sont les fonctions analytiques sur certaines de ces fibrations, homogènes de poids w pour l'action du groupe \mathbb{Z}_p^{\times} .

Dans la théorie de Hida, on considère la tour d'Igusa qui est le pro-revêtement étale du lieu ordinaire donné par la limite projective sur n des duals des sous groupes canoniques d'échelon n . Les formes modulaires p -adiques sont les fonctions sur le \mathbb{Z}_p^{\times} -torseur des trivialisations de la tour d'Igusa. Les fonctions homogènes de poids w pour l'action de \mathbb{Z}_p^{\times} sont les formes modulaires p -adiques de poids w . On obtient ainsi un espace (gigantesque) qui se fibre au dessus de l'espace \mathcal{W} . L'application de Hodge-Tate permet de plonger la tour d'Igusa dans le toseur des formes différentielles relatives et donc les formes modulaires classiques dans le module des formes modulaires p -adiques. Pour ramener ce dernier à une taille raisonnable, Hida a introduit un projecteur d'ordinarité, et a pu ainsi étudier les familles ordinaires de formes modulaires propres.

Pour étudier les familles de pente finie, on veut faire surconverger la construction précédente afin d'appliquer la théorie spectrale à l'opérateur complètement continue U_p . Notons $X(v)$ un voisinage strict de rayon v du lieu ordinaire dans la courbe modulaire

rigide. Si v est suffisamment petit, on dispose d'un sous-groupe canonique d'échelon n que nous notons $H_n \rightarrow X(v)$. Soit H_n^D son dual de Cartier et $(H_n^D)^\times$ le sous-schéma formé des éléments qui engendrent localement H_n^D . On considère le diagramme suivant

$$(1.0.A) \quad \begin{array}{ccc} & & \omega_{\mathcal{E}} \\ & & \downarrow \\ (H_n^D)^\times & \xrightarrow{\text{HT}} & \omega_{H_n} \end{array}$$

où HT est l'application de Hodge-Tate et le morphisme vertical est la restriction des formes différentielles relatives. L'image réciproque dans $\omega_{\mathcal{E}}$ de $\text{HT}((H_n^D)^\times)$ est une fibration en $(p-1)p^{n-1}$ boules au dessus de $X(v)$, notée F_n^\times . Si on fait tendre v vers 0 et n vers $+\infty$, on retrouve la tour d'Igusa au dessus du lieu ordinaire $X(0)$. On peut donc penser aux espaces F_n^\times comme à des déformations surconvergentes de la tour d'Igusa. Le groupe \mathbb{Z}_p^\times agit sur F_n^\times . Comme tout poids $w \in \mathcal{W}$ est localement analytique, on démontre que, pour v et n convenables, le faisceau des fonctions analytiques sur F_n^\times homogènes de poids w est un faisceau inversible de $\mathcal{O}_{X(v)}$ -module. Ses sections globales forment le module des formes modulaires surconvergentes sur $X(v)$ de poids w .

Il existe une action naturelle de l'algèbre de Hecke sur les formes surconvergentes ainsi définies. En appliquant la théorie spectrale de Coleman et Mazur (axiomatisée par Buzzard), on obtient une courbe de Hecke. Nous vérifions ensuite que toute famille de formes modulaires p -adiques ordinaires est une famille de formes surconvergentes. Ceci s'applique à la famille d'Eisenstein. Comme celle-ci trivialise nos faisceaux, notre construction est équivalente à celle de Coleman et Mazur.

Dans [AIS], Andreatta, Iovita et Stevens obtiennent des résultats similaires ainsi que divers compléments. Les idées employées dans [AIS] et dans le présent travail sont essentiellement les mêmes. Le point de départ de *loc. cit.* est l'étude de la suite de Hodge-Tate : $\omega_{\mathcal{E}}^\vee \rightarrow T_p(\mathcal{E}) \rightarrow \omega_{\mathcal{E}}$ au moyen d'une variante du diagramme 1.0.A, tandis que notre inspiration vient plutôt de la théorie de Hida. Pour cette raison, nos deux travaux adoptent des points de vue assez différents et, espérons-le, se complètent l'un et l'autre.

Par des méthodes analogues à celles utilisées ici, nous espérons construire prochainement des familles p -adiques de formes modulaires de Siegel et de Hilbert de pente positive. C'est la motivation principale de cette recherche.

C'est un plaisir de remercier A. Iovita, qui m'a encouragé à écrire ce texte, pour les échanges stimulants que nous avons eu. Je remercie aussi F. Andreatta et G. Stevens qui ont eu la générosité et la gentillesse de me communiquer très tôt une version préliminaire de [AIS].

2. Poids

Soit p un nombre premier, \mathbb{C}_p le corps des nombres complexes p -adiques, $v : \mathbb{C}_p^\times \rightarrow \mathbb{R}$ sa valuation normalisée par $v(p) = 1$ et $|\cdot| = p^{-v}$ la norme correspondant. Notons $\mathcal{W} = \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ le groupe des caractères continus de \mathbb{Z}_p^\times . Posons $q = p$ si $p \neq 2$ et $q = 4$ si $p = 2$. On a $\mathbb{Z}_p^\times \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \times 1 + q\mathbb{Z}_p$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, nous notons \bar{x} l'image de x dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. On identifie \bar{x} à un élément de \mathbb{Z}_p^\times au moyen de l'isomorphisme précédent.

On a un morphisme de groupes $\log : \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times \rightarrow \mathbb{C}_p$, qui induit un isomorphisme $1 + q\mathbb{Z}_p \simeq q\mathbb{Z}_p$, d'inverse l'application exponentielle.

On a un isomorphisme

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &\rightarrow (\widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}})^\times \times B(1, 1^-) \\ \kappa &\mapsto (\kappa|_{(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times}, \kappa(\exp(q)))\end{aligned}$$

d'inverse l'application qui à (χ, λ) associe le caractère $x \mapsto \chi(\bar{x})\lambda^{\frac{\log(x)}{q}}$. L'isomorphisme précédent munit \mathcal{W} d'une structure d'espace rigide analytique. Pour tout $t \in]0, +\infty[$, notons $\mathcal{W}(t) = \{(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}, |\lambda - 1| \leq p^{-t}\}$.

Remarque 2.1. — On utilise parfois l'espace $\mathcal{W}^* = \{(\chi, s), \chi \in (\widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}})^\times, s \in B(0, (|p|^{\frac{1}{p-1}}|q|^{-1})^-)\}$. On a un plongement

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^* &\rightarrow \mathcal{W} \\ (\chi, s) &\mapsto [x \mapsto \chi(\bar{x})(\bar{x}^{-1}x)^s]\end{aligned}$$

Pour tout $t > \frac{1}{p-1}$, on a une inclusion $\mathcal{W}(t) \subset \mathcal{W}^*$, donnée par $(\chi, \lambda) \mapsto (\chi, \frac{\log(\lambda)}{q})$. On vérifie facilement que $\mathcal{W}^* = \bigcup_{t > \frac{1}{p-1}} \mathcal{W}(t)$.

Soit $t \in]0, +\infty[$. Notons S_t l'ensemble des $w \in \mathbb{R}$ tels que

$$\inf_{n \geq 1} \{nw - v(n)\} + \inf_{n \geq 1} \{nt - v(n)\} > \frac{1}{p-1} + v(q).$$

On vérifie facilement que S_t est un intervalle de \mathbb{R} de la forme $]w(t), +\infty[$ avec $w(t) > 0$. La fonction $t \mapsto w(t)$ est décroissante. Pour tout $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$, et tout $w \in S_t$, le caractère $(\chi, \lambda) : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$ se prolonge naturellement en un caractère analytique

$$\begin{aligned}(\chi, \lambda) : \mathbb{Z}_p^\times(1 + p^w \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) &\rightarrow \mathbb{C}_p^\times \\ x.z &\mapsto \chi(\bar{x})\lambda^{\frac{\log(x.z)}{q}}\end{aligned}$$

Lemme 2.1. — Soit $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$ et $w > w(t)$. Toute fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^w \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ qui est homogène de poids (χ, λ) pour l'action du groupe \mathbb{Z}_p^\times agissant par translation est de la forme $C.(\chi, \lambda)$, pour $C \in \mathbb{C}_p$.

Démonstration. Soit F une telle fonction. Considérons la fonction $F(1).(\chi, \lambda)$. Les fonctions F et $F(1).(\chi, \lambda)$ sont égales sur l'ensemble \mathbb{Z}_p^\times . Il résulte du théorème de préparation de Weierstrass qu'elles sont identiques. \square

3. Construction de faisceaux

3.1. Courbes modulaires. — Soit N un entier premier à p et $X := X_1(N) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_p$ la courbe modulaire compactifiée de niveau $\Gamma_1(N)$ sur $\text{Spec } \mathbb{Z}_p$. Soit $\mathcal{E} \rightarrow X$ le schéma semi-abélien étendant la courbe elliptique universelle. Considérons alors le faisceau conormal $\omega^1 := e^* \Omega_{\mathcal{E}/X}^1$ relatif à la section unité $e : X \rightarrow \mathcal{E}$. Ce faisceau est représentable par le fibré $\mathcal{T} = \text{Spec}(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \omega^{-n})$. Notons aussi \mathcal{T}^\times l'ouvert $\text{Spec}(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \omega^n)$ de \mathcal{T} . On rappelle que pour tout entier k , $H^0(X_{\mathbb{Q}_p}, \omega^k)$ est le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel des formes modulaires de poids k , niveau $\Gamma_1(N)$.

Notons \mathfrak{X} la complétion formelle de X le long de sa fibre spéciale et X_{rig} sa fibre générique au sens de Raynaud. Notons \mathfrak{T} et \mathfrak{T}^\times les complétions formelles de \mathcal{T} et \mathcal{T}^\times le long de leurs fibres spéciales, et \mathcal{T}_{rig} , \mathcal{T}_{rig}^\times leurs fibres rigides. Soit enfin \mathcal{T}_{an} et \mathcal{T}_{an}^\times les analytifications de \mathcal{T} et \mathcal{T}^\times . Les différents espaces rigides analytiques introduits s'organisent

comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}_{rig}^\times & \longrightarrow & \mathcal{T}_{rig} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{T}_{an}^\times & \longrightarrow & \mathcal{T}_{an} \\
 \downarrow & \swarrow & \\
 X_{rig} & &
 \end{array}$$

Notons $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$ l'ouvert formel ordinaire et U_{rig} sa fibre rigide. On a une application $Ha : X_{rig} \rightarrow [0, 1]$, donnée par la valuation tronquée de l'invariant de Hasse.

Pour tout $v \in [0, 1]$, soit $X(v) = \{x \in X_{rig}, Ha(x) \leq v\}$. On a $X(0) = U_{rig}$ et les $\{X(v)\}_{v>0}$ forment un système de voisinages stricts de U_{rig} dans X_{rig} .

3.2. Sous-groupes canoniques. — On dispose, d'après Lubin et Katz [Ka] chap. 3, d'un sous-groupe canonique $H_1 \subset \mathcal{E}[p]$ au dessus de $X(v)$ pour $v \in [0, \frac{p}{p+1}[$. Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p et $x \in X(\mathcal{O}_K)$, vérifiant $Ha(x) < \frac{p}{p+1}$. Rappelons quelques propriétés du sous-groupe canonique H_1 au point x . Le groupe H_1 est un schéma en groupes de Oort-Tate d'anneau isomorphe à $\mathcal{O}_K[Y]/(Y^p - aY)$ avec $v(a) = 1 - Ha(x)$. Notons ω_{H_1} le faisceau conormal de H_1 , égal à $\mathcal{O}_K/a\mathcal{O}_K.dY$. On dispose d'une application de Hodge-Tate $H_1^D \rightarrow \omega_{H_1}$. Le sous-module de $\omega_{H_1} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ engendré par l'image de l'application de Hodge-Tate est $c\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/a\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}.dY$, où $c \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ est un élément de valuation $\frac{Ha(x)}{p-1}$. Enfin, si $Ha(x) < \frac{1}{p+1}$ et si y est le point image de x obtenu en faisant le quotient par le sous-groupe canonique, alors $Ha(y) = pHa(x)$.

Pour $v < \frac{p}{p+1}$, considérons l'isogénie $\pi_{can} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/H_1$ au dessus de $X(v)$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $v < \frac{1}{p^{n-2}(p+1)}$. On définit par récurrence sur n un sous-groupe canonique d'échelon n , $H_n \subset \mathcal{E}[p^n]$, au dessus de $X(v)$. Posons $H_n = \pi_{can}^{-1}(H_{n-1})$. La proposition qui suit est bien connue et on l'extrait facilement de [Far07] par exemple. Pour la commodité du lecteur, nous donnons une démonstration complète.

Proposition 3.1. — Soit $x \in X(\mathcal{O}_K)$ tel que $Ha(x) < \frac{1}{p^{n-2}(p+1)}$. Soit H_n le sous-groupe canonique d'échelon n au point x . Les propriétés suivantes sont vraies :

- le faisceau conormal ω_{H_n} est isomorphe à $\mathcal{O}_K/a\mathcal{O}_K$ où $a \in \mathcal{O}_K$ est un élément de valuation $n - \frac{1-p^n}{1-p}Ha(x)$,
- le groupe $H_n(\mathbb{C}_p)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$,
- le sous-module engendré par l'image de l'application de Hodge-Tate $H_n^D(\mathbb{C}_p) \rightarrow \omega_{H_n} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ est isomorphe à $c\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/a\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, où c est un élément de valuation $\frac{Ha(x)}{p-1}$.

Démonstration. Soit E le schéma semi-abélien au point x . On a une surjection $\omega_E \rightarrow \omega_{H_n}$. Il en résulte que $\omega_{H_n} \simeq \mathcal{O}_K/a\mathcal{O}_K$ pour un élément $a \in \mathcal{O}_K$. Il nous reste à trouver la valuation de a . Notons H'_{n-1} le sous-groupe canonique d'échelon $n-1$ de E/H_1 . On a une suite exacte de groupes finis et plats sur \mathcal{O}_K :

$$0 \rightarrow H_1 \rightarrow H_n \rightarrow H'_{n-1} \rightarrow 0.$$

On a donc $\deg H_n = \deg H'_{n-1} + \deg H_1$ (voir [Far] part. 3) et la formule sur la valuation de a en résulte par récurrence sur n . Pour démontrer que la multiplication par p^{n-1} n'annule pas H_n , il suffit de montrer que $H_n/H_{n-2} \not\subseteq E/H_{n-2}[p]$. Si $H_n/H_{n-2} \subset E/H_{n-2}[p]$, alors les deux groupes sont égaux. On a $\deg E/H_{n-2}[p] = 1$. D'autre part, on a $\deg H_n/H_{n-2} =$

$2 - p^{n-2}(p+1)Ha(x) > 1$ ce qui achève de démontrer le second point. On a enfin un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n^D & \xrightarrow{\text{HT}} & \omega_{H_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1^D & \xrightarrow{\text{HT}} & \omega_{H_1} \end{array}$$

et le dernier point de la proposition découle du calcul de l'image de l'application de Hodge-Tate dans le cas $n = 1$. \square

3.3. La fibration en boules. — Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $v \in [0, \frac{1}{p^{n-2}(p+1)}[$. Soit $H_n \rightarrow \mathfrak{Z}$ un modèle formel de $H_n \rightarrow X(v)$, obtenu en prenant un ouvert d'un éclatement admissible de \mathfrak{X} . Rappelons que nous disposons d'une application de Hodge-Tate :

$$\text{HT} : H_n^D \rightarrow e^*\Omega_{H_n/\mathfrak{Z}}^1.$$

Au dessus du schéma en groupes H_n^D , on a une application universelle $\phi_{univ} : H_n \rightarrow \mu_{p^n}$, et une différentielle universelle de Hodge-Tate, $\text{HT}_{univ} = \text{HT}(\phi_{univ}) \in e^*\Omega_{H_n \times H_n^D/H_n^D}^1$.

L'isogénie $\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/H_n$ induit la suite exacte de co-Lie de H_n :

$$0 \rightarrow e^*\Omega_{\mathcal{E}/H_n/\mathfrak{Z}}^1 \xrightarrow{\psi^*} e^*\Omega_{\mathcal{E}/\mathfrak{Z}}^1 \rightarrow e^*\Omega_{H_n/\mathfrak{Z}}^1 \rightarrow 0$$

Théorème 3.1. — *Il existe un unique ouvert rigide $F_n \hookrightarrow \mathcal{T}_{rig} \times_{X(v)} H_n^D$ tel que pour toute extension finie K de \mathbb{Q}_p et tout point $x \in X(v)(K)$ correspondant à un schéma semi-abélien de dimension 1, $E \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$, alors*

$$F_n|_x(\mathbb{C}_p) = \{(y, \omega) \in H_n^D|_x(\mathbb{C}_p) \times e^*\Omega_{E/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}^1, \text{ tels que } \text{HT}(y) = \omega|_{e^*\Omega_{H_n/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}^1}\}.$$

Démonstration. Si F_n existe, il est uniquement caractérisé par la propriété du théorème. Nous allons faire la construction localement sur $X(v)$. Soit $\text{Spf } A$ un ouvert formel affine de \mathfrak{Z} . Quitte à remplacer A par un ouvert plus petit, on peut supposer que le fibré \mathfrak{Z} est trivial au dessus de $\text{Spf } A$, engendré par une différentielle ω . On a alors $e^*\Omega_{H_n/\mathfrak{Z}}^1 = A/aA.\omega$ pour une fonction $a \in A$. Notons R l'algèbre du groupe $H_n^D \rightarrow \text{Spf } A$. La classe de Hodge-Tate universelle HT_{univ} est donné par un élément $X \in R/aR.\omega$. Si le schéma formel $\text{Spf } R \langle T_1 \rangle$ représente le faisceau $e^*\Omega_{\mathcal{E} \times H_n^D/H_n^D}^1$ (la section $T_1 = 1$ correspond au générateur ω), considérons le schéma formel $\text{Spf } R \langle T_1, T_2 \rangle / (T_1 - X - aT_2)$. Sa fibre rigide est par définition $F_n|_{\text{Spec } A_{\mathbb{Q}_p}}$, et on dispose bien d'un morphisme $F_n|_{\text{Spec } A_{\mathbb{Q}_p}} \hookrightarrow \mathcal{T}_{rig} \times H^D|_{\text{Spec } A_{\mathbb{Q}_p}}$. \square

Remarque 3.1. — Reprenons les notations de la démonstration. L'élément a induit une fonction analytique sur $\text{Spec } A_{\mathbb{Q}_p}$. Pour tout point $x \in \text{Spec } A_{\mathbb{Q}_p}$, on a $v(a(x)) = n - \frac{1-p^n}{1-p}Ha(x)$. L'élément X induit une fonction analytique sur $\text{Spec } R_{\mathbb{Q}_p}$. Pour tout point $x \in \text{Spec } A_{\mathbb{Q}_p}$ et pour tout point $y \in \text{Spec } R_{\mathbb{Q}_p}$ correspondant à un générateur du groupe H_n^D au point x , on a $v(X(y)) = \frac{Ha(x)}{p-1}$.

Remarque 3.2. — Si $n = 1$, on peut être encore plus explicite en utilisant la théorie de Oort-Tate. Avec les notations précédentes, on peut supposer que :

- les schémas en groupes de Oort-Tate H_1 et H_1^D sont donnés par des équations globales : $H_1 = \text{Spec } A[Y]/(Y^p - aY)$, $H_1^D = \text{Spec } A[X]/(X^p - bX)$, où les éléments $a, b \in A$ sont tels que $ab = \omega_p$ (voir [O-T] thm. 2, $\omega_p \in \mathbb{Z}_p$ est une constante universelle de valuation 1),

– la restriction de ω à $e^*\Omega_{H_1/A}^1$ est dY .

On peut alors décrire le morphisme HT dans les coordonnées. On a noté $R := A[X]/(X^p - bX)$ l'anneau de H_1^D . Les anneaux de $H_1 \times H_1^D$ et $\mu_p \times H_1^D$ sont respectivement $R[Y]/(Y^p - aY)$ et $R[Y]/(Y^p - \omega_p Y)$. Le morphisme universel $H_1 \times H_1^D \rightarrow \mu_p \times H_1^D$ est donné au niveau des algèbres par l'application $Y \mapsto XY$, et la différentielle de Hodge-Tate universelle est $X\omega \in \omega.R/aR = e^*\Omega_{H_1 \times H_1^D/H_1^D}^1$.

Au dessus de $X(v)$, notons $(H_n^D)^\times$ la réunion de composantes connexes de H_n^D localement formée des éléments qui sont des générateurs du groupe H_n^D . On pose alors $F_n^\times = F_n \times_{H_n^D} (H_n^D)^\times$. Le morphisme $F_n \rightarrow \mathcal{T}_{\text{rig}} \times H_n^D$ induit un morphisme $\pi : F_n^\times \rightarrow \mathcal{T}_{\text{an}}$ d'espaces rigides au dessus de $X(v)$. Ce morphisme est étale. Le $X(v)$ -espace rigide F_n^\times est une fibration en $(p-1)p^{n-1}$ boules. Les boules sont paramétrées par $(H_n^D)^\times$. Elles ont pour centre un point de valuation $\frac{Ha}{p-1}$ et leur rayon vaut $p^{-n + \frac{1-p^n}{1-p}Ha}$. La construction qui précède montre de plus que cette fibration est triviale localement (pour la topologie rigide) au dessus de H_n^D .

3.4. Actions de groupes. — Le groupe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ agit sur H_n^D et sur $e^*\Omega_{H_n/3}^1$. L'application de Hodge-Tate est $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -linéaire. Le groupe \mathbb{Z}_p^\times agit sur le fibré \mathcal{T}_{an} . Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F_n^\times & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{T}_{\text{an}} \times (H_n^D)^\times \\ \downarrow p_1 & \swarrow p_3 & \downarrow p_2 \\ (H_n^D)^\times & & \mathcal{T}_{\text{an}} \\ \downarrow & \swarrow & \\ X(v) & & \end{array}$$

Le groupe $\mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ agit donc sur $\mathcal{T}_{\text{an}} \times H_n^D$ et le morphisme p_2 est équivariant sous la première projection $\mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$, le morphisme p_3 est équivariant sous la seconde projection $\mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Le groupe \mathbb{Z}_p^\times vu comme sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ via l'application diagonale laisse stable $F_n^\times \subset \mathcal{T}_{\text{an}} \times (H_n^D)^\times$. La projection p_1 est équivariante sous la projection $\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Enfin, le morphisme $\pi = p_2 \circ f_1$ est \mathbb{Z}_p^\times -équivariant.

Proposition 3.2. — Si $v < \frac{p-1}{p^n}$, le morphisme $\pi : F_n^\times \rightarrow \mathcal{T}_{\text{an}}$ se factorise à travers $\mathcal{T}_{\text{an}}^\times$ et est une immersion. On peut donc identifier F_n^\times à un ouvert de $\mathcal{T}_{\text{an}}^\times$.

Démonstration. Le morphisme π est étale, il suffit de montrer qu'il est radiciel. Soit y un point de $X(v)$. Choisissons $(x_m)_{m \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times}$ une section de la projection $\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$.

On a une trivialisatoin $F_n^\times|_y(\mathbb{C}_p) = \coprod_{m \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} x_m h^{\frac{1}{p-1}} + p^n h^{-\frac{p^n-1}{p-1}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ où $h \in \mathbb{C}_p$ est tel que $v(h) = Ha(y)$. L'application $\pi : F_n^\times|_y \rightarrow (\mathcal{T}_{\text{an}})_y$ s'identifie à la projection $\coprod_{m \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} x_m h^{\frac{1}{p-1}} + p^n h^{-\frac{p^n-1}{p-1}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \rightarrow \mathbb{C}_p$. Cette application est injective et se factorise à travers \mathbb{C}_p^\times si et seulement si $|h| > |p|^{\frac{p^n-1}{p^n}}$. \square

3.5. Les faisceaux $\omega^{(\chi, \lambda)}$. — On suppose à présent que $v < \frac{p-1}{p^n}$. On fixe $t \in]0, +\infty[$, vérifiant $w(t) < n - \frac{p^n}{p-1}v$. Soit $p : F_n^\times \rightarrow X(v)$ la projection. Considérons le faisceau $\Omega = p_* \mathcal{O}_{F_n^\times}$. Soit $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$ et K l'extension de \mathbb{Q}_p engendrée par $(\chi, \lambda)(\mathbb{Z}_p^\times)$. Le

faisceau $\omega^{(\chi, \lambda)}$ est le sous-faisceau de Ω_K des sections homogènes de poids (χ, λ) sous l'action du groupe \mathbb{Z}_p^\times . On déduit facilement du lemme 2.1 et de la description de F_n^\times que c'est un faisceau inversible de $\mathcal{O}_{X(v)_K}$ -module. Concrètement, une section f de $\omega^{(\chi, \lambda)}$ au dessus de $X(v)_K$ est une fonction analytique sur les quadruplets $(E, \psi_N, P, \omega) \in F_n^\times|_K$ vérifiant $x.f(E, \psi_N, P, \omega) = f(E, \psi_N, x^{-1}P, x^{-1}\omega) = (\chi, \lambda)(x)f(E, \psi_N, P, \omega)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Pour tout poids $k \in \mathbb{Z}$, on dispose d'une application de restriction $:\omega^k \rightarrow \omega^{(k, \exp kq)}$ induite par le morphisme $F_n^\times \rightarrow \mathcal{T}_{an}^\times$.

Proposition 3.3. — *L'application $\omega^k \rightarrow \omega^{(k, \exp kq)}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Remarquons premièrement que la restriction des fonctions de \mathcal{T}_{an}^\times à F_n^\times est injective d'après le principe de prolongement analytique [Ber], prop. 0.1.13. Explicitons à présent notre application. Une section de ω^k sur un ouvert U est une fonction f sur des triplets $(E, \psi_N, \omega) \in \mathcal{T}_{an}^\times \times U$ telle que $f(E, \psi_N, x\omega) = x^{-k}f(E, \psi_N, \omega)$, pour tout $x \in \mathbb{G}_m(U)$. Le morphisme de la proposition associe à une telle fonction, la fonction \tilde{f} sur les triplets $(E, \psi_N, P, \omega) \in F_n^\times \times U$, donnée par la règle $\tilde{f}(E, \psi_N, P, \omega) = f(E, \psi_N, \omega)$. Pour établir que ce morphisme est un isomorphisme, on peut raisonner localement pour la topologie étale et supposer que, au dessus de U , on ait $\mathcal{T}_{an}^\times \times U = \mathbb{A}_{an}^1 \setminus \{0\} \times U$, et que l'application $F_n^\times \hookrightarrow \mathcal{T}_{an}^\times$ soit donnée par

$$\bigcup_{m \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times} B(x_m h^{\frac{1}{p-1}}, |p^n||h|^{-\frac{p^n-1}{p-1}}) \subset \mathbb{A}_{an}^1 \setminus \{0\} \times U$$

où h et $h^{\frac{1}{p-1}}$ sont des fonctions analytiques sur U de valuations données par $v(h) = Ha$, et $(x_m)_{m \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times}$ est une section de la projection $\mathbb{Z}_p^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Une fonction homogène \tilde{f} de poids $(k, \exp kq)$ sur $F_n^\times \times U$ s'écrit dans nos trivialisations

$$\tilde{f}(E, \psi_N, P, \omega) = (-k, -\exp kq)(\omega \otimes h^{\frac{1}{p-1}}(E, \psi_N)^{-1}).\tilde{f}(h^{\frac{1}{p-1}}(E, \psi_N)).$$

Cette fonction se prolonge bien en une fonction sur $\mathbb{A}_{an}^1 \setminus \{0\} \times U$ car la fonction $(-k, -\exp kq)$ se prolonge effectivement à $\mathbb{A}_{an}^1 \setminus \{0\}$. \square

3.6. Formes surconvergentes géométriques. — Supposons $n \geq 2$ et $v < \frac{p-1}{p^n}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} F_n^\times & \longrightarrow & F_{n-1}^\times & \longrightarrow & \mathcal{T}_{an}^\times \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_n^D & \longrightarrow & H_{n-1}^D & & \\ \downarrow & \swarrow & & & \\ X(v) & & & & \end{array}$$

On fixe $t \in]0, +\infty[$, vérifiant $w(t) < n - 1 - \frac{p^n-1}{p-1}v$. Pour tout $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$, on peut alors construire le faisceau $\omega^{(\chi, \lambda)}$ en appliquant la construction du numéro 3.5 avec n ou $n - 1$. On vérifie facilement que les deux constructions sont canoniquement isomorphes.

Pour tout $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}$, le faisceau $\omega^{(\chi, \lambda)}$ existe sur $X(v)$ pour $v \in]0, +\infty[$ suffisamment petit.

Définition 3.1. — Soit $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}$. Soit K l'extension de \mathbb{Q}_p engendrée par $(\chi, \lambda)(\mathbb{Z}_p^\times)$. Le K -espace vectoriel des formes surconvergentes de poids (χ, λ) sur X est

$$M((\chi, \lambda), X)^\dagger := \operatorname{colim}_{v>0} H^0(X(v), \omega^{(\chi, \lambda)}).$$

4. Opérateurs de Hecke

Dans ce numéro nous définissons géométriquement l'action des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell \nmid Np$ et U_ℓ pour $\ell \mid Np$ sur les formes surconvergentes. On montre précisément

Proposition 4.1. — Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $v < \frac{p-1}{p^n}$ et t vérifiant $w(t) < n - 1 - \frac{p^{n-2}}{p-1}v$. Pour tout poids $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$, on a une action continue des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell \nmid Np$ et U_ℓ pour $\ell \mid Np$ sur l'espace de Banach $H^0(X(v), \omega^{(\chi, \lambda)})$. L'opérateur U_p est compact.

4.1. Correspondances de degré premier à p . — Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas p . On a une correspondance de Hecke $C_\ell \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$. C'est la compactification de la courbe modulaire qui paramètre les triplets (E, ψ_N, C) où E est une courbe elliptique, ψ_N est une structure de niveau $\Gamma_1(N)$ et C est un sous-groupe de $E[\ell]$ d'ordre ℓ . Si $\ell \mid N$, on impose de plus que ψ_N soit disjoint de C . On a deux projections $p_1, p_2 : C_\ell \rightarrow X$. Sur la courbe modulaire non compactifiée, elles sont données par $p_1(E, \psi_N, C) = (E, \psi_N)$ et $p_2(E, \psi_N, C) = (E/C, \operatorname{Im}(\psi_N))$. On note $\pi_\ell : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/C$ l'isogénie universelle au dessus de C_ℓ . Soit $C_{\ell, \text{rig}}$ l'analytifié de C_ℓ , on note encore $p_1, p_2 : C_{\ell, \text{rig}} \rightarrow X_{\text{rig}}$ les projections rigides induites. Pour tout $v \in [0, 1]$, notons $C_\ell(v)$ le produit fibré $C_{\ell, \text{rig}} \times_{p_1, X_{\text{rig}}} X(v)$. La hauteur de Hodge est invariante par les isogénies de degré premier à p et il en résulte que la seconde projection induit un morphisme $p_2 : C_\ell(v) \rightarrow X(v)$.

Proposition 4.2. — Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et $v < \frac{p-1}{p^n}$. L'isogénie universelle π_ℓ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_n^\times \times_{X(v), p_2} C_\ell & \longrightarrow & F_n^\times \times_{X(v), p_1} C_\ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}_{an}^\times \times_{X(v), p_2} C_\ell & \xrightarrow{\pi_\ell^*} & \mathcal{T}_{an}^\times \times_{X(v), p_1} C_\ell \end{array}$$

De plus, les morphismes horizontaux sont des isomorphismes.

Démonstration. Comme l'isogénie π_ℓ est étale, l'application π_ℓ^* induit un isomorphisme $\mathcal{T}_{an}^\times \times_{X(v), p_2} C_\ell \rightarrow \mathcal{T}_{an}^\times \times_{X(v), p_1} C_\ell$. Il en résulte que π_ℓ^* identifie $F_n^\times \times_{X(v), p_2} C_\ell$ à un ouvert de $\mathcal{T}_{an}^\times \times_{X(v), p_1} C_\ell$ et il suffit de vérifier sur les points que cet ouvert est exactement $F_n^\times \times_{X(v), p_1} C_\ell$. Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p et $(E, C, \psi_N) \in C_\ell(\mathcal{O}_K)$. Notons $E' = E/C$ et H'_n le sous-groupe canonique d'échelon n de E' , qui est aussi l'image de H_n dans E' . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} e^* \Omega_{E'/\mathcal{O}_K}^1 & \xrightarrow{\pi_\ell^*} & e^* \Omega_{E/\mathcal{O}_K}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ e^* \Omega_{H'_n/\mathcal{O}_K}^1 & \xrightarrow{\pi_\ell^*} & e^* \Omega_{H_n/\mathcal{O}_K}^1 \\ \text{HT} \uparrow & & \text{HT} \uparrow \\ (H'_n)^D \times & \xrightarrow{\pi_\ell^D} & (H_n^D) \times \end{array}$$

où toutes les application horizontales sont des isomorphismes car l'isogénie $E \rightarrow E'$ est étale. On a donc une application bijective induite

$$\mathrm{Ker}(e^*\Omega_{E'/\mathcal{O}_K}^1 \rightarrow \mathrm{coker} \mathrm{HT}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(e^*\Omega_{E/\mathcal{O}_K}^1 \rightarrow \mathrm{coker} \mathrm{HT}).$$

□

On peut considérer l'application inverse de $\pi_\ell^*, \pi_\ell^{-1*} : F_n^\times \times_{X(v), p_1} C_\ell \rightarrow F_n^\times \times_{X(v), p_2} C_\ell$. On rappelle que si $p : F_n^\times \rightarrow X(v)$ est la projection, on a noté $\Omega = p_* \mathcal{O}_{F_n^\times}$. On peut alors définir un opérateur de Hecke noté T_ℓ si $\ell \nmid N$ et U_ℓ si $\ell \mid N$ comme la composée :

$$\mathrm{H}^0(X(v), \Omega) \xrightarrow{p_2^*} \mathrm{H}^0(X(v), p_2^* \Omega) \xrightarrow{\pi_\ell^{-1*}} \mathrm{H}^0(X(v), p_1^* \Omega) \xrightarrow{\ell^{-1} \mathrm{Tr}(p_1)} \mathrm{H}^0(X(v), \Omega)$$

Les opérateurs de Hecke ainsi définis sont équivariants sous l'action de \mathbb{Z}_p^\times . Soit $t \in]0, +\infty[$ vérifiant $w(t) < n - \frac{p^n}{p-1}v$. Pour tout poids $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$, on a une action induite des opérateurs de Hecke T_ℓ, U_ℓ sur $\mathrm{H}^0(X(v), \omega^{(\chi, \lambda)})$. Si le poids est un entier k , on retrouve l'action standard.

4.2. L'opérateur U_p . — Pour $v < \frac{p}{p+1}$, on a une correspondance

$$\begin{array}{ccc} & C_p & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ X(v) & & X\left(\frac{v}{p}\right) \end{array}$$

Au dessus de l'intersection de $X(v)$ avec la courbe modulaire non compactifiée, l'espace rigide C_p paramètre les triplets (E, ψ_N, C) où E est une courbe elliptique telle que $Ha(E) < v$, ψ_N est une structure de niveau $\Gamma_1(N)$, et C est un sous-groupe de rang p de $E[p]$ différent du sous-groupe canonique H_1 . Les projections p_1 et p_2 sont induites par $p_1(E, \psi_N, C) = (E, \psi_N)$ et $p_2(E, \psi_N, C) = (E/C, \mathrm{Im}(\psi_N))$. Rappelons que p_1 est un morphisme fini et plat de degré p et que p_2 est un isomorphisme de C_p vers $X\left(\frac{v}{p}\right)$. On note aussi $\pi_p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/C$ l'isogénie universelle. Cette isogénie induit un isomorphisme $\pi_p^* : \mathcal{T}_{an}^\times \times_{X\left(\frac{v}{p}\right), p_2} C_p \rightarrow \mathcal{T}_{an}^\times \times_{X(v), p_1} C_p$ et nous notons π_p^{-1*} l'application inverse.

Proposition 4.3. — Soit n un entier au moins égal à 2 et $v < \frac{p-1}{p^n}$. L'application π_p^{-1*} induit une application :

$$F_n^\times \times_{p_1, X(v)} C_p \rightarrow F_{n-1}^\times \times_{p_2, X\left(\frac{v}{p}\right)} F_n^\times.$$

Démonstration. La vérification peut se faire au niveau des points. Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p et $(E, C, \psi_N) \in C_\ell(\mathcal{O}_K)$. Notons $E' = E/C$ et H'_n le sous-groupe canonique d'échelon n de E' , qui est aussi l'image de H_n dans E' . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} e^*\Omega_{E'/\mathcal{O}_K}^1 & \xrightarrow{\pi_\ell^*} & e^*\Omega_{E/\mathcal{O}_K}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ e^*\Omega_{H'_n/\mathcal{O}_K}^1 & \xrightarrow{\pi_\ell^*} & e^*\Omega_{H_n/\mathcal{O}_K}^1 \\ \mathrm{HT} \uparrow & & \mathrm{HT} \uparrow \\ (H'_n)^{\times D} & \xrightarrow{\pi_\ell^D} & (H_n)^{\times D} \end{array}$$

Quitte à étendre K , on peut supposer que $H_n^D(K) \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Le précédent diagramme est alors isomorphe au diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_K & \xrightarrow{h^{\frac{1}{p}}} & \mathcal{O}_K \\
\downarrow d_1 & & \downarrow d_2 \\
\mathcal{O}_K/a'\mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathcal{O}_K/a\mathcal{O}_K \\
\uparrow h_1 & & \uparrow h_2 \\
(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\simeq} & (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times
\end{array}$$

où $v(h) = Ha(E)$, $v(a') = n - \frac{p^n-1}{p(p-1)}Ha(E)$, $v(a) = n - \frac{p^n-1}{p-1}Ha(E)$, les morphismes d_1 et d_2 sont surjectifs, et $v(h_1(1)) = \frac{Ha(E)}{p(p-1)}$ et $v(h_2(1)) = \frac{Ha(E)}{(p-1)}$. Soit donc $w \in \Omega_{E'/\mathcal{O}_K}^1$ vérifiant $w|_{\omega_{H_n}} = \text{HT}(x)$ pour un élément $x \in (H_n^D)^\times$ et $w' \in \Omega_{E'/\mathcal{O}_K}^1$ vérifiant $\pi_p^* w' = w$. Notons x' l'unique antécédant de x par π_p^D . Soit K le noyau de l'application $\pi_p^* : \omega_{H'_n} \rightarrow \omega_{H_n}$. Alors d'après le diagramme précédent, $w'|_{\omega_{H'_n}/K} = \text{HT}(x')$. Remarquons que $\omega_{H'_n}/K \simeq \mathcal{O}_K/a''\mathcal{O}_K$ où $v(a'') = n - \frac{p^{n+1}-1}{p(p-1)}Ha(E)$ et que par conséquent, la projection $\omega_{H'_n} \rightarrow \omega_{H'_{n-1}}$ se factorise à travers $\omega_{H'_n}/K$. Notons x'' l'image de x' par la projection $H'_n{}^D \rightarrow H'_{n-1}{}^D$. On a alors la relation $w'|_{\omega_{H'_{n-1}}} = \text{HT}(x'')$ qui démontre que w' définit un point de F_{n-1}^\times au dessus de E' . \square

Pour $i \in \{n, n-1\}$, notons $q_i : F_i^\times \rightarrow X(v)$ les projections. Posons $\Omega_i = q_{i*} \mathcal{O}_{F_i^\times}$ on peut alors définir un opérateur de Hecke noté U_p comme la composé :

$$\mathrm{H}^0\left(X\left(\frac{v}{p}\right), \Omega_{n-1}\right) \xrightarrow{p_2^*} \mathrm{H}^0\left(X\left(\frac{v}{p}\right), p_2^* \Omega_{n-1}\right) \xrightarrow{\pi_p^{-1*}} \mathrm{H}^0\left(X(v), p_1^* \Omega_n\right) \xrightarrow{p^{-1}\mathrm{Tr}(p_1)} \mathrm{H}^0\left(X(v), \Omega_n\right)$$

L'opérateur de Hecke U_p ainsi défini est équivariant sous l'action de \mathbb{Z}_p^\times . Soit $t \in]0, +\infty[$ vérifiant $w(t) < n - 1 - \frac{p^n-2}{p-1}v$. Pour tout poids $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$, on a un opérateur de Hecke induit $U_p : \mathrm{H}^0\left(X\left(\frac{v}{p}\right), \omega^{(\chi, \lambda)}\right) \rightarrow \mathrm{H}^0\left(X(v), \omega^{(\chi, \lambda)}\right)$. On note encore U_p le composé de la restriction canonique $\mathrm{H}^0\left(X(v), \omega^{(\chi, \lambda)}\right) \rightarrow \mathrm{H}^0\left(X\left(\frac{v}{p}\right), \omega^{(\chi, \lambda)}\right)$ avec l'opérateur précédent. Ceci définit un endomorphisme compact.

5. Familles de formes surconvergentes

5.1. Le module des formes surconvergentes. — Soit n un entier supérieur ou égal à 1, $v \in]0, \frac{p-1}{p^n}[\cap \mathbb{Q}$, et $t \in]0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$ vérifiant $w(t) < n - 1 - \frac{p^n-2}{p-1}v$. L'espace rigide $X(v)$ est affinoïde, notons B l'anneau de ses fonctions analytiques. Soit aussi A l'anneau des fonctions analytiques sur $\mathcal{W}(t)$. Rappelons que $\mathcal{W}(t)$ est la réunion, indexée par $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, de boules de rayon p^{-t} . L'anneau A est une $\mathbb{Q}_p[(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times]$ -algèbre. Notons $\chi_{univ} : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \rightarrow A^\times$ le caractère tautologique. Notons aussi $\Lambda \in A$ la coordonnée sur la boule indexée par l'élément $1 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. Le caractère universel est alors

$$\begin{aligned}
(\chi_{univ}, \Lambda) : \mathbb{Z}_p^\times &\rightarrow A^\times \\
x &\mapsto \chi_{univ}(\bar{x}) \Lambda^{\frac{\log(x)}{q}}
\end{aligned}$$

Soit alors $\pi \times 1 : F_n^\times \times \mathcal{W}(t) \rightarrow X(v) \times \mathcal{W}(t)$. Considérons le sous-faisceau \mathcal{U} des sections (χ_{univ}, Λ) -homogènes de $(\pi \times 1)_* \mathcal{O}_{F_n^\times \times \mathcal{W}(v)}$. C'est un faisceau inversible de $\mathcal{O}_{X(v) \times \mathcal{W}(t)}$ -modules, et pour tout point $(\chi, \lambda) : \mathrm{Spec} K \rightarrow \mathcal{W}(t)$, l'image inverse de \mathcal{U} sur $X(v)_K$ est le faisceau $\omega^{(\chi, \lambda)}$. D'après le théorème de Kiehl, le faisceau \mathcal{U} est le faisceau associé

au $A \hat{\otimes} B$ -module $M = H^0(X(v) \times \mathcal{W}(t), \mathcal{U})$. De plus, la norme suprémum sur $F_n^\times \times \mathcal{W}(t)$ induit une norme sur M qui en fait un A -module de Banach.

Définition 5.1. — *Le module M est le module des formes surconvergentes sur $X(v)$, de poids dans $\mathcal{W}(t)$.*

C'est donc un A -module de Banach projectif. Il est munit d'une action continue de l'algèbre \mathcal{H} qui est la A -algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke. L'opérateur U_p est complètement continu. Pour tout caractère (χ, λ) induisant un morphisme $A \rightarrow K$, on a $M \otimes_A K = H^0(X(v), \omega^{(\chi, \lambda)})$.

5.2. La théorie spectrale. — Dans [Buz2], Buzzard a axiomatisé la construction de [Col97] et [C-M]. Sa "machine" permet d'associer une variété de Hecke à la donnée (A, M, \mathcal{H}, U_p) à condition de vérifier que M satisfait une hypothèse (Pr) que nous allons rappeler.

Un A -module de Banach N est dit potentiellement orthonormalisable si :

- il existe un ensemble I et une collection d'éléments $(e_i)_{i \in I} \in N^I$ tels que tout élément $n \in N$ s'écrive uniquement $n = \sum_I a_i e_i$ avec $(a_i)_{i \in I} \in A^I$,
- il existe deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ telles que $c_1 \sup a_i \leq |n| \leq c_2 \sup a_i$.

On dit que M satisfait (Pr) si M est facteur direct d'un A module N potentiellement orthonormalisable.

Lemme 5.1. — *Soit une suite exacte longue de A -modules :*

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow 0$$

où les M_i sont des modules de Banach, les différentielles sont continues, et les $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifient (Pr). Alors M_0 vérifie (Pr).

Corollaire 5.1. — *Le module M vérifie (Pr).*

Démonstration. Notons B' l'anneau de $(H_n^D)^\times$ au dessus de $X(v)$. La B -algèbre B' est une extension finie étale de groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$. Comme M est un facteur direct du A module $M' := M \otimes_B B'$, il suffit de démontrer que M' est (Pr). On sait par construction qu'il existe un recouvrement fini $(U_i)_{i \in I}$ par des ouverts affinoïdes de $(H_n^D)^\times$ au dessus duquel la fibration en boules $(H_n^D)^\times \times F_n^\times$ est trivial. Notons B_i les algèbres de ces ouverts. Considérons le complexe de Čech augmenté de M' (avec M' placé en degré 0), associé à ce recouvrement. Ce complexe vérifie les hypothèses du lemme 5.1. En effet, le module placé en degré k de ce complexe est la somme directe des modules $M' \hat{\otimes}_{B'} B_{\underline{i}}$ où \underline{i} est un multi-indice $(i_1, \dots, i_k) \in I^k$ (les i_j sont distincts) et $B_{\underline{i}} = \hat{\otimes}_{B'} B_{i_j}$. Le module $M' \hat{\otimes}_{B'} B_{\underline{i}}$ est, par le choix des (U_i) , un $A \hat{\otimes} B_{\underline{i}}$ module libre de rang 1. Mais comme $B_{\underline{i}}$ est potentiellement orthonormalisable sur \mathbb{Q}_p , il en résulte aussitôt que $A \hat{\otimes} B_{\underline{i}}$ est potentiellement orthonormalisable comme A -module. \square

On peut donc appliquer la machine, pour (ré-)obtenir les faits suivants :

L'opérateur U_p agissant sur M admet une série caractéristique $P(T) = \det(1 - T.U_p)$ qui définit une fonction sur $\mathcal{W}(t) \times \mathbb{A}_{an}^1$. Notons Z le lieu des zéros de cette fonction. Il existe un faisceau cohérent de \mathcal{O}_Z -modules \mathcal{M} et un espace rigide $\mathcal{H} \rightarrow Z$ fini au dessus de Z , tels que l'algèbre \mathcal{O}_H agisse fidèlement sur le faisceau \mathcal{M} . Précisément, il existe un recouvrement admissible par des affinoïdes (Y_i) de Z tel que :

- l'image de Y_i dans $\mathcal{W}(t)$ est un ouvert affinoïde X_i , et le morphisme $Y_i \rightarrow X_i$ est fini,

- au dessus de X_i , on a une factorisation de $P(T) = Q(T)S(T)$, où $Q(T)$ est un polynôme de terme constant 1, $S(T)$ est une série entière première à $Q(T)$.
- on a $Y_i = V(Q(T)) \subset Z \times X_i$,
- au dessus de X_i , on a une décomposition U_p -invariante $M|_{X_i} = M' \oplus \mathcal{M}|_{Y_i}$ donnée par des projecteurs qui commutent avec \mathcal{H} . Si $Q^*(T) = T^{\deg Q}Q(T^{-1})$ est le polynôme réciproque de Q , l'opérateur $Q^*(U_p)$ est nul sur le module $\mathcal{M}|_{Y_i}$ et est inversible sur M' . Le rang de $\mathcal{M}|_{Y_i}$ sur X_i est égal au degré de Q ,
- la restriction de H à Y_i est le spectre de l'image de $\mathcal{H}|_{X_i}$ dans $\text{End}(\mathcal{M}|_{Y_i})$.

Lorsqu'on fait tendre v vers 0, on peut faire tendre t vers 0. A t fixé, les courbe de Hecke $\mathcal{H} \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{W}(t)$ sont indépendantes du choix du rayon de surconvergence v suffisamment petit. On peut donc recoller pour obtenir (avec un petit abus de notation) la courbe de Hecke totale : $\mathcal{H} \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{W}$.

6. Le lien avec la théorie de Hida

Nous allons maintenant comparer la théorie que nous venons d'obtenir avec la théorie de Hida [Hi86], [Hi05]. Ceci permettra de montrer que les familles d'Eisenstein sont des familles de formes surconvergentes.

Considérons de nouveau l'ouvert formel ordinaire \mathfrak{U} de \mathfrak{X} . Soit $\mathfrak{IG} = \lim_n (\mathcal{E}[p^n]^0)^D$ le pro-revêtement étale "tour d'Igusa" de \mathfrak{U} , localement isomorphe au groupe \mathbb{Z}_p . Considérons la composante connexe \mathfrak{IG}^\times de \mathfrak{IG} constituée des éléments qui engendrent \mathfrak{IG} . Elle est équipée d'une action de \mathbb{Z}_p^\times . Pour tout poids $w \in \mathcal{W}$, notons ω_{top}^w le faisceau inversible sur \mathfrak{U} des fonctions homogènes de poids w sur \mathfrak{IG}^\times .

On dispose d'une application de Hodge-Tate au dessus de $\mathfrak{U} : \mathfrak{IG} \rightarrow \mathfrak{I}$, et il est classique (voir [Hi05] 3.1.1 et comparer avec la proposition 3.3) que cette application induit des isomorphismes :

$$\omega^k \xrightarrow{\sim} \omega_{top}^k$$

pour tout poids k entier. Au niveau rigide, au dessus de $U_{rig} = X(0)$, l'application de Hodge-Tate induit un morphisme \mathbb{Z}_p^\times -équivariant :

$$\text{HT} : IG^\times \rightarrow \mathcal{T}_{rig}^\times.$$

Par ailleurs, la limite projective des diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc} F_n^\times & \longrightarrow & F_{n-1}^\times & \longrightarrow & \mathcal{T}_{an}^\times \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ (H_n^D)^\times & \longrightarrow & (H_{n-1}^D)^\times & & \\ \downarrow & \swarrow & & & \\ U_{rig} & & & & \end{array}$$

vaut

$$\begin{array}{ccc} \lim_n F_n^\times & \xrightarrow{\text{HT}} & \mathcal{T}_{an}^\times \\ \downarrow & & \\ IG^\times & & \\ \downarrow & & \\ U_{rig} & & \end{array}$$

Localement pour la topologie étale au dessus de U_{rig} , l'inclusion $\mathcal{T}_{rig}^\times \subset \mathcal{T}_{an}$ s'identifie à l'inclusion de la couronne des éléments de norme 1 dans l'espace affine de dimension 1, l'application HT est le plongement de \mathbb{Z}_p^\times dans la couronne des éléments de norme 1, et F_n^\times s'identifie à la réunion de boules $\mathbb{Z}_p^\times \cdot B(1, p^{-n})$.

Proposition 6.1. — *Pour tout poids $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}$, on a un isomorphisme canonique de faisceaux au dessus de U_{rig} :*

$$\omega^{(\chi, \lambda)} \xrightarrow{\sim} \omega_{top}^{(\chi, \lambda)}$$

Démonstration. Fixons n tel que $n > w(v(\lambda))$. Le caractère (χ, λ) se prolonge donc en une fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p^\times(1 + p^n \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$. Le faisceau $\omega^{(\chi, \lambda)}$ est un sous-faisceau du faisceau des fonctions analytiques sur F_n^\times . L'application $IG^\times = \lim_m F_m^\times \rightarrow F_n^\times$ est \mathbb{Z}_p^\times -équivariante et induit le morphisme $\omega^{(\chi, \lambda)} \rightarrow \omega_{top}^{(\chi, \lambda)}$. Concrètement, une section de $\omega^{(\chi, \lambda)}$ est une fonction f sur les quadruplets $(E, \psi_N, P, \omega) \in F_n^\times$ qui est (χ, λ) -homogène. L'application de la proposition associe à cette section la fonction sur la tour d'igusa : $(E, \psi_N, (P_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto f(E, \psi_N, P_n, \text{HT}(P_n)_n)$. Il résulte alors simplement du lemme 2.1 que c'est un isomorphisme. \square

Hida construit le $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ -module M_{top} des formes modulaires p -adiques (voir [Hi05] part. 3). Ce module est équipé d'une action continue de l'algèbre de Hecke \mathcal{H} , et pour tout K -point $w \in \mathcal{W}$, induisant un morphisme $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]] \rightarrow \mathcal{O}_K$, le module $M_{top} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]} \mathcal{O}_K$ est égal à $H^0(\mathfrak{U}_{\mathcal{O}_K}, \omega_{top}^w)$.

On a un projecteur d'ordinarité $e = \lim U_p^{n!}$ sur M_{top} . Son image M_{top}^{ord} est le $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]$ -module localement libre de rang fini des formes-modulaires p -adiques ordinaires. On note \mathcal{H}^{ord} le spectre de l'image de l'algèbre de Hecke dans M_{top}^{ord} et \mathcal{Z}^{ord} le spectre de l'image de l'algèbre $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]][[U_p]]$ agissant sur M^{ord} .

Fixons à présent un entier n supérieur ou égal à 1, $v \in]0, \frac{p-1}{p^n}[\cap \mathbb{Q}$, et $t \in]0, +\infty[\cap \mathbb{Q}$ vérifiant $w(t) < n - \frac{p^n}{p-1}v$. On note, comme au numéro 5.2, A l'algèbre de $\mathcal{W}(t)$. L'application $IG^\times \rightarrow F_n^\times$ induit un morphisme injectif

$$M \rightarrow M_{top} \otimes_{\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^\times]]} A.$$

La fibre de ce morphisme au dessus de tout poids $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$ est le morphisme de restriction $H^0(X(v), \omega^{(\chi, \lambda)}) \rightarrow H^0(X(0), \omega^{(\chi, \lambda)})$ qui est encore injectif.

Notons \mathcal{H}_{rig}^{ord} et \mathcal{Z}_{rig}^{ord} les fibres rigides de \mathcal{H}^{ord} et \mathcal{Z}^{ord} . Par ailleurs, soit Z^{ord} l'ouvert de Z , intersection de Z avec l'anneau $\{v(z) = 0\} \times \mathcal{W}(t) \subset \mathbb{A}_{an}^1 \times \mathcal{W}(t)$, et soit $H^{ord} = Z^{ord} \times_Z H$. Il résulte des constructions que l'on a des immersions fermées i_i, i_2 et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{ord} & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{H}_{rig}^{ord} \times \mathcal{W}(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z^{ord} & \xrightarrow{i_2} & \mathcal{Z}_{rig}^{ord} \times \mathcal{W}(t) \\ \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{W}(t) \end{array}$$

Les algèbres Z^{ord} et H^{ord} sont donc finies au dessus de $\mathcal{W}(t)$ et le module $\mathcal{M}^{ord} := \mathcal{M}|_{Z^{ord}}$ est un module fini et projectif au dessus de $\mathcal{W}(t)$. On a un morphisme $\mathcal{M}^{ord} \rightarrow M_{top}^{ord}|_{\mathcal{W}(v)}$ déduit du morphisme $M \rightarrow M_{top} \otimes A$ en appliquant des projecteurs. Ce morphisme est injectif et sa fibre au dessus de tout point $(\chi, \lambda) \in \mathcal{W}(t)$ reste injective. Il est classique (voir [B-T] lem. 1) que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le morphisme $\mathcal{M}_{(k, \exp kq)}^{ord} \rightarrow (M_{top}^{ord})_{(k, \exp kq)}$ est un isomorphisme. Il en résulte aussitôt que $\mathcal{M}^{ord} \xrightarrow{\sim} M_{top}^{ord}|_{\mathcal{W}(t)}$, puis que $Z^{ord} \simeq \mathcal{Z}_{rig}^{ord} \times \mathcal{W}(t)$ et $H^{ord} \simeq \mathcal{H}_{rig}^{ord} \times \mathcal{W}(t)$.

On a donc montré que :

Proposition 6.2. — *Toute famille de formes modulaires p -adiques ordinaires est une famille de formes surconvergentes.*

Ceci s'applique en particulier aux familles d'Eisenstein. Soit \mathcal{W}_0 la composante connexe de l'espace des poids qui contient le caractère trivial, noté 1. Considérons E la famille d'Eisenstein "basique" (voir [C-M], 2.2). C'est la famille de formes modulaires p -adiques ordinaires définie au dessus de l'espace de poids \mathcal{W}_0 de q -développement

$$E_\kappa = 1 + \frac{2}{\zeta^*(\kappa)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_\kappa^*(n) q^n$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{W}_0 \setminus 1$, et $E_1 = 1$. On a posé

$$\sigma_\kappa^*(n) = \sum_{d|n, (d,p)=1} \kappa(d) d^{-1}$$

et ζ^* désigne la fonction zeta p -adique. Pour tout $\kappa = (0, \lambda) \in \mathcal{W}_0$, la section $E_\kappa \in H^0(X(0), \omega^{(0,\lambda)})$ est inversible (voir [Col97] B.1). Par le principe du maximum et la proposition 6.2, il existe $v > 0$ tel que cette section se prolonge dans $H^0(X(v), \omega^{(0,\lambda)})$ et reste inversible. Soit $\kappa' = (\chi', \lambda') \in \mathcal{W}$ s'écrivant $\kappa' = k\kappa$ où $k \in \mathbb{Z}$. Alors la multiplication par E_κ

$$M((k, \exp qk), X)^\dagger \xrightarrow{\times E_\kappa} M((\chi', \lambda'), X)^\dagger$$

est un isomorphisme. Cet isomorphisme permet de définir $M((\chi', \lambda'), X)^\dagger$ sans construire le faisceau des formes modulaires surconvergentes $\omega^{(\chi', \lambda')}$, c'est l'approche de Coleman.

Références

- [AIS] F. Andreatta, A Iovita et G. Stevens, *Geometric overconvergent modular forms*, prépublication.
- [Ber] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication 96-03, 1996, disponible sur perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/.
- [Buz2] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, Proceedings of the LMS Durham conference on *L-functions and arithmetic geometry*, 2004.
- [B-T] K. Buzzard and R. Taylor, *Companion forms and weight 1 forms*, Annals of Math. **149**, 1999.
- [Col97] R. Coleman, *p -adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math., **127**, 417-479, 1997.
- [C-M] R. Coleman and B. Mazur, *The eigencurve*, Galois representations in *arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, vol. **254** of London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1-113. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [Far07] L. Fargues, *Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramifications*, Duke Math vol. **140**, No 3 (2007).

-
- [Far] L.Fargues, *La Filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, à paraître à Journal für die Reine und angewandte Mathematik.
- [Hi86] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. ENS, **19**, 231-273, 1986.
- [Hi05] H. Hida, *p-adic automorphic forms on reductive groups*, Astérisque **298**, 2005, p. 147-254.
- [Ka] N. Katz, *P-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III, SLN, **350**, p. 69 à 190.
- [O-T] F.Oort et J. Tate, *Group schemes of prime order*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t.3, 1970, p. 1 à 21.

Février 2009

VINCENT PILLONI • Courriel : pilloni@math.columbia.edu, Columbia University, Mathematics department, 2990 Broadway, New York NY 10027