SURCONVERGENCE ET CLASSICITÉ : LE CAS DÉPLOYÉ

par

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Résumé. — Nous généralisons le critère de classicité de formes modulaires surconvergentes sur les courbes modulaires dû à Coleman à toutes les variétés de Shimura PEL de type (A) et (C) associées à des groupes réductifs déployés sur $\mathbb{Q}_p$. Notre démonstration s'inspire de la méthode de prolongement analytique de Buzzard et Kassaei.

Abstract. — We generalize Coleman classicity criterion for overconvergent modular forms on modular curves to the case of any PEL Shimura variety of type (A) or (C) associated to a reductive group split over $\mathbb{Q}_p$. Our demonstration is inspired by the analytic continuation method of Buzzard and Kassaei.

Table des matières

Hida dans le cas cas ordinaire et Coleman dans le cas général [**Co**] ont prouvé que toute forme modulaire surconvergente f sur la courbe modulaire de niveau iwahorique en p est classique dès qu'elle est de poids k entier, qu'elle est propre pour un certain opérateur de Hecke U de niveau iwahorique en p, que la valeur propre α correspondante dans une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ est non nulle et que $k > 1 + v(\alpha)$ où v désigne la valuation de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ valant un en p. Kassaei [**Ka**] a trouvé une autre démonstration du théorème de Coleman basée sur des travaux antérieurs de Buzzard [**Bu1**]. Ces travaux de Buzzard élucident la dynamique de l'opérateur U agissant sur la courbe modulaire rigide analytique de niveau iwahorique en p. Plus précisément, Buzzard a démontré que les itérations successives de l'opérateur U tendaient à accumuler le tube supersingulier vers des voisinages stricts arbitrairement petits du tube multiplicatif. Comme les formes surconvergentes sont définies sur de tels voisinages stricts, l'équation fonctionnelle $f = U(f)/\alpha$ et ses itérées permettent de prolonger analytiquement f au tube supersingulier dès que α est non nul. Restait à étendre f sur le tube ordinaire étale en utilisant l'hypothèse $k > 1 + v(\alpha)$.

La théorie du sous-groupe canonique de Lubin et Katz permet de décomposer l'opérateur U en une somme de deux opérateurs $U^{<}$ et $U^{\geqslant}$ définis sur un voisinage strict du tube ordinaire étale. Dans cette décomposition, $U^{<}$ paramètre les supplémentaires du sous-groupe universel qui ne rencontrent pas le sous-groupe canonique et $U^{\geqslant}$ l'unique supplémentaire égal au sous-groupe canonique. Les supplémentaires paramétrés par $U^{<}$ ont un degré au sens de Fargues [**Fa1**] strictement inférieur à un alors que le sous-groupe canonique paramétré par $U^{\geqslant}$ a un degré supérieur à $1 - \varepsilon$ où ε peut être choisi arbitrairement petit si l'on s'autorise à rétrécir le voisinage strict. Grâce à cela, il est facile de prouver que l'image par $U^{<}$ de tout voisinage strict du tube ordinaire étale est un voisinage strict du tube ordinaire multiplicatif. De plus, $U^{\geqslant}$ stabilise le tube ordinaire étale. Kassaei a alors introduit d'ingénieuses séries définies sur des voisinages stricts du tube ordinaire étale. Ces séries sont construites grâce aux opérateurs $U^{<}$ et $U^{\geqslant}$. Elles sont bien définies car $U^{<}$ envoie tube ordinaire étale sur tube ordinaire multiplicatif et elles approchent le prolongement voulu de f car l'opérateur $U^{\geqslant}$ ne paramétrant que des supplémentaires de grand degré, ses itérés sont de norme négligeable lorsque $k > 1 + v(\alpha)$. Kassaei a enfin énoncé un lemme de géométrie rigide permettant de recoller ses séries avec le prolongement analytique sur le tube supersingulier obtenu par Buzzard. Il en a conclu que la forme surconvergente f est définie sur toute la courbe modulaire rigide lorsque $k > 1 + v(\alpha)$. La classicité de f est alors une conséquence simple du principe « GAGA » en géométrie rigide.

Des travaux récents comme [**AIP**] construisent des variétés de Hecke en utilisant les formes surconvergentes. Pour reconnaître les points classiques de ces variétés de Hecke, il est important de prouver des variantes du théorème de Coleman pour des variétés de Shimura plus complexes que les courbes modulaires. Peu de cas étaient connus auparavant. Citons celui des variétés de Hilbert lorsque p est totalement décomposé dans le corps totalement réel associé [**Sa**], où la situation est analogue à celle d'un produit de courbes modulaires. Citons également celui des variétés de Siegel de genre deux [**Pi**], qui contient en germe certaines idées de ce travail. Dans cet article, nous démontrons un théorème de classicité pour toutes les variétés de Shimura PEL de type (A) et (C) associées à des groupes réductifs déployés sur $\mathbb{Q}_p$. Nous obtenons le théorème suivant qui sera précisé en **6.3.1**.

Théorème. — *Soit p un nombre premier et X_{Iw} une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) de niveau iwahorique en p associée à un groupe réductif déployé sur $\mathbb{Q}_p$. Soit f une forme modulaire surconvergente de poids κ sur X_{Iw}. Supposons f propre pour une certaine famille $(U_i)_i$ d'opérateurs de Hecke de niveau iwahorique en p. Supposons que les valeurs propres correspondantes $(\alpha_i)_i$ sont non nulles et que κ est grand devant la famille $(v(\alpha_i))_i$ de leurs valuations au sens de l'hypothèse* ***5.5.1****. La forme modulaire f est classique.*

Le nombre d'opérateurs U_i considérés est égal au nombre de facteurs simples du groupe sur $\mathbb{Q}_p$ associé à X_{Iw}. L'hypothèse **5.5.1** de comparaison entre poids et pente est très explicite et fait intervenir la dimension X_{Iw}. Certaines variétés de Shimura comme les variétés de Siegel ont un groupe associé déployé sur $\mathbb{Q}$. Nous obtenons dans ces cas une réponse complète au problème de la classicité des formes modulaires surconvergentes.

Remarque. — Précisons l'hypothèse poids-pente **5.5.1** dans deux cas particuliers. Supposons que X_{Iw} est la variété de Siegel au groupe GSp_{2g} sur $\mathbb{Q}$ pour $g \geq 1$. Le poids de f est un vecteur $(k_1 \geq \cdots \geq k_g)$ de $\mathbb{Z}^g$. Puisque GSp_{2g} est simple, nous ne considérons qu'un opérateur de Hecke U en p. Soit α la valeur propre de U agissant sur f. La condition poids-pente est alors $k_g > v(\alpha) + g(g+1)/2$.

Soit F une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ dans laquelle p est totalement décomposé et a, b des entiers. Supposons que X_{Iw} est une variété de Shimura associée à un groupe unitaire sur F de signature (a, b) à l'infini. Le poids de f est un vecteur $(k_1 \geq \cdots \geq k_a; l_1 \geq \cdots \geq l_b)$ de $\mathbb{Z}^{a+b}$. Là aussi, un seul opérateur de Hecke U entre en jeu. Soit α la valeur propre de U agissant sur f. La condition poids-pente est $k_a + l_b > v(\alpha) + ab$.

Nous démontrons le théorème grâce à une généralisation naturelle de la méthode de Buzzard et Kassaei. Nous commençons par étudier la dynamique des opérateurs de Hecke U_i et prouver qu'ils accumulent une certaine zone $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ de la variété rigide analytique associée à X_{Iw} vers des voisinages stricts du tube ordinaire multiplicatif (proposition **3.2.2**). Cela permet aussitôt de prolonger f à $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ en n'utilisant que l'hypothèse de pente finie (proposition **5.2.1**). La principale différence entre le cas des variétés de Shimura générales et celui des courbes modulaires est que le complémentaire de $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ ne se réduit pas à une union de tubes ordinaires.

Soit S un sous-ensemble analytique de ce complémentaire sur lequel on peut partitionner l'ensemble des supplémentaires du sous-groupe universel en groupes de degré < 1 et $\geqslant 1$. On peut alors définir une décomposition de la restriction à S de chaque opérateur U_i en

$$U_i \;=\; U_i^{<} \,+\, U_i^{\geqslant}\,.$$

Comme dans le cas des courbes modulaires, l'opérateur $U_i^{<}$ envoie S dans $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$. Si S est stable par $U_i^{\geqslant}$, la norme des itérés successifs de l'opérateur $U_i^{\geqslant}$ tend vers zéro lorsque l'hypothèse **5.5.1** est satisfaite. Il est alors facile de définir des séries de Kassaei et de construire une forme modulaire sur S qui approche le prolongement voulu de f.

Il semble malheureusement impossible de recouvrir le complémentaire de $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ par de tels sous-ensembles analytiques S. Nous adoptons donc une approche détournée : plutôt que de chercher à prolonger directement f à toute la variété rigide, nous la prolongeons d'abord au tube d'un ouvert de la fibre spéciale de X_{Iw} dont le complémentaire est de codimension $\geqslant 2$. D'après le lemme **5.1.7** et le caractère Cohen-Macaulay de la fibre spéciale ([**He**]), cela entraîne automatiquement le prolongement de f à toute la variété rigide. Il nous faut donc isoler de « gros » ouverts de cette fibre spéciale (paragraphe **4.3**). Ce seront des strates de Kottwitz–Rapoport dans le cas (A) et des intersections de strates de Kottwitz–Rapoport et d'Ekedahl–Oort dans le cas (C).

Il nous faut enfin algébriser la forme modulaire obtenue sur la variété rigide analytique. Si l'on exclut le cas des courbes modulaires, nous démontrons un principe de Köcher (corollaire **6.2.3**) qui implique que toute forme modulaire rigide s'étend aux compactifications toroïdales. Ce principe résulte de l'existence de compactifications toroïdales de variétés de Shimura PEL en leurs places de mauvaise réduction de niveau iwahorique. Il est alors aisé de conclure en appliquant un théorème « GAGA » en géométrie rigide.

Remarque. — Dans [**PS2**], nous montrons un théorème de classicité pour les formes modulaires surconvergentes sur les variétés de Hilbert associées à un groupe non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$. En particulier, nous ne supposons pas le groupe déployé sur $\mathbb{Q}_p$. Si F désigne le corps totalement réel associé à la variété de Hilbert, le groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ en question est la restriction des scalaires de F à $\mathbb{Q}$ de GL_2. Il est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si p est non ramifié dans F et déployé sur $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si p est totalement décomposé dans F.

Nous remercions Laurent Fargues, Colin Guillarmou, Tom Haines, Robert Kottwitz, Bao Châu Ngô et Liang Xiao pour d'intéressantes discussions, Alain Genestier et Jacques Tilouine pour avoir organisé un groupe de travail sur le prolongement analytique en 2009 et le rapporteur pour sa relecture attentive et ses nombreux commentaires qui nous ont permis d'éviter plusieurs erreurs. Nous remercions spécialement Ulrich Görtz de nous avoir fourni la démonstration du corollaire **4.2.6** qui a joué un rôle clé dans la gestation de cet article. Les auteurs ont été subventionnés par le programme ANR-BLAN-0114 ArShiFo.

1. Formes surconvergentes sur les variétés de Shimura

1.1. Données PEL de type (A) et (C). — Introduisons le plus brièvement possible les données d'algèbre linéaire considérées dans cet article. La référence standard est [**Ko**]. Les notations introduites dans cette partie seront librement réutilisées dans la suite. Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre simple munie d'une involution positive $\star$. On note F le centre de B et F_0 le sous-corps de F fixe par l'involution $\star$. L'extension F_0 de $\mathbb{Q}$ est totalement réelle. Notons d son degré. Le corps F est soit égal à F_0 soit une extension quadratique imaginaire de F_0. On dit que $(B,\star)$ est de type (A) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

- **i.** $[F : F_0] = 2$.
- **ii.** Pour tout plongement de F_0 dans $\mathbb{R}$, on a $B \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\star$ induit l'involution $A \mapsto \bar{A}^t$.
- **iii.** Pour tout plongement de F_0 dans $\mathbb{C}$, on a $B \otimes_{F_0} \mathbb{C} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\star$ induit l'involution $(A,B) \mapsto (B^t, A^t)$.

On dit que $(B,\star)$ est de type (C) si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

- **i.** $F = F_0$ et pour tout plongement de F dans $\mathbb{R}$, $B \otimes_F \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\star$ induit l'involution $A \mapsto A^t$.
- **ii.** $F = F_0$ et pour tout plongement de F dans $\mathbb{C}$, $B \otimes_F \mathbb{C} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\star$ induit l'involution $A \mapsto A^t$.

On supposera dans la suite de l'article que $(B,\star)$ est de type (A) ou (C). On se donne un B-module anti-hermitien non dégénéré $(U_{\mathbb{Q}}, <\,,>)$. En particulier, la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $U_{\mathbb{Q}}$ est paire. On note $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_B(U_{\mathbb{Q}}, <\,,>)$ le groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ des similitudes symplectiques B-linéaires de $U_{\mathbb{Q}}$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(U_{\mathbb{Q}}) \times \mathbb{G}_m$.

Soient $\tau_1, ..., \tau_d$ les plongements réels de F_0. Si $F \neq F_0$, on note $\sigma_1, \bar{\sigma}_1, ..., \sigma_d, \bar{\sigma}_d$ les plongements de F dans $\mathbb{C}$ indexés de telle sorte que σ_i et $\bar{\sigma}_i$ soient conjugués sous $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ et que $\sigma_i|_{F_0} = \tau_i$ pour tout $i \leqslant d$.

Supposons que B soit de type (A). Soit $1 \leqslant i \leqslant d$. Au choix de σ_i correspond un isomorphisme $F \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$. Posons $B_i = B \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $U_i = U_{\mathbb{Q}} \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R}$. D'après l'équivalence de Morita, on a $U_i \simeq \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} W_i$ où B_i agit sur le premier facteur et où W_i est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La structure anti-hermitienne sur U_i en induit une sur W_i. On note (a_i, b_i) sa signature (si on avait pris l'isomorphisme $F \otimes_{F_0} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ correspondant au choix de $\bar{\sigma}_i$, on aurait obtenu la signature (b_i, a_i)). Le groupe réel $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ est donc isomorphe au groupe

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^{d} \mathrm{U}(a_i, b_i)\right)$$

où $\mathrm{U}(a_i, b_i)$ est le groupe des isomorphismes unitaire relatives à la forme hermitienne de signature (a_i, b_i). On remarquera d'ailleurs que $a_i + b_i$ ne dépend pas de i et vaut $\frac{1}{2nd}\dim_{\mathbb{Q}} U_{\mathbb{Q}}$. Supposons que B est de type (C). Posons $B_i = B \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ est isomorphe au groupe

$$\mathrm{G}\left(\prod_{i=1}^{d} \mathrm{Sp}_{2a_i}\right)$$

où $a_i = \frac{1}{2nd}\dim_{\mathbb{Q}} U_{\mathbb{Q}}$ est indépendant de i et par convention, le groupe symplectique est associé à la matrice antidiagonale et antisymétrique usuelle.

Notons $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\, \mathbb{G}_m$ le tore de Deligne et donnons-nous un morphisme $h : \mathbb{S} \to \mathrm{G}_{\mathbb{R}}$ comme dans [**Ko**, par. 4]. Ce morphisme définit une structure complexe sur $U_{\mathbb{R}}$. Notons $U^{1,0}$ le sous-espace de $U_{\mathbb{C}}$ où $h(i)$ agit par multiplication par i. L'espace $U^{1,0}$ est un $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$-module. Supposons que B est de type (A). On a un isomorphisme $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \oplus_{i=1}^{d} \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ relatif à l'isomorphisme $F \otimes_{F_0,\tau_i} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ correspondant au choix de σ_i. Le $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$-module $U^{1,0}$ est isomorphe à

$$\prod_{i=1}^{d} (\mathbb{C}^n)^{a_i} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_i}$$

où $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ agit à travers $B_i \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ sur $(\mathbb{C}^n)^{a_i} \oplus \overline{(\mathbb{C}^n)}^{b_i}$ avec l'action standard sur le premier facteur et l'action conjuguée sur le second facteur. Supposons que B est de type (C). On a un isomorphisme $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \oplus_{i=1}^{d} \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et le module $U^{1,0}$ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{d} (\mathbb{C}^n)^{a_i}$.

Soit $\det_{U^{1,0}}$ le déterminant du $\mathcal{O}_B$-module $U^{1,0}$ dans le sens de [**Ko**, par. 5]. C'est un polynôme à coefficient dans un corps de nombres minimal pour cette propriété E appelé corps réflexe. On se donne un ordre $\mathcal{O}_B$ de B stable par l'involution $\star$ et un réseau U de $U_{\mathbb{Q}}$ qui est stable sous l'action de $\mathcal{O}_B$. On suppose que l'accouplement $<,>$ induit un accouplement $U \times U \to \mathbb{Z}$. Soit p un nombre premier.

Hypothèse 1.1.1. — On suppose dans la suite que p vérifie les proprietés suivantes.

i. $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$.

ii. $\mathcal{O}_B$ est un ordre de B maximal en p.

iii. L'accouplement $<,>: U \times U \to \mathbb{Z}$ est parfait en p.

Remarque 1.1.2. — On vérifie immédiatemment que p satisfait la première des propriétés précédentes si et seulement si le groupe $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est déployé. Dans la suite de l'article, nous aurons systématiquement deux cas à considérer : le cas des variétés de Shimura PEL de type (A), où $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est un produit de groupes linéaires, et le cas des variétés de type (C), où $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est un produit de groupes symplectiques.

Sous les hypothèses précédentes, le nombre premier p est totalement décomposé dans F. On note $\pi_1, ..., \pi_d$ les idéaux premiers de F_0 au-dessus de p. Lorsque $[F : F_0] = 2$, on note π_i^+ et π_i^- les idéaux premiers de F au-dessus de π_i. Fixons un plongement $\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$. Lorsque B est de type (A), on a $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \prod_{i=1}^{d} \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$. Lorsque B est de type (C), on a $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq \prod_{i=1}^{d} \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$.

Remarque 1.1.3. — On a choisi l'indexation des idéaux π_i et des isomorphismes entre $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ et des produits d'algèbres de matrices de telle sorte que dans le cas (A), l'idéal à gauche engendré par π_i^+ dans $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ corresponde à l'idéal à gauche engendré par le $2d$-uplet de matrices scalaires avec la matrice scalaire p en position $2i-1$ et la matrice scalaire 1 partout ailleurs. De même dans le cas (C).

Remarque 1.1.4. — Notons $E_{1,1}$ l'idempotent de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ donné par la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le premier coefficient diagonal. Le foncteur qui à tout $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$-module M associe le $\mathbb{Z}_p$-module $E_{1,1} \cdot M$ réalise une équivalence de catégorie de Morita. Dans le cas (A), on considère l'idempotent

$$F \;=\; (F_i^+ \oplus F_i^-)_{1 \leqslant i \leqslant d}$$

de $\prod_{i=1}^d \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$, où chaque F_i désigne la matrice $E_{1,1}$. Dans le cas (C), on considère l'idempotent

$$F \;=\; (F_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$$

de $\prod_{i=1}^d \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ où chaque F_i désigne la matrice $E_{1,1}$. Le foncteur $M \mapsto F \cdot M$ réalise une équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$-modules vers la catégorie des modules sur

$$\prod_{i=1}^d \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$$

dans le cas (A) et celle des modules sur

$$\prod_{i=1}^d \mathbb{Z}_p$$

dans le cas (C). Nous utiliserons systématiquement ce dictionnaire lorsque nous rencontrerons des $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ modules.

1.2. Variétés de Shimura sans niveau en p. — Fixons un idéal premier π dans le corps réflexe E au dessus de p et un entier $N \geqslant 3$ non divisible par p. On note $\mathcal{O}$ la complétion de l'anneau d'entiers de E en l'idéal π et $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$ qui est isomorphe à $\mathbb{Q}_p$. Le polynôme $\det_{U^{1,0}}$ est à coefficients dans $\mathcal{O}$. Il existe un schéma quasi-projectif X sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ dont les S-points sont les classes d'isomorphismes de quadruplets $(A, \lambda, \iota, \eta)$ où

- **i.** $A \to S$ est un schéma abélien.
- **ii.** $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré premier à p.
- **iii.** $\iota : \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A)$ est compatible avec les involutions $\star$ et de Rosati, et les polynômes $\det_{\mathrm{Lie}(A)}$ et $\det_{U^{1,0}}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_S$ sont égaux.
- **iv.** $\eta : A[N] \to U/NU$ est une similitude symplectique, $\mathcal{O}_B$-linéaire qui se relève localement pour la topologie étale en une similitude symplectique $\mathcal{O}_B$-linéaire
$$\mathrm{H}_1(A, \mathbb{A}_f^p) \to U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}_f^p\,.$$

Le schéma X sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ est le modèle entier canonique d'une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) associée au groupe réductif G sur $\mathbb{Q}$. Il est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$.

Remarque 1.2.1. — La condition $\det_{\mathrm{Lie}(A)} = \det_{U^{1,0}}$ se reformule simplement de la manière suivante. Commençons par remarquer que $\mathcal{O} \simeq \mathbb{Z}_p$. Notons St le $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$-module

$$\bigoplus_{i=1}^d (\mathbb{Z}_p^n)^{a_i} \oplus (\mathbb{Z}_p^n)^{b_i}$$

lorsque l'algèbre B est de type (A) et

$$\bigoplus_{i=1}^{d} (\mathbb{Z}_p^n)^{a_i}$$

lorsque B est de type (C), avec dans les deux cas action de $\mathcal{O}_B$ facteur par facteur selon les isomorphismes de $\mathcal{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ avec des produits d'algèbres de matrices. Il est équivalent de demander que $\det_{\mathrm{Lie}(A)} = \det_{U^{1,0}}$ et de demander que $\mathrm{Lie}(A)$ soit localement isomorphe pour la topologie de Zariski au faisceau $\mathrm{St} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S$ comme $\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_S$-module.

Remarque 1.2.2. — Tous les résultats de cet article se généralisent immédiatement au cas de n'importe quelle structure de niveau hors de p.

1.3. Structure de niveau iwahorique. — Soient $l \leqslant m$ deux entiers. On note BT_m le champ des groupes de Barsotti-Tate de hauteur m sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. On note

$$\mathrm{BT}_l^{\mathrm{pol}}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate principalement polarisés de hauteur $2l$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. On note

$$\hat{\mathrm{BT}}_{l,m}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate de dimension l et hauteur m sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$ et

$$\hat{\mathrm{BT}}_l^{\mathrm{pol}}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate principalement polarisés de dimension l sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$. Par restriction on obtient des immersions à la fois ouvertes et fermées

$$\hat{\mathrm{BT}}_{l,m} \hookrightarrow \mathrm{BT}_m \times \mathrm{Spf}(\mathcal{O})$$

et

$$\hat{\mathrm{BT}}_l^{\mathrm{pol}} \hookrightarrow \mathrm{BT}_l^{\mathrm{pol}} \times \mathrm{Spf}(\mathcal{O})\,.$$

Dans le cas (A), il existe un morphisme

$$\mathfrak{P} \,:\, X \longrightarrow \prod_{i=1}^{d} \mathrm{BT}_{a_i+b_i}$$

défini de la manière suivante. On a $A[p^\infty] = \oplus_{i=1}^d A[(\pi_i^+)^\infty] \oplus A[(\pi_i^-)^\infty]$. Remarquons que $A[(\pi_i^+)^\infty]$ s'identifie au dual de $A[(\pi_i^-)^\infty]$. Le groupe de Barsotti-Tate $A[(\pi_i^+)^\infty]$ est naturellement un module sous $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$ et s'écrit donc $\mathbb{Z}_p^n \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_i$ où G_i est un groupe de Barsotti-Tate de hauteur $a_i + b_i$ et dont la fibre spéciale sur $\mathcal{O}/\pi$ est de dimension a_i. Le morphisme $\mathfrak{P}$ envoie le schéma abélien A sur le groupe de Barsotti-Tate $\prod_i G_i$. Dans le cas (C), il existe de même un morphisme

$$\mathfrak{P} \,:\, X \longrightarrow \prod_{i=1}^{d} \mathrm{BT}_{a_i}^{\mathrm{pol}}\,.$$

En effet, on a $A[p^\infty] = \oplus_{i=1}^d A[\pi_i^\infty]$, où les groupes de Barsotti-Tate $A[\pi_i^\infty]$ sont principalement polarisés et sont des modules sous $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}_p)$. Ils sont donc égaux à $\mathbb{Z}_p^n \otimes_{\mathbb{Z}_p} G_i$ où G_i est un groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé de hauteur $2a_i$. Le morphisme $\mathfrak{P}$ envoie le schéma abélien A sur le groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé $\prod_i G_i$. Dans le cas (A) comme dans le cas (C), le théorème de déformation de Serre-Tate implique que le morphisme $\mathfrak{P}$ est formellement étale. Dans tous les cas, on note $\mathfrak{P}_i$ la i-ème coordonnée de $\mathfrak{P}$. Dans le cas non polarisé on note $\mathfrak{P}_i^D$ le composé de la dualité de Cartier avec $\mathfrak{P}_i$. Passer de $\mathfrak{P}_i$ à $\mathfrak{P}_i^D$ revient à échanger π_i^+ et π_i^-. Les foncteurs $\mathfrak{P}_i$ sont simplement les projections par l'idempotent F_i^+ défini dans la remarque **1.1.4** dans le cas (A) et par l'idempotent F_i dans le cas (C).

Par définition, une structure de niveau iwahorique sur un groupe de Barsotti-Tate G de hauteur m est la donnée d'un drapeau complet $H_\bullet = (H_0 = 0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_m = G[p])$ de sous-groupe finis et plats de $G[p]$, où H_j est de rang p^j pour tout $j \leqslant m$. De même, une structure de niveau iwahorique sur un groupe de Barsotti-Tate G principalement polarisé de hauteur $2l$ est la donnée d'un drapeau complet $H_\bullet = (H_0 = 0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_l \subset G[p])$ de sous-groupe finis et plats de $G[p]$, où H_j est de rang p^j pour tout $j \leqslant l$ et H_l est totalement isotrope. On note

$$\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate de hauteur m munis d'une structure de niveau iwahorique et

$$\mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}$$

le champ des groupes de Barsotti-Tate principalement polarisés de hauteur $2l$ munis d'une structure iwahorique. Le morphisme d'oubli de la structure de niveau iwahorique est représentable et propre d'après la théorie du schéma de Hilbert. Dans le cas (A), on pose

$$X_{\mathrm{Iw}} = X \times_{\prod_{i=1}^d \mathrm{BT}_{a_i+b_i}} \prod_{i=1}^d \mathrm{BT}_{a_i+b_i,\mathrm{Iw}}$$

Dans le cas (C), on pose

$$X_{\mathrm{Iw}} = X \times_{\prod_{i=1}^d \mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{a_i}} \prod_{i=1}^d \mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{a_i,\mathrm{Iw}}$$

Ainsi, X_{Iw} est un schéma propre sur X. Les S-points du schéma X_{Iw} correspondent à des quadruplets $(A, \iota, \lambda, \eta, K_\bullet)$ où $(A, \iota, \lambda, \eta)$ est un S-point de X et $K_\bullet$ un drapeau de sous-$\mathcal{O}_B$-modules finis et plats de $A[p]$ vérifiant des conditions additionnelles.

1.4. Formes modulaires classiques. — Notons A le schéma abélien universel sur X. Soit $e^\star\Omega^1_{A/X}$ le faisceau conormal de A le long de la section neutre. Il est localement pour la topologie de Zariski isomorphe à $\mathrm{St} \otimes \mathcal{O}_X$ comme $\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_X$-module. Par l'équivalence de Morita (voir la remarque **1.1.4**), ce faisceau est déterminé par le sous-faisceau $F \cdot e^\star\Omega^1_{A/X}$, qui est localement isomorphe à

$$\prod_{i=1}^d \mathcal{O}_X^{a_i} \oplus \mathcal{O}_X^{b_i}$$

comme $(\prod_{i=1}^d \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{O}_X$-module dans le cas (A) et à $\prod_{i=1}^d \mathcal{O}_X^{a_i}$ comme $(\prod_{i=1}^d \mathbb{Z}_p) \otimes \mathcal{O}_X$-module dans le cas (C). Soit $\mathcal{T} = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_X}(\mathrm{St} \otimes \mathcal{O}_X, e^\star\Omega^1_{A/X})$. Dans le cas (A), c'est un torseur sur X sous le groupe

$$\mathrm{M} = \prod_{i=1}^d \mathrm{GL}_{a_i} \times \mathrm{GL}_{b_i} .$$

Dans le cas (C), c'est un torseur sous le groupe $\mathrm{M} = \prod_{i=1}^d \mathrm{GL}_{a_i}$. Dans les deux cas, notons $\mathrm{T_M}$ le tore diagonal de M, notons $\mathrm{B_M}$ le sous-groupe de Borel supérieur de M, notons $\mathrm{N_M}$ son radical unipotent, $X(\mathrm{T_M})$ le groupe des caractères de $\mathrm{T_M}$ et $X(\mathrm{T_M})^+$ le cône des poids dominants pour $\mathrm{B_M}$.

Définition 1.4.1. — Pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T_M})^+$, le faisceau des formes modulaires de poids κ est $\omega^\kappa = \phi_\star\, \mathcal{O}_\mathcal{T}[\kappa']$ où l'on a posé $\kappa' = -w_0\, \kappa$ avec w_0 l'élément le plus long du groupe de Weyl de M relativement au tore diagonal $\mathrm{T_M}$, on a noté $\phi : \mathcal{T} \to X$ la projection canonique et $\phi_\star\, \mathcal{O}_\mathcal{T}[\kappa']$ désigne le sous-faisceau de $\phi_\star\, \mathcal{O}_\mathcal{T}$ où $\mathrm{B_M} = \mathrm{T_M N_M}$ agit par le caractère κ' sur $\mathrm{T_M}$ et le caractère trivial sur $\mathrm{N_M}$.

Donnons une description plus concrète des formes modulaires. Dans le cas (A), on a par l'équivalence de Morita

$$\mathcal{T} \;=\; \prod_{i=1}^{d} \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{a_i}\,,\; F_i^+ \cdot e^\star \Omega^1_{A/X}) \oplus \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{b_i}\,,\; F_i^- \cdot e^\star \Omega^1_{A/X}).$$

On notera $(\omega_i^+, \omega_i^-)_{1\leqslant i\leqslant d}$ un point du torseur. Une section du faisceau ω^κ sur un ouvert V est une fonction g sur les quintuplets $\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i^+ + \omega_i^-)_{1\leqslant i\leqslant d}\big) \in \mathcal{T}(V)$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i^+ + \omega_i^-) \circ b\big)\Big) \;=\; \kappa'(b) \cdot g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i^+ + \omega_i^-)\big)\Big)$$

pour tout b dans B. Dans le cas (C), on a une interprétation similaire. On note $(\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ un point de $\mathcal{T}$ qui est isomorphe à

$$\prod_{i=1}^{d} \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{a_i}\,,\; F_i \cdot e^\star \Omega^1_{A/X})$$

d'après l'équivalence de Morita. Une section g du faisceau ω^κ sur un ouvert V est donc une fonction sur les quintuplets $\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant d}\big) \in \mathcal{T}(V)$ vérifiant pour tout $b \in B$ l'équation fonctionnelle

$$g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i) \circ b\big)\Big) \;=\; \kappa'(b) \cdot g\Big(\big(A, \lambda, \iota, \eta, (\omega_i)\big)\Big)\,.$$

On désigne encore par ω^κ l'image inverse du faisceau ω^κ sur X_{Iw} par le morphisme d'oubli du niveau iwahorique en p. On suppose l'hypothèse inoffensive suivante vérifiée dans le reste de l'article.

Hypothèse 1.4.2. — La dimension complexe de l'espace symétrique de G est > 1.

Le principe de Köcher énoncé dans la proposition **6.2.1** est alors valable et nous pouvons définir les formes modulaires sans nous occuper des pointes de la variété de Shimura.

Définition 1.4.3. — Une forme modulaire de poids $\kappa \in X(\mathrm{T_M})^+$ sur $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ est une section globale du faisceau ω^κ.

1.5. Fonction degré et formes surconvergentes. — Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $v : \bar{K}^\star \to \mathbb{R}$ sa valuation normalisée par $v(p) = 1$. Rappelons que Fargues a défini dans **[Fa1]** le degré $\deg(G)$ d'un groupe fini et plat G sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. On définit une fonction

$$\begin{array}{rcl} \delta \;:\; \mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})) & \longrightarrow & [0, l] \\ (G, H_\bullet) & \longmapsto & \deg(H_l) \end{array}$$

On définit de même une fonction

$$\begin{array}{rcl} \delta \;:\; \mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})) & \longrightarrow & [0, l] \\ (G, H_\bullet) & \longmapsto & \deg(H_l) \end{array}$$

Dans les deux cas, la fonction δ se factorise par l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Barsotti-Tate munis de structures de niveau iwahoriques. Posons $m = 2l$ dans le cas polarisé. On dit que $(G, H_\bullet)$ est ordinaire-multiplicatif si $\delta(G, H_\bullet) = l$. Dans ce cas, G est un groupe de Barsotti-Tate extension d'un Barsotti-Tate étale de hauteur $m - l$ par un Barsotti-Tate multiplicatif de hauteur l et le sous-groupe H_l est de type multiplicatif.

On note X_{Iw}^{rig} l'espace rigide obtenu comme fibre générique au sens de Raynaud de la complétion formelle de X_{Iw} le long de sa fibre spéciale. En composant le morphisme $\mathfrak{P}$ avec les fonctions δ qui viennent d'être définies, on obtient une application encore noté δ

$$\delta \; : \; X_{\mathrm{Iw}}^{rig} \longrightarrow \prod_{i=1}^{d} [0, a_i] \, .$$

On note δ_i la i-ème coordonnée de l'application δ. Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant d} \in \mathbb{R}^d$, on définit l'ouvert rigide

$$X_{\mathrm{Iw}}(\varepsilon) \; = \; \{x \in X_{\mathrm{Iw}}^{rig} \text{ tq } \delta_i(x) \geqslant a_i - \varepsilon_i \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant d\} \, .$$

Le lieu ordinaire-multiplicatif est $X_{\mathrm{Iw}}(0)$. C'est le tube d'un ouvert de la fibre spéciale $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Il est non vide d'après [**We**, 1.6.3] car on a supposé que p est totalement décomposé dans F donc en particulier dans le corps réflexe E.

Remarque 1.5.1. — Le théorème de Wedhorn montre en fait que p est totalement décomposé dans E si et seulement si le lieu ordinaire est dense dans $X \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Dans ce cas, le lieu ordinaire est non vide dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ et il en est de même du lieu ordinaire-multiplicatif. Nous montrerons dans les corollaires **4.2.5** et **4.2.9** que le lieu ordinaire est dense dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ si p est totalement décomposé dans F, donc si le groupe G est déployé sur $\mathbb{Q}_p$. L'énoncé réciproque est également vrai sous l'hypothèse que p est non ramifié dans F. Ainsi, si p est totalement décomposé dans E mais pas dans F, le lieu ordinaire n'est pas dense dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Cela résulte simplement d'une énumération des strates de Kottwitz–Rapoport de codimension zéro de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ (le nombre de strates de Kottwitz–Rapoport de dimension fixée ne dépend pas du comportement de p dans F) et des strates ordinaires. On trouve que lorsque p est totalement décomposé dans E mais pas dans F, il y a strictement moins de strates ordinaires que de strates de Kottwitz–Rapoport de codimension 0.

Définition 1.5.2. — Soit $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$ un poids dominant. Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des formes modulaires surconvergentes de poids est

$$\mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}}, \, \kappa)^\dagger \; = \; \mathrm{colim}_{\varepsilon > 0} \; \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}(\varepsilon), \, \omega^\kappa) \, .$$

2. Action de l'algèbre de Hecke

2.1. Action géométrique sur les champs de BT. — Soient $l \leqslant m$ deux entiers positifs. Nous allons construire des correspondances géométriques, c'est à dire des morphismes représentables, finis et étales

$$\begin{array}{llcll} p_1^{\mathrm{BT}}, \, p_2^{\mathrm{BT}} & : \; C^{\mathrm{BT}} & \longrightarrow & \mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p) & \text{dans le cas non polarisé} \\ p_1^{\mathrm{BT}}, \, p_2^{\mathrm{BT}} & : \; C^{\mathrm{BT}} & \longrightarrow & \mathrm{BT}_{l,\mathrm{Iw}}^{\mathrm{pol}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p) & \text{dans le cas polarisé.} \end{array}$$

Dans le cas non polarisé, C^{BT} est par définition le champ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ qui paramètre les triplets
$$(G, H_\bullet, L)$$
où G est un groupe de Barsotti-Tate de hauteur m, où $H_\bullet$ est une structure de niveau iwahorique sur G et où L est un sous-groupe de $G[p]$ vérifiant
$$L \oplus H_l = G[p].$$
La projection p_1^{BT} est l'oubli du sous-groupe L. La projection p_2^{BT} envoie le triplet $(G, H_\bullet, L)$ sur le couple $(G', H'_\bullet)$ vérifiant que $G' = G/L$ et que H'_k est l'image de H_k dans G' pour tout $1 \leqslant k \leqslant l$ et l'image de $p^{-1}(H_k \cap L)$ dans G' pour tout $l+1 \leq k \leq m$. Dans le cas polarisé, C^{BT} est le champ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ qui paramètre les triplets
$$(G, H_\bullet, L)$$
où G est un groupe Barsotti-Tate principalement polarisé de hauteur $2l$, où $H_\bullet$ est une structure de niveau iwahorique sur G et où L est un sous-groupe lagrangien de $G[p]$ vérifiant
$$L \oplus H_l = G[p].$$
La projection p_1^{BT} est l'oubli du groupe L. La projection p_2^{BT} envoie le triplet $(G, H_\bullet, L)$ sur le couple $(G', H'_\bullet)$ vérifiant que $G' = G/L$ et que H'_k est l'image de H_k dans G' pour tout $1 \leqslant k \leqslant l$.

Notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des parties de l'ensemble des classes d'isomorphismes d'un groupoïde $\mathcal{X}$. Dans le cas non polarisé, on obtient pour toute extension finie K' de K une application
$$U \;:\; \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(K')\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(K')\right)$$
qui à V associe $p_2^{\mathrm{BT}}((p_1^{\mathrm{BT}})^{-1}(V))$. Dans le cas polarisé, la même règle définit une application
$$U \;:\; \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(K')\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(K')\right) .$$
Dans les deux cas, les applications U respectent les ensembles finis. D'après [**Ta**, th.4], le foncteur fibre générique permet de voir $\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})$ comme un sous-groupoide de $\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(K')$. De même dans le cas polarisé. Puisque la notion d'avoir bonne réduction sur $\mathcal{O}_{K'}$ est préservée par isogénies entre groupes de Barsotti-Tate, on voit que U induit des applications
$$\begin{array}{rcccl} U & : & \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})\right) & \longrightarrow & \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})\right) \\ U & : & \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})\right) & \longrightarrow & \mathcal{P}\left(\mathrm{BT}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})\right) . \end{array}$$

2.2. Action géométrique sur les variétés de Shimura. — Nous allons associer à tout entier $1 \leqslant i \leqslant d$ des correspondances géométriques
$$\begin{array}{rcccl} p_1\,,\, p_2 & : & C_i & \longrightarrow & X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K) \\ p_1^{rig},\, p_2^{rig} & : & C_i^{rig} & \longrightarrow & X_{\mathrm{Iw}}^{rig}. \end{array}$$
Pour définir C_i dans le cas non polarisé il suffit de réaliser le produit fibré
$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathrm{BT}} \arrow[d, "p_1^{\mathrm{BT}}"] \\ X_{\mathrm{Iw}|_K} \arrow[r] & \mathrm{BT}_{a_i+b_i,\mathrm{Iw}|_{\mathbb{Q}_p}} \end{tikzcd}$$

De même dans le cas polarisé. Cette définition fournit la projection $p_1 : C_i \to X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$. On vérifie grâce à la remarque **2.2.1** que C_i est canoniquement isomorphe au produit fibré

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r] \arrow[d] & C^{\mathrm{BT}} \arrow[d, "p_2^{\mathrm{BT}}"] \\ X_{\mathrm{Iw}|_K} \arrow[r] & \mathrm{BT}_{a_i+b_i,\mathrm{Iw}|_{\mathbb{Q}_p}} \end{tikzcd}$$

Cela fournit la seconde projection p_2. Les projections p_1 et p_2 sont finies étales.

Remarque 2.2.1. — Le schéma C_i sur $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ paramètre des sous-groupes d'un type particulier du schéma abélien universel. Dans le cas (A), il paramètre les sextuplets $(A, \lambda, \iota, \eta, K_\bullet, L)$ où $(A, \lambda, \iota, \eta, K_\bullet)$ est un point de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ et L est un sous-groupe de $A[p]$ stable par $\mathcal{O}_B$ vérifiant

$$L[\pi_i^+] \;=\; L[\pi_i^-]^\perp$$

tels que $F_i^+ \cdot (A, H_\bullet, L)$ détermine un point du champ C^{BT}. On a une interprétation similaire dans le cas (C). On dira dans les deux cas que L est un groupe de type U_i et que l'isogénie $A \to A/L$ est de type U_i.

On définit C_i^{rig} comme le produit fibré

$$\begin{tikzcd} C_i^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d] & C_i^{\mathrm{an}} \arrow[d, "p_1"] \\ X_{\mathrm{Iw}}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & X_{\mathrm{Iw}}^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

où on aurait pu remplacer p_1 par p_2 et « an » désigne l'analytifié d'un schéma de type fini sur $\mathrm{Spec}(K)$. Dans toute la suite, si le contexte est clair, on supprime des notations les exposants « rig » et « BT ». Notons $\mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig})$ la catégorie des ouverts rigides de X_{Iw}^{rig}. Les correspondances C_i^{rig} définissent des foncteurs

$$\begin{array}{rcl} U_i \;:\; \mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig}) & \to & \mathrm{Ouv}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig}) \\ V & \mapsto & p_2\big(p_1^{-1}(V)\big) \end{array}$$

On vérifie que $U_i(X_{\mathrm{Iw}}(0)) = X_{\mathrm{Iw}}(0)$ et donc que U_i agit sur les systèmes fondamentaux de voisinages stricts de $X_{\mathrm{Iw}}(0)$.

2.3. Action sur les formes modulaires. — Notons $\pi_i : A' \to A''$ l'isogénie universelle au dessus de C_i où A' et A'' désignent l'image inverse par p_1 et p_2 du schéma abélien universel A. Elle induit une application $\mathcal{O}_B$-linéaire

$$\pi_i^\star \;:\; e^\star\,\Omega^1_{A''/X} \;\longrightarrow\; e^\star\,\Omega^1_{A'/X}$$

et donc aussi une application

$$\pi_i^\star \;:\; F \cdot e^\star\,\Omega^1_{A''/X} \;\longrightarrow\; F \cdot e^\star\,\Omega^1_{A'/X}$$

Au dessus de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ le nombre premier p est inversible et les applications $\pi_i^\star$ sont des isomorphismes. Il en résulte qu'on dispose d'un isomorphisme inverse

$$(\pi_i^\star)^{-1} \;:\; p_1^\star\,\mathcal{T} \longrightarrow p_2^\star\,\mathcal{T}$$

et donc d'applications $(\pi_i^\star)^{-1} : p_2^\star\,\omega^\kappa \to p_1^\star\,\omega^\kappa$ pour tout $\kappa \in X(\mathrm{T_M})^+$. Soit V un ouvert de X_{Iw}^{rig}. Posons $V' = U_i(V)$. On note $\tilde{U}_i$ l'application composée

$$\mathrm{H}^0(V',\,\omega^\kappa) \longrightarrow \mathrm{H}^0(p_1^{-1}(V),\,p_2^\star\,\omega^\kappa) \xrightarrow{(\pi_i^\star)^{-1}} \mathrm{H}^0(p_1^{-1}(V),\,p_1^\star\,\omega^\kappa) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{p_1}} \mathrm{H}^0(V,\,\omega^\kappa)\,.$$

On a une définition analogue en prenant pour source et but $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$. Soit n_i l'entier égal à $a_i \cdot b_i$ dans le cas (A) et à $a_i(a_i+1)/2$ dans le cas (C). On note

$$U_i \;=\; \frac{\tilde{U}_i}{p^{n_i}}$$

qui est un opérateur de Hecke agissant sur l'espace des formes classiques $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K), \omega^\kappa)$ ainsi que sur l'espace des formes surconvergentes $\mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\kappa)^\dagger$. La normalisation par le facteur p^{n_i} vise à optimiser l'intégralité du morphisme Tr_{p_1} au dessus du tube ordinaire-multiplicatif $X_{\mathrm{Iw}}(0)$.

Remarque 2.3.1. — Explicitons l'opérateur U_i dans le cas (A). Soit f une section du faisceau ω^κ vue comme fonction sur les sextuplets $\big(A,\lambda,\iota,\eta,K_\bullet,(\omega_k^+ \oplus \omega_k^-)_{1\leqslant k\leqslant d}\big)$. Localement pour la topologie étale, la trace du morphisme p_1 est une somme et on a

$$U_i(f)\Big(\big(A,\lambda,\iota,\eta,K_\bullet,(\omega_i^+ \oplus \omega_i^-)\big)\Big) = \frac{1}{p^{n_i}} \sum_{L\subset A[p] \text{ de type } U_i} f\Big(\big(A/L,\lambda',\iota',\eta',K'_\bullet,(\omega_k'^+ \oplus \omega_k'^-)\big)\Big)$$

où $(\omega_k'^+ \oplus \omega_k'^-)$ est donné par la règle $\pi^\star\,\omega_k' = \omega_k$ pour $\pi : A \to A/L$ la projection et où λ', ι' et $K'_\bullet$ désigne les structures induites par λ, ι et $K_\bullet$ sur A/L.

3. Dynamique d'un opérateur de Hecke

Nous montrons que les itérations successives d'un opérateur de Hecke tendent à accumuler les points de X_{Iw}^{rig} sur $X_{\mathrm{Iw}}(0)$. Pour simplifier les notations, on préfère décrire d'abord la dynamique au niveau des champs de groupes de Barsotti-Tate.

3.1. Sur les champs de BT. — Commençons par traiter le cas non polarisé. Soient $l \leqslant m$ deux entiers positifs. Rappelons qu'on dispose pour toute extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$ de l'opérateur de Hecke U qui agit sur $\mathcal{P}(\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'}))$ et d'une application degré $\delta : \mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'}) \to [0,l]$ qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme d'un objet de $\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})$. Il est clair que l'opérateur U stabilise le sous-ensemble

$$\mathcal{P}(\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})) \;\subset\; \mathcal{P}(\mathrm{BT}_{m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'}))\,.$$

Les résultats qui suivent sont directement inspirés de [**Pi**].

Proposition 3.1.1. — *Soit x un point de $\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})$ et $y \in U(\{x\})$. On a $\delta(y) \geqslant \delta(x)$.*

Démonstration. — Soient $H_{l,x}$ et $H_{l,y}$ les deux sous-groupes finis et plats de rang p^l sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K'})$ correspondants à x et y. L'isogénie canonique entre G_x et G_y induit un morphisme de $H_{l,x}$ vers $H_{l,y}$ qui est un isomorphisme en fibre générique. D'après [**Fa1**, coro. 3], on a $\deg(H_{l,y}) \geqslant \deg(H_{l,x})$. $\square$

Proposition 3.1.2. — *Soit $x \in \hat{\mathrm{BT}}_{l,m}(\mathcal{O}_{K'})$ qui correspond à $(G, H_\bullet)$. Supposons qu'il existe un point $y \in U(x)$ tel que $\delta(x) = \delta(y)$. Alors H_l est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un et $G[p]$ est somme directe de H_l et d'un autre groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un. En particulier, $\delta(x)$ est entier.*

Démonstration. — Par définition de l'opérateur U, il existe un sous-groupe $L \subset G[p]$ fini et plat de rang p^{m-l} sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K'})$ tel que $G_{K'}[p] = H_{l,K'} \oplus L_{K'}$ et que y corresponde au couple $(G/L, \pi(H_\bullet))$ où π désigne la projection canonique de G sur G/L et l'image est prise au sens schématique. Comme $\delta(x) = \delta(y)$, le morphisme $H_l \to \pi(H_l)$ qui est un isomorphisme générique est un isomorphisme sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K'})$ [**Fa1**, coro. 3]. Le morphisme $H_l \times L \to G[p]$ qui est un isomorphisme en fibre générique induit une égalité générique entre les sous-groupes $\pi(H_l)$ et $G[p]/L$ de G/L. Par adhérence schématique dans G/L, on en déduit l'égalité de $\pi(H_l)$ et $G[p]/L$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K'})$. On obtient donc $\deg(H_l) = l - \deg(L)$. Cette égalité de degrés implique que $H_l \times L \to G[p]$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K'})$. En particulier, H_l et L sont des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon un. Le degré de H_l est entier d'après [**Pi**, lem. 2.1]. □

Le cas polarisé se traite exactement de la même manière ; les détails sont d'ailleurs expliqués dans [**Pi**, th. 3.1]. Contentons-nous d'exposer les résultats. Soient l un entier et

$$x \in \hat{\mathrm{BT}}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}}(\mathcal{O}_{K'})$$

correspondant à $(G, H_\bullet)$.

Proposition 3.1.3. — *Pour tout $y \in U(\{x\})$ on a $\delta(y) \geqslant \delta(x)$. En cas d'égalité, H_l est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un et $G[p]$ est somme directe de H_l et d'un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un ; les deux facteurs de cette somme directe sont totalement isotropes et $\delta(x)$ est entier.*

3.2. Sur les variétés de Shimura. — On traite indifféremment le type (A) ou (C). On dispose pour $1 \leqslant i \leqslant d$ de l'opérateur de Hecke U_i qui agit sur les ouverts rigides de

$$X^{rig}_{\mathrm{Iw}}$$

en stabilisant le tube ordinaire-multiplicatif $X_{\mathrm{Iw}}(0)$. Nous avons défini l'application degré

$$\delta \ : \ X^{rig}_{\mathrm{Iw}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{d} [0, a_i]$$

et noté $\delta_i : X^{rig}_{\mathrm{Iw}} \to [0, a_i]$ sa i-ème composante. La proposition suivante généralise [**Pi**, prop. 2.5].

Proposition 3.2.1. — *Soient $1 \leqslant i \leqslant d$ et $0 \leqslant n_i \leqslant a_i$ des entiers et $0 < \eta_i \leqslant \nu_i < 1$ des réels. Il existe un entier N tel que l'itéré U_i^N de U_i vérifie*

$$U_i^N \left(\delta_i^{-1}\left([a_i - n - \nu_i, a_i]\right)\right) \subset \delta_i^{-1}\left([a_i - n - \eta_i, a_i]\right) .$$

Démonstration. — On peut toujours supposer η_i et ν_i dans $\mathbb{Q}$. L'ouvert

$$V = \delta_i^{-1}\left([a_i - n - \nu_i, a_i - n - \eta_i]\right)$$

de X_{Iw}^{rig} est quasi-compact donc $p_1^{-1}(V) \subset C_{i,a_i}^{\mathrm{rig}}$ aussi. La fonction sur $p_1^{-1}(V)$ qui a un point u associe $\delta_i(p_2(u)) - \delta_i(p_1(u))$ est la valuation d'une fonction analytique donc atteint son minimum ε d'après le principe du maximum. Les propositions **3.1.2** et **3.1.3** impliquent $\varepsilon > 0$. Ainsi, pour tout $x \in V$ et $y \in U_i(\{x\})$ on a $\delta_i(y) \geqslant \delta_i(x)+\varepsilon$. On en déduit aisément le résultat. □

Rappelons que les différents opérateurs U_i avec i variable commutent deux à deux et que U_i préserve la fonction δ_j si $i \neq j$.

Corollaire 3.2.2. — *Pour tout i, soit $n_i \in [0, a_i]$ un entier et $0 < \eta_i \leqslant \nu_i < 1$ des réels. Notons $n = (n_i)_i$, $\eta = (\eta_i)_i$ et $\nu = (\nu_i)_i$. Il existe un entier N tel que*

$$\left(\prod_{i=1}^{d} U_i\right)^N (X_{\mathrm{Iw}}(n+\nu))) \subset X_{\mathrm{Iw}}(n+\eta)\,.$$

4. Géométrie de la fibre spéciale

4.1. Stratification de Kottwitz—Rapoport. — Les champs $\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et

$$\hat{\mathrm{BT}}_{l,\mathrm{Iw}}^{\mathrm{pol}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

sont munis d'une stratification de Kottwitz–Rapoport qui provient de la théorie du modèle local. Nous nous contenterons de rappeler la définition de cette stratification dans le cas non polarisé. En effet, nous aurons à démontrer une formule de p-rang uniquement dans ce cas (*cf.* paragraphe suivant). Dans le cas polarisé, la formule de p-rang est due à Genestier et Ngô [**GN**]. Soient $l \leqslant m$ deux entiers et t une indéterminée. Considérons la matrice γ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ t-p & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_m\left(\mathbb{Z}_p[t, t^{-1}, (t-p)^{-1}]\right)$$

et notons $\mathcal{V}_i = \gamma^i \cdot \mathbb{Z}_p[t]$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$. On obtient une chaîne de $\mathbb{Z}_p[t]$-modules

$$\mathcal{V}_0 \supset \mathcal{V}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{V}_m = (t-p)\cdot\mathcal{V}_0\,.$$

On définit le modèle local $\mathcal{M}_{l,m}$ comme le foncteur qui à tout schéma S sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ associe l'ensemble des diagrammes de $\mathcal{O}_S[t]$-modules

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_{0,S} & \supset & \mathcal{V}_{1,S} & \supset & \cdots & \supset & \mathcal{V}_{m,S} = (t-p)\cdot\mathcal{V}_{0,S} \\ \cup & & \cup & & & & \cup \\ \mathcal{L}_0 & \supset & \mathcal{L}_1 & \supset & \cdots & \supset & \mathcal{L}_m = (t-p)\cdot\mathcal{L}_0 \\ \cup & & \cup & & & & \cup \\ t\cdot\mathcal{V}_{0,S} & \supset & t\cdot\mathcal{V}_{1,S} & \supset & \cdots & \supset & t\cdot\mathcal{V}_{m,S} \end{array}$$

tels que $\mathcal{L}_j/t\cdot\mathcal{V}_{j,S}$ est un sous-$\mathcal{O}_S$-module localement facteur direct de rang l de $\mathcal{V}_{j,S}/t\cdot\mathcal{V}_{j,S}$ pour tout $j \leqslant m$. Il est facile de voir que $\mathcal{M}_{l,m}$ est représentable par un schéma projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. De plus, la fibre spéciale $\mathcal{M}_{l,m} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ est naturellement un sous-schéma fermé de type fini de la variété de drapeaux affine associée au groupe $\mathrm{GL}_{m,\mathbb{Q}_p}$ et au sous-groupe d'Iwahori I^- relatif au sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires inférieures. Ce sous-schéma fermé est stable sous l'action de I^- sur la variété de drapeaux affine. On appelle stratification de Kottwitz–Rapoport sur $\mathcal{M}_{l,m} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ l'image inverse de la stratification de Schubert affine sur la variété de drapeaux affine. Notons μ_l le copoids minuscule du tore diagonal de GL_m qui à $z \in \mathbb{G}_m$ associe

$$(z, \cdots, z, 1, \cdots, 1)$$

où z est répété l fois et 1 est répété $m-l$ fois. Rappelons que le groupe de Weyl affine étendu $\widetilde{W}_m$ du groupe $\mathrm{GL}_{m,\mathbb{Q}_p}$ est canoniquement isomorphe au produit semi-direct

$$\mathbb{Z}^m \rtimes \mathfrak{S}_m \, .$$

Les différentes strates de Kottwitz–Rapoport de

$$\mathcal{M}_{l,m} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

sont indexées par le sous-ensemble fini $W_{l,m}$ formé des éléments μ_l-admissibles de $\widetilde{W}_m$ dans le sens de [**KR**]. Les relations d'incidence entre strates sont codées par l'ordre de Bruhat sur

$$\widetilde{W}_m \, .$$

Notons $\ell : W_{l,m} \to \mathbb{N}$ la restriction de la fonction longueur. Pour tout $w \in W_{l,m}$ la strate de Kottwitz–Rapoport associée à w est isomorphe à l'espace affine

$$\mathbb{A}^{\ell(w)}_{\mathbb{F}_p} \, .$$

En particulier, elle est lisse de dimension $\ell(w)$.

Par abus de notation, désignons toujours par I^- le schéma en groupes de Bruhat–Tits lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et d'ensemble de $\mathbb{Z}_p$-points le sous-groupe d'Iwahori inférieur. Notons $[\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-]$ le champ quotient du modèle local par ce schéma en groupes. C'est un champ algébrique d'Artin. Le morphisme

$$\mathcal{M}_{l,m} \longrightarrow [\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-]$$

est un I^--torseur donc représentable et lisse. La stratification de Kottwitz–Rapoport est équivariante sous I^- donc descend en une stratification de la fibre spéciale $[\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-] \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Par ailleurs, il existe un morphisme de champs sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$

$$\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \longrightarrow [\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-]$$

qui à un S-point $(G, H_\bullet)$ associe le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{H}_0 & \supset & \mathcal{H}_1 & \supset & \cdots & \supset & \mathcal{H}_m = (t-p)\cdot\mathcal{H}_0 \\
\cup & & \cup & & & & \cup \\
\mathcal{L}_0 & \supset & \mathcal{L}_1 & \supset & \cdots & \supset & \mathcal{L}_m = (t-p)\cdot\mathcal{L}_0 \\
\cup & & \cup & & & & \cup \\
t\cdot\mathcal{H}_0 & \supset & t\cdot\mathcal{H}_1 & \supset & \cdots & \supset & t\cdot\mathcal{H}_m
\end{array}$$

où $\mathcal{H}_j = \mathbb{D}(G/H_j)_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t]$ et $\mathcal{L}_j$ est l'image inverse de $\omega_{G/H_j} \subset \mathbb{D}(G/H_j)_S$ par la surjection $\mathcal{H}_j \twoheadrightarrow \mathbb{D}(G/H_j)_S$ qui envoie t sur 0. Dans ces formules, $\mathbb{D}(G/H_j)_S$ désigne l'évaluation en S du cristal de Dieudonné contravariant du groupe de Barsotti-Tate G/H_j. Le diagramme précédent définit bien un point du champ $[\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-]$ car d'après [**dJ**, 3.6], les chaînes $\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{H}_m$ et $\mathcal{V}_{0,S} \supset \mathcal{V}_{1,S} \supset \cdots \supset \mathcal{V}_{m,S}$ sont localement isomorphes pour la topologie de Zariski.

On obtient par image inverse une stratification de $\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. On l'appelle encore stratification de Kottwitz–Rapoport. Elle est paramétrée par l'ensemble fini $W_{l,m}$. On note Z_w

la strate associée à $w \in W_{l,m}$. Le morphisme $Z_w \hookrightarrow \hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ est représentable par une immersion localement fermée. Comme le morphisme

$$\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \longrightarrow [\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-] \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

est surjectif d'après [**H2**, 13.1], la strate Z_w n'est pas vide lorsque $w \in W_{l,m}$. Le morphisme

$$\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \longrightarrow [\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-] \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

se factorise par le champ $\hat{\mathrm{BT}}^1_{l,m,\mathrm{Iw}}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$ des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1 de dimension l, hauteur m munis d'une structure de niveau iwahorique ; ce champ est algébrique au sens d'Artin. Contrairement au cas de $\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, il n'y a aucune ambiguité à parler de la dimension de sous-champs localement fermés de $\mathrm{BT}^1_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Le champ

$$\hat{\mathrm{BT}}^1_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

est lui aussi muni d'une stratification de Kottwitz–Rapoport. Notons Z^1_w associée à $w \in W_{l,m}$. Elle est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ de dimension pure $\ell(w)$.

Toute notre discussion se transpose sans peine au cas polarisé. Nous renvoyons le lecteur à [**GN**] pour plus de détails. Disons juste quelques mots sur les nouvelles notations à adopter dans ce cas. Le groupe de Weyl affine étendu

$$\widetilde{W}^{\mathrm{pol}}_l$$

de $\mathrm{GSp}_{2l,\mathbb{Q}_l}$ est canoniquement isomorphe à

$$(\mathbb{Z}^l \times \mathbb{Z}) \rtimes \Big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \mathfrak{S}_l\Big)$$

où $\mathfrak{S}_l$ agit par permutations sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ et sur $\mathbb{Z}^l$, où $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ agit par changement de signe sur $\mathbb{Z}^l$ et où $\mathfrak{S}_l$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ agissent trivialement sur $\mathbb{Z}$. Le copoids minuscule μ_l envoie $z \in \mathbb{G}_m$ sur $(z, \cdots, z, 1, \cdots, 1)$ où z est répété l fois. La strate de Kottwitz–Rapoport de

$$\hat{\mathrm{BT}}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

associée à un élement μ_l-admissible $w \in W^{\mathrm{pol}}_l$ est notée Z^{pol}_w et la strate correspondante du champ des Barsotti-Tate principalement polarisés tronqués d'échelon 1

$$\hat{\mathrm{BT}}^{\mathrm{pol},1}_{l,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

est notée $Z^{\mathrm{pol},1}_w$. Elle est lisse de dimension $\ell(w)$ où $\ell : W^{\mathrm{pol}}_l \to \mathbb{N}$ est la restriction de la fonction longueur.

4.2. Une formule de p-rang. — Calculons les rangs étales et multiplicatifs du groupe de Barsotti-Tate universel sur chaque strate de Kottwitz–Rapoport.

4.2.1. Cas non polarisé. — Soit S le spectre d'un corps de caractéristique p et G un groupe de Barsotti-Tate sur S correspondant à un S-point de $\hat{\mathrm{BT}}_{l,m}$. Le groupe G admet une sous-groupe multiplicatif maximal G^{m} et un quotient étale maximal G^{et}. Notons $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(G)$ la hauteur de G^{m} et $\mathrm{rg}_{\mathrm{et}}(G)$ celle de G^{et}. On appelle ces quantités rangs multiplicatifs et étales de G. On a bien sûr $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(G) \leqslant l$ et $\mathrm{rg}_{\mathrm{et}}(G) \leqslant m - l$. Ces deux inégalités sont des égalités si et seulement si G est ordinaire. Lorsque S est un schéma quelconque sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et G un groupe de Barsotti-Tate sur S correspondant à un S-point de $\hat{\mathrm{BT}}_{l,m}$ on obtient deux fonctions semi-continues inférieurement

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg_m}(G) & : & S \longrightarrow [0,l] \\ \mathrm{rg_{et}}(G) & : & S \longrightarrow [0,m-l]\,. \end{array}$$

Le groupe de Barsotti-Tate universel permet de définir deux telles fonctions sur $\hat{\mathrm{BT}}_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Nous allons prouver que ces fonctions sont constantes sur chaque strate Z_w et donner explicitement leur valeur en fonction de $w \in W_{l,m}$. Il s'agit d'une généralisation immédiate de résultats de Genestier et Ngô [**GN**] traitant le cas polarisé.

Définition 4.2.2. — Soit $w \in W_{l,m} \subset \mathbb{Z}^m \rtimes \mathfrak{S}_m$. Écrivons $w = T \times \sigma$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et $T \in \mathbb{Z}^m$. Soit $\{e_k\}$ la base standard de $\mathbb{Z}^m$. Posons $T = \sum_k \gamma_k \cdot e_k$ avec $\gamma_k \in \mathbb{Z}$. Comme w est μ_l-admissible, on a $\gamma_k \in \{0,1\}$ pour tout k et $\sum_k \gamma_k = l$. On dispose ainsi d'une partition de $\{1, \cdots, m\}$ en $I \coprod J$ où I est l'ensemble des indices k tels que $\gamma_k = 1$. L'ensemble I est de cardinal l et l'ensemble J de cardinal $m-l$. On définit l'entier $\mathrm{rg_m}(w)$ comme le nombre de points fixes de σ dans I et l'entier $\mathrm{rg_{et}}(w)$ comme le nombre de points fixes de σ dans J.

Proposition 4.2.3. — *Soit $w \in W_{l,m}$. La fonction* $\mathrm{rg_m}$ *est constante égale à* $\mathrm{rg_m}(w)$ *sur la strate Z_w. De même, la fonction* $\mathrm{rg_{et}}$ *est constante égale à* $\mathrm{rg_{et}}(w)$ *sur Z_w.*

Démonstration. — Soit $(G, H_\bullet)$ un $\bar{\mathbb{F}}_p$-point de Z_w. Pour tout $j \leqslant m$, notons $\mathcal{H}_j = \mathbb{D}(G/H_j)_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[t]$ et appelons $\mathcal{L}_j$ l'image inverse de $\omega_{G/H_j} \subset \mathbb{D}(G/H_j)_S$ par la surjection $\mathcal{H}_j \twoheadrightarrow \mathbb{D}(G/H_j)_S$ qui envoie t sur 0. Pour tout $j \geqslant 1$, on a $\omega_{H_j/H_{j-1}} = \mathcal{L}_j/(t\mathcal{H}_j + \mathcal{L}_{j-1})$. On en déduit que H_j/H_{j-1} est étale si et seulement si $\mathcal{L}_j/\, t\mathcal{H}_j$ s'injecte dans $\mathcal{L}_{j-1}/\, t\mathcal{H}_{j-1}$. Par dualité, on en déduit que H_j/H_{j-1} est multiplicatif si et seulement si $\mathcal{L}_{j-1} \not\subset \mathcal{H}_j$. On en déduit que les rangs étale et multiplicatif sont constants sur les fibres de $\mathrm{BT}_{l,m,\mathrm{Iw}} \to [\mathcal{M}_{l,m}/\mathrm{I}^-]$ donc constants sur Z_w. Rappelons qu'il existe une manière canonique de relever $w \in W_{l,m}$ en un élément $\tilde{w} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_p((t)))$ [**GN**, p. 1673]. La matrice $\tilde{w}$ est caractérisée par le fait de stabiliser l'ensemble des vecteurs $t^\gamma \cdot e_k$, où $\gamma \in \mathbb{Z}$ et $\{e_k\}$ est la base standard de $\mathbb{F}_p((t))^m$. Notons $\mathcal{L}'_\bullet = \tilde{w} \cdot \mathcal{V}_{\bullet,\bar{\mathbb{F}}_p}$. Cette chaîne de $\bar{\mathbb{F}}_p[t]$-modules définit un $\bar{\mathbb{F}}_p$-point de $\mathcal{M}_{l,m}$ qui se trouve sur la strate de Kottwitz–Rapoport indexée par w. Pour calculer le rang étale (*resp.* multiplicatif) sur Z_w, il suffit de compter le nombre d'indices $1 \leqslant j \leqslant m$ tels que $\mathcal{L}'_j/\, t\mathcal{V}_{j,\bar{\mathbb{F}}_p}$ s'injecte dans $\mathcal{L}'_{j-1}/\, t\mathcal{V}_{j-1,\bar{\mathbb{F}}_p}$ (*resp.* $\mathcal{L}'_{j-1} \not\subset \mathcal{V}_{j,\bar{\mathbb{F}}_p}$). Mais la chaîne $\mathcal{L}'_\bullet$ vérifie que pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, il existe un unique vecteur parmi ceux de la forme $t^\gamma e_k$ qui appartient à $\mathcal{L}'_{j-1}$ mais pas à $\mathcal{L}'_j$. De plus, ce vecteur est $\tilde{w}(e_j)$. Ainsi, le rang étale est le nombre d'indices $1 \leqslant j \leqslant m$ tels que $\tilde{w}(e_j) = t \cdot e_j$ [**GN**, p. 1678], donc le nombre de t sur la diagonale de la matrice $\tilde{w}$. Il est facile de voir que ce nombre est égal à $\mathrm{rg_{et}}(w)$. En effet, avec les notations de la définition **4.2.2**, pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$ on a $\gamma_k = 0$ si l'unique entrée non nulle de la k-ième colonne de $\tilde{w}$ est égale à t et $\gamma_k = 1$ si cette entrée est égale à 1. Le nombre de t sur la diagonale de $\tilde{w}$ est donc égal au nombre de points fixes de σ dans J, la matrice de permutation σ étant obtenue en posant $t = 1$ dans $\tilde{w}$. De même, le rang multiplicatif est égal au nombre de 1 sur la diagonale $\tilde{w}$ donc à $\mathrm{rg_m}(w)$. □

Corollaire 4.2.4. — *Soit $w = T \times \sigma \in W_{l,m}$ et $(G, H_\bullet)$ un $\bar{\mathbb{F}}_p$-point de Z_w. Le nombre de quotients H_i/H_{i-1} étales ou multiplicatifs est égal au nombre de points fixes de σ agissant sur $\{1, \cdots, m\}$.*

On en déduit le corollaire suivant en utilisant la définition de la μ_l-admissibilité.

Corollaire 4.2.5. — *Le lieu ordinaire de* $\hat{\mathrm{BT}}^1_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *est l'union des strates* Z^1_w *correspondant aux élements de translation* $w = (y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id}$ *avec* $y \in \mathfrak{S}_m$. *En particulier, ce lieu ordinaire est dense.*

La démonstration du corollaire suivant nous a été communiquée par Görtz.

Corollaire 4.2.6. — *Les strates* Z^1_w *de codimension un dans* $\hat{\mathrm{BT}}^1_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *sont exactement les strates associées aux élements* $w \in W_{l,m}$ *tels que* $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(w) + \mathrm{rg}_{\mathrm{et}}(w) = m - 2$.

Démonstration. — Soit w paramétrant une strate de Kottwitz–Rapoport de codimension un. Cette strate est dans l'adhérence d'une strate de codimension zéro associée à un élément $(y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id}$ avec $y \in \mathfrak{S}_m$. Il existe donc des expressions réduites

$$\begin{array}{rcl} (y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id} & = & s_1 \cdots s_k \\ w & = & s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_k \end{array}$$

où $k = \ell((y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id}) = l(m-l)$, où les $s_\bullet$ sont des réflexions simples de $\widetilde{W}_m$ et où comme d'habitude, le chapeau veut dire que l'on a enlevé la lettre correspondante de l'expression. On a

$$\begin{array}{rcl} w & = & s_1 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_2 s_1 s_1 s_2 \cdots s_k \\ & = & (s_1 \cdots s_{j-1}) s_j (s_1 \cdots s_{j-1})^{-1} \cdot ((y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id}) \end{array}$$

Notons $\tau \in \mathfrak{S}_m$ la permutation image de $(s_1 \cdots s_{j-1}) s_j (s_1 \cdots s_{j-1})^{-1}$ par la surjection

$$\widetilde{W}_m \longrightarrow \mathfrak{S}_m \, .$$

Comme l'image de chaque s_i dans $\mathfrak{S}_m$ est une transposition ou l'identité, τ est une transposition ou l'identité de $\mathfrak{S}_m$. La permutation τ est égale à la partie vectorielle de w. Si on avait $\tau = \mathrm{Id}$, l'élément w serait un élément de translation et d'après le corollaire **4.2.5**, la strate de Kottwitz–Rapoport paramétrée par w serait de codimension 0. Comme cela contredit notre hypothèse, on en conclut que τ est une transposition non triviale de $\mathfrak{S}_m$. Elle a donc exactement $m-2$ points fixes, ce qui suffit à conclure d'après le corollaire **4.2.4**. Inversement, toute strate paramétrée par $w \in W_{l,m}$ tel que $\mathrm{rg}_{\mathrm{m}}(w) + \mathrm{rg}_{\mathrm{et}}(w) = m - 2$ est de codimension un dans

$$\hat{\mathrm{BT}}^1_{l,m,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

puisque son image dans le champ $\hat{\mathrm{BT}}^1_{l,m} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon un de dimension l et de hauteur m est de codimension un d'après [**Oo**]. □

Remarque 4.2.7. — En fait, sur les strates de Kottwitz–Rapoport de codimension un, le couple formé du rang étale et du rang multiplicatif ne peut être égal qu'à $(m-l-1, l-1)$. Cela résulte simplement du corollaire **4.2.6** et de la classification de Dieudonné-Manin des groupes de Barsotti-Tate sur un corps algébriquement clos.

4.2.8. Cas polarisé. — Si G est un groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé sur $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, son rang étale et son rang multiplicatif sont égaux. On appelle usuellement p-rang cette quantité commune. Le p-rang est constant sur les fibres du morphisme d'oubli de la polarisation

$$\hat{\mathrm{BT}}^{\mathrm{pol}}_{l,\mathrm{Iw}} \longrightarrow \hat{\mathrm{BT}}_{2l,l,\mathrm{Iw}}\,.$$

Le corollaire **4.2.4** permet donc de retrouver le résultat principal de [**GN**], à savoir que le p-rang est constant sur la strate de Kottwitz–Rapoport Z^{pol}_w associée à

$$w = T \times \sigma \in W^{\mathrm{pol}}_l \subset (\mathbb{Z}^l \times \mathbb{Z}) \rtimes \Big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \mathfrak{S}_l\Big)$$

et que sa valeur est la moitié du nombre de points fixes de σ agissant sur $\{1, \cdots, 2l\}$. Notons $\mathrm{rg}_p(w)$ ce p-rang.

***Corollaire 4.2.9* (Genestier-Ngô).** — *Le lieu ordinaire de* $\hat{\mathrm{BT}}^{\mathrm{pol},1}_{l,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ *est l'union des strates de Kottwitz–Rapoport correspondant aux élements de translation* $w = (y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id}$ *avec* $y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \mathfrak{S}_l$. *En particulier, ce lieu ordinaire est dense.*

***Corollaire 4.2.10*.** — *Sur les strates* $Z^{\mathrm{pol},1}_w$ *de codimension un dans* $\hat{\mathrm{BT}}^{\mathrm{pol},1}_{l,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$*, le* p*-rang est égal à* $l-1$ *ou à* $l-2$.

Démonstration. — On raisonne comme dans la démonstration du corollaire **4.2.6**. Soit w paramétrant une strate de Kottwitz–Rapoport de codimension un. Cette strate est dans l'adhérence d'une strate de codimension zéro associée à un élément $(y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id}$ avec $y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$. Il existe donc des expressions réduites

$$\begin{aligned} (y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id} &= s_1 \cdots s_k \\ w &= s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_k \end{aligned}$$

avec $k = l(l+1)/2$ et $s_\bullet \in \widetilde{W}^{\mathrm{pol}}_l$ des réflexions simples. On a comme précédemment $w = (s_1 \cdots s_{j-1}) s_j (s_1 \cdots s_{j-1})^{-1} \cdot (y \cdot \mu_l) \times \mathrm{Id}$. Notons $\tau \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l \rtimes \mathfrak{S}_l \subset \mathfrak{S}_{2l}$ la permutation correspondant à $(s_1 \cdots s_{j-1}) s_j (s_1 \cdots s_{j-1})^{-1}$. C'est une permutation de $\mathfrak{S}_{2l}$ qui commute avec l'involution $i \mapsto 2l - i$. Il y a deux cas à distinguer. Dans le premier cas, τ stabilise le sous-ensemble $\{1, \cdots, l\}$ de $\{1, \cdots, 2l\}$. La restriction de τ à $\{1, \cdots, l\}$ est alors une transposition, τ a $2l-4$ points fixes et le p-rang est égal à $l-2$ sur la strate paramétrée par w. Dans le second cas, τ est une transposition de $\{1, \cdots, 2l\}$ de la forme $(i_0, 2l - i_0)$. Elle a donc 2 points fixes et le p-rang est égal à $l-1$ sur la strate paramétrée par w. $\square$

***Remarque 4.2.11*.** — Le lecteur remarquera la différence avec le corollaire **4.2.6**. Le cas polarisé est plus compliqué que le cas non polarisé car le p-rang peut chuter de 2 en codimension un. Précisons que grâce à [**Oo**], on peut raffiner l'énoncé du corollaire **4.2.10** en prouvant que toutes les strates de Kottwitz–Rapoport de p-rang $l-1$ sont de codimension un. Par contre, seules certaines strates de p-rang $l-2$ sont de codimension un, les autres étant de codimension deux. Le lecteur consultera [**Pi**] pour une description explicite de ce phénomène lorsque $l = 2$.

4.3. Des ouverts de la fibre spéciale. — Nous allons définir des sous-schémas localement fermés de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ comme intersections de strates de Kottwitz–Rapoport et d'Ekedahl–Oort.

4.3.1. Le cas (A). — Ce cas est plus simple car nous n'utiliserons pas la stratification d'Ekedahl–Oort. Notons

$$W = \prod_{i=1}^{d} W_{a_i,\, a_i+b_i}$$

qui est un sous-ensemble fini du groupe de Weyl étendu de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$. À tout $w \in W$ correspond une strate de Kottwitz–Rapoport Z_w de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Lorsque $w = (w_i)_i$, cette strate est définie comme l'image inverse du produit

$$\prod_{i=1}^{d} Z_{w_i}$$

de strates de Kottwitz–Rapoport de $\prod_{i=1}^{d} \hat{\mathrm{BT}}_{a_i, a_i+b_i, \mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ par le morphisme

$$\mathfrak{P} \,:\, X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi) \longrightarrow \prod_{i=1}^{d} \hat{\mathrm{BT}}_{a_i, a_i+b_i, \mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)\,.$$

Notons W^0 le sous-ensemble de W formé des w tels que Z_w soit de codimension zéro dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Ainsi, $w = (w_i)_i \in W$ est dans W^0 si et seulement si w_i est un élément de translation de $W_{a_i,\, a_i+b_i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. D'après le corollaire **4.2.5**, le lieu ordinaire de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ est exactement l'union des strates Z_w pour $w \in W^0$. Il est dense dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$.

Notons W^1 le sous-ensemble de W formé des w tels que Z_w soit de codimension un dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. D'après le corollaire **4.2.6** et la remarque **4.2.7**, l'union des strates Z_w pour $w \in W^1$ est exactement le lieu de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ où le rang multiplicatif du groupe de Barsotti-Tate universel $\prod_i G_i$ défini dans la partie **1.3** est égal à $-1 + \sum_i a_i$ et son rang étale est égal à $-1 + \sum_i b_i$. L'union des strates Z_w pour $w \in W^0 \cup W^1$ est un ouvert de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ dont la dimension du complémentaire est deux.

4.3.2. Le cas (C). — Commençons par quelques rappels sur les groupes de Barsotti-Tate principalement polarisés de dimension deux.

4.3.2.1. BT supergénéraux. — Soit G un groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé tronqué d'échelon un de dimension deux sur $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Rappelons que le a-nombre $\mathrm{a}(G)$ de G est la dimension

$$\mathrm{a}(G) \;=\; \dim_{\bar{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Hom}(\alpha_p\,, G)\,.$$

On a $\mathrm{a}(G) \leqslant 2$. Supposons désormais G de p-rang nul. Alors $\mathrm{a}(G)$ vaut un ou deux. On dit que G est superspécial si $\mathrm{a}(G) = 2$ et supergénéral si $\mathrm{a}(G) = 1$. Notons $\mathcal{E}$ le groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ égal au groupe des points de p-torsion de n'importe quelle courbe elliptique supersingulière sur $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. La proposition suivante se vérifie par un calcul direct sur les modules de Dieudonné [**Pi**, par. 4.2.2.1].

Proposition 4.3.2.2. — *Il existe une unique strate Z de Kottwitz–Rapoport de $\hat{\mathrm{BT}}_2^{\mathrm{pol},1} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ de codimension un telle que le groupe de Barsotti-Tate universel G soit de p-rang nul. La restriction à Z du sous-groupe fini et plat universel H_2 de $G[p]$ a toutes ses fibres géométriques isomorphes à $\mathcal{E}$. Le lieu supergénéral Z^{sg} de Z est un ouvert dense. La codimension dans*

$$\hat{\mathrm{BT}}_2^{\mathrm{pol},1} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$$

du lieu superspécial Z^{ss} de Z est égale à 2.

Remarque 4.3.2.3. — Le sous-schéma Z^{sg} est l'intersection d'une strate de Kottwitz–Rapoport et d'une strate d'Ekedahl–Oort.

Proposition 4.3.2.4. — *Soit G un groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé tronqué d'échelon un de dimension deux et de p-rang nul sur* $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. *Supposons G supergénéral. Alors G est un objet indécomposable de la catégorie des groupes finis et plats sur* $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$.

Démonstration. — Si G s'écrivait sous la forme $G' \times G''$ avec G' et G'' des groupes finis et plats bi-infinitésimaux sur $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$, on aurait $\mathrm{a}(G) > 1$. □

La proposition suivante est due à Fargues.

***Proposition 4.3.2.5* (Fargues).** — *Soit S un schéma où p est localement nilpotent ou bien un schéma formel p-adique. Soit H un groupe fini et plat tué par p sur S. Soit S^{red} le schéma réduit sous-jacent à S. Si la restriction de H à S^{red} est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur S^{red}, alors H est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur S.*

Démonstration. — Désignons par H_0 et S_0 les réductions modulo p de H et S. Par définition, H est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur S si et seulement si H_0 est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur S_0, et cette dernière condition signifie que $\mathrm{Im}(F_{G_0}) = \mathrm{Ker}(V_{G_0})$ comme faisceaux fppf sur S_0. Il résulte alors du critère de platitude fibres à fibres [**EGA4**, 11.3.10] que le morphisme de présentation finie $F : G_0 \to \mathrm{Ker}(V_{G_0})$ est fidèlement plat si et seulement si sa restriction à S^{red} l'est. Ceci permet de conclure. □

Le corollaire suivant sera crucial pour nous. Il a été originellement prouvé dans [**Pi**, prop. A.4] et résulte également de la proposition **4.3.2.5**. Rappelons que d'après [**Pi**, lem. 2.1], le degré d'un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est égal à sa dimension.

Corollaire 4.3.2.6. — *Soit H un groupe fini et plat de rang 2 sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ de fibre spéciale isomorphe à $\mathcal{E}$. Alors H est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. En particulier, son degré est égal à 1.*

4.3.2.7. Définition des sous-schémas. — Nous pouvons à présent définir dans le cas (C) les sous-schémas localement fermés de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ qui joueront le rôle des sous-schémas définis dans la partie **4.3.1** dans le cas (A).

Notons $W = \prod_{i=1}^{d} W_{a_i}^{\mathrm{pol}}$ qui est un sous-ensemble fini du groupe de Weyl affine étendu de $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On définit comme dans la partie **4.3.1** une strate de Kottwitz–Rapoport Z_w de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ pour tout $w \in W$.

Notons W^0 le sous-ensemble de W formé des w tels que Z_w soit de codimension zéro dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Comme précédemment, $w = (w_i)_i \in W$ est dans W^0 si et seulement si w_i est un élément de translation pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. D'après le corollaire **4.2.9**, le lieu ordinaire de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ est exactement l'union des strates Z_w pour $w \in W^0$. Il est dense dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$.

Notons W^1 le sous-ensemble de W formé des w tels que le p-rang du groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé $\prod_i G_i$ soit égal à $-1 + \sum_i a_i$ sur la strate Z_w. D'après le corollaire **4.2.10**, la strate Z_w est de codimension un dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ lorsque $w \in W^1$.

Notons W^2 le sous-ensemble de W formé des w tels que la strate Z_w soit de codimension un dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ et que le p-rang de $\prod_i G_i$ soit égal à $-2 + \sum_i a_i$ sur Z_w. L'ensemble W^2 est non vide dès que $a_i \geqslant 2$. On peut remarquer que lorsque $w \in W^1 \cup W^2$, il existe un unique indice $1 \leq i \leq d$ tel que G_i ne soit pas ordinaire. D'après le corollaire **4.2.10**, l'union des strates Z_w pour $w \in W^0 \cup W^1 \cup W^2$ est un ouvert de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ dont la codimension du complémentaire est deux. Soit $w \in W^2$. Le dévissage en partie étale, multiplicative et bi-infinitésimale de $\prod_i G_i$ fournit un morphisme lisse

$$Z_w \longrightarrow \hat{\mathrm{BT}}^{\mathrm{pol},1}_{2,\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$$

d'image la strate de Kottwitz–Rapoport Z décrite dans la proposition **4.3.2.2**. On note Z_w^{sg} l'ouvert de Z_w obtenu par image inverse de l'ouvert supergénéral Z^{sg} de Z. On peut également le caractériser comme le lieu de Z_w où le a-nombre de $\prod_i G_i$ est égal à 1. D'après la proposition **4.3.2.2**, le sous-schéma ouvert

$$\coprod_{w \in W^0} Z_w \sqcup \coprod_{w \in W^1} Z_w \sqcup \coprod_{w \in W^2} Z_w^{\mathrm{sg}}$$

de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ a un complémentaire de codimension 2.

5. Prolongement analytique

Dans toute cette partie, $f \in \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}}, \kappa)^{\dagger}$ désigne une forme modulaire surconvergente de poids fixé $\kappa \in X^{+}(\mathrm{T_M})$. Rappelons que dans le cas (A),

$$\kappa = \prod_{i=1}^{d} (k_{i,1} \geqslant \cdots \geqslant k_{i,a_i}\ ,\ l_{i,1} \geqslant \cdots \geqslant l_{i,b_i})$$

est un poids dominant du tore maximal $\mathrm{T_M}$ de $\mathrm{M} = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{GL}_{a_i} \times \mathrm{GL}_{b_i}$. Dans le cas (C),

$$\kappa = \prod_{i=1}^{d} (k_{i,1} \geqslant \cdots \geqslant k_{i,a_i})$$

est un poids dominant du tore maximal $\mathrm{T_M}$ de $\mathrm{M} = \prod_{i=1}^{d} \mathrm{GL}_{a_i}$. On suppose f propre et de pente finie pour U_i pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Cela signifie que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ il existe $\alpha_i \in \bar{K}^{\times}$ tel que $U_i \cdot f = \alpha_i \cdot f$. D'après la normalisation des opérateurs de Hecke, on a $v(\alpha_i) \geqslant 0$ pour tout i où l'on rappelle que v désigne la valuation de $\bar{K}^{\times}$ normalisée par $v(p) = 1$. Posons dans la suite $\alpha = \prod_i \alpha_i$ et $U = \prod_i U_i$ où le produit désigne la composition. Nous allons montrer que si κ est suffisamment grand devant les valuations p-adiques des α_i en un sens que nous préciserons en **5.5.1**, la forme f s'étend en une section du faisceau ω^{κ} sur toute la variété rigide X_{Iw}^{rig}. Remarquons qu'un tel prolongement est nécessairement unique en vertu du principe de prolongement analytique [**Be**, prop. 0.1.13].

5.1. Préliminaires de géométrie rigide. — Regroupons dans ce paragraphe les résultats généraux de géométrie rigide et formelle utilisés dans la suite de l'article.

5.1.1. *Filtration à trois crans sur les schémas formels.* — Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 5.1.2. — *Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma formel localement nœthérien sur* $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$ *d'idéal de définition $\mathfrak{I}$ contenant π. Notons Z_0 le schéma $V(\mathfrak{I})$ et Z^{rig} la fibre générique rigide de $\mathfrak{Z}$. Soit L un schéma en groupes fini et plat sur $\mathfrak{Z}$ qui est de rang étale et multiplicatif constant sur Z_0. Il est muni d'une filtration canonique à trois crans sur $\mathfrak{Z}$ telle que si l'on note L^{m}, L^{b} et L^{e} les gradués ordonnés de telle sorte que $L^{\mathrm{m}} \subset L$ et $L \twoheadrightarrow L^{\mathrm{e}}$, les groupes L^{m}, L^{b} et L^{e} soient finis et plats sur $\mathfrak{Z}$ de réduction respective multiplicative, bi-infinitésimale et étale sur Z_0. Les* *groupes* L^{m}*,* L^{b} *et* L^{e} *sont des Barsotti-Tate tronqués d'échelon un lorsque L est un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un. Le groupe de Barsotti-Tate tronqué* L^{b} *est muni d'une polarisation principale naturelle lorsque L est un groupe de Barsotti-Tate tronqué principalement polarisé. On a dans tous les cas* $\deg(L) = \deg(L^{\mathrm{b}}) + \dim(L^{\mathrm{m}})$ *comme fonction sur* Z^{rig}*. De plus, la formation de* L^{m}*,* L^{b} *et* L^{e} *respecte les immersions fermées : si M est un sous-schéma en groupes fini et plat de L de rang étale et multiplicatif constant alors* M^{m} *est naturellement un sous-schéma en groupes multiplicatif* L^{m}*,* M^{b} *est un sous-schéma en groupes fini et plat de* L^{b} *et* M^{e} *est un sous-schéma en groupes étale de* L^{e}*.*

Démonstration. — On commence par prouver l'existence de la filtration à trois crans sur $\mathfrak{Z}$. L'existence d'un quotient L^{e} qui est fini étale sur $\mathfrak{Z}$ et maximal pour cette propriété résulte immédiatement de [**Me**, lem. II.4.8]. Par dualité de Cartier, on en déduit l'existence de L^{m} et L^{e} finis et plats sur $\mathfrak{Z}$. Les autres assertions sont évidentes, hormis peut-être le fait qu'il existe une immersion fermée de M^{b} dans L^{b}. On utilise pour cela la fonctorialité fournie par [**Me**, lem. II.4.8] qui garantit l'existence d'un morphisme de M^{b} dans L^{b}. Il reste à vérifier que c'est une immersion fermée ce qui résulterait de l'exactitude du complexe de groupes finis et plats

$$0 \to M^{\mathrm{b}} \to L^{\mathrm{b}} \to (L/M)^{\mathrm{b}} \to 0\,.$$

D'après [**Me**, II.4.10], cette exactitude se teste sur les points fermés de Z_0 et elle résulte des propriétés du dévissage des groupes finis et plats sur les corps en partie étale, multiplicative et bi-infinitésimale. □

5.1.3*. Normes et recollement.* — Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma formel admissible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$ de fibre générique rigide Z^{rig} réduite. Le faisceau structural $\mathcal{O}_{Z^{rig}}$ est muni d'une norme canonique. Soit $\mathfrak{F}$ un faisceau localement libre de type fini sur $\mathfrak{Z}$. Notons $\mathcal{F}^{rig}$ le faisceau induit par $\mathfrak{F}$ sur Z^{rig}. D'après [**Ka**, par. 2], $\mathcal{F}^{rig}$ est canoniquement muni d'une norme $|\cdot|$ en faisant un $\mathcal{O}_{Z^{rig}}$-module de Banach. Soit $T : \mathcal{P}(Z^{rig}) \to \mathcal{P}(Z^{rig})$ un opérateur géométrique induit par une correspondance finie étale sur Z^{rig}. Supposons que T induise une correspondance cohomologique $T : \mathrm{H}^0(T(V), \mathcal{F}^{rig}) \to \mathrm{H}^0(V, \mathcal{F}^{rig})$ pour V un ouvert de Z^{rig}. On pose alors

$$|T|_V \;=\; \inf\{\, c \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \; |T(f)|_V \leqslant c|f|_V \;\; \forall f \in \mathrm{H}^0(T(V), \mathcal{F}^{rig})\,\}\,.$$

Notons $\tilde{\mathcal{F}}^{rig}$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}^{rig}$ des sections de norme $\leqslant 1$. La proposition suivante est prouvée dans [**Ka**, lem. 2.3] et résulte d'un théorème de Bartenwerfer. Voir aussi [**Pi**, cor.5.1].

Proposition 5.1.4*.* — *Supposons* Z^{rig} *lisse. Pour tout ouvert quasi-compact V de* Z^{rig}*, on a*

$$\mathrm{H}^0\left(V,\, \mathcal{F}^{rig}\right) \xrightarrow{\sim} K \otimes_{\mathcal{O}} \varprojlim_{n \geqslant 0} \mathrm{H}^0\left(V,\, \tilde{\mathcal{F}}^{rig}/p^n\right)\,.$$

5.1.5*. Lemmes d'extension.* — Soit $\mathfrak{Z}$ un schéma formel admissible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{F}$ un faisceau localement libre de type fini sur $\mathfrak{Z}$. Notons Z^{rig} la fibre générique rigide de $\mathfrak{Z}$ et $\mathcal{F}^{rig}$ le faisceau induit par $\mathfrak{F}$ sur Z^{rig} et notons Z_0 la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$ et F_0 le faisceau induit par $\mathfrak{F}$ sur Z_0. Soit V_0 un ouvert de Z_0 de tube $]V_0[$ dans Z^{rig}.

Lemme 5.1.6*.* — *Supposons que l'application de restriction induise un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left(Z_0,\, F_0\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left(V_0,\, F_0\right)\,.$$

Alors il en est de même de

$$\mathrm{H}^0\left(Z^{rig},\, \mathcal{F}^{rig}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left(]V_0[,\, \mathcal{F}^{rig}\right)\,.$$

Démonstration. — Quitte à considérer un recouvrement de $\mathfrak{Z}$ par des schémas formels admissibles affines sur lesquels $\mathfrak{F}$ est trivialisable et à utiliser le complexe de Cech, on se ramène au cas où $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(A)$ est affine et $\mathfrak{F}$ trivial. Notons $A_0 = A/\pi A$ et $\mathfrak{V}$ le sous-schéma formel ouvert de $\mathfrak{Z}$ d'espace topologique V_0. Il suffit de montrer que $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})$ si $A_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(V_0, \mathcal{O}_{Z_0})$. Mais cela résulte du lemme de Nakayama topologique. □

Le lemme suivant est déjà contenu dans [**Ti**, coro. A.5].

Lemme 5.1.7. — *Supposons Z_0 Cohen-Macaulay et V_0 dense dans Z_0 de complémentaire de codimension $\geqslant 2$. L'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left(Z^{rig},\, \mathcal{F}^{rig}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left(]V_0[,\, \mathcal{F}^{rig}\right) .$$

Démonstration. — Comme Z_0 est Cohen-Macaulay, ses anneaux locaux vérifient la condition S_2 de Serre, à savoir

$$\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{Z_0,z}) \geq \min(2, \dim(\mathcal{O}_{Z_0,z}))$$

pour tout $z \in Z_0 - V_0$. D'après [**SGA2**, II.3.5], la restriction induit un isomorphisme $\mathrm{H}^0(Z_0, F_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(V_0, F_0)$ et il suffit d'appliquer le lemme **5.1.6**. □

5.2. Prolongement en grand degré. — Conformément aux notations de la partie **1.5**, posons

$$X_{\mathrm{Iw}}(1^-) \;=\; \{x \in X_{\mathrm{Iw}}^{rig} \text{ tq } \delta_i(x) > a_i - 1 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant d\} .$$

Proposition 5.2.1. — *La forme modulaire surconvergente f s'étend canoniquement en une section de ω^κ sur $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$.*

Démonstration. — On utilise l'équation fonctionnelle $f = \alpha^{-N} \cdot U^N(f)$ valable pour n'importe quel entier $N \geqslant 0$ et on conclut en appliquant le corollaire **3.2.2**. □

Remarque 5.2.2. — Nous avons uniquement utilisé l'hypothèse de pente finie. La proposition **5.2.1** est valable pour tout poids $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$.

5.3. Décomposition des correspondances. — Montrons comment la théorie du sous-groupe canonique permet de décomposer chaque correspondance de Hecke sur certaine zones de X_{Iw}^{rig}. Dans le paragraphe suivant, nous verrons comment cette décomposition géométrique induit une décomposition de l'opérateur U_i en somme de deux opérateurs ayant un comportement dynamique très différent.

5.3.1. *Tubes ordinaires.* — Soit $w \in W^0$. La strate de Kottwitz–Rapoport Z_w est un ouvert ordinaire de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Rappelons que dans la partie **1.3** on a défini pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ un groupe de Barsotti-Tate G_i et un drapeau $H_{i,\bullet} \subset G_i[p]$ sur X_{Iw}. La fonction $\deg(H_{i,j})$ est constante à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur le tube $]Z_w[$ de Z_w pour tous i et j. Pour tout $\lambda > 0$ on note $]Z_w[_\lambda$ le voisinage strict de $]Z_w[$ dans X_{Iw}^{rig} où pour tous i et j, la fonction $\deg(H_{i,j})$ prend ses valeurs dans l'intervalle

$$[\,\deg(H_{i,j})\,(]Z_w[) - \lambda\,,\; \deg(H_{i,j})\,(]Z_w[) + \lambda\,] \;.$$

C'est l'image inverse d'un voisinage strict du tube ordinaire dans la variété sans niveau X^{rig}. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, il existe un sous-groupe canonique $K_{a_i}^{\mathrm{can}}$ de $G_i[p]$ sur $]Z_w[$. Le groupe $K_{a_i}^{\mathrm{can}}$ est fini plat de rang p^{a_i} et il est caractérisé par la propriété d'être le relèvement sur $]Z_w[$

du sous-groupe multiplicatif maximal de $G_i[p]$ sur Z_w. La théorie du sous-groupe canonique de [**AM**], [**AG**] ou [**Fa2**] montre qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $K_{a_i}^{\mathrm{can}}$ s'étende canoniquement en un groupe fini et plat sur $]Z_w[_\lambda$.

Remarque 5.3.2. — D'après [**AM**], [**AG**] et [**Fa2**], il est possible de quantifier précisément λ. Nous n'aurons pas besoin de ces résultats fins et n'utiliserons que l'existence de λ, qui est élémentaire ([**Fa2**, par. 3] ou utiliser [**Be**, th. 1.3.5]). Remarquons que cette approche élémentaire de la théorie du sous-groupe canonique n'impose pas de supposer $p > 2$, contrairement à [**AM**] et [**Fa2**]. Dans [**AG**], la théorie du sous-groupe canonique est également développée dans le cas $p = 2$.

D'après le lemme **5.1.2**, on peut définir des groupes finis et plats $G_i[p]^{\mathrm{m}}$, $G_i[p]^{\mathrm{b}}$ et $G_i[p]^{\mathrm{e}}$ relatifs au groupe fini et plat $G_i[p]$ sur la complétion formelle de X_{Iw} le long de Z_w.

Notation 5.3.3. — Soit L_i un sous-groupe fini et plat de $G_i[p]$ sur $]Z_w[$. On note respectivement L_i^{m}, L_i^{b} et L_i^{e} l'image de L_i dans $G_i[p]^{\mathrm{m}}$, $G_i[p]^{\mathrm{b}}$ et $G_i[p]^{\mathrm{e}}$. Pour tout schéma formel $\mathfrak{Z}$ comme dans le lemme **5.1.2** muni d'un morphisme π vers la complétion formelle de X_{Iw} le long de Z_w et d'un groupe fini et plat L sur $\mathfrak{Z}$ tel que $L \subset \pi^* G_i[p]$ sur $\mathfrak{Z}$ et $\pi^* L_i = L$ sur Z^{rig}, on a $L^{\mathrm{m}} = \pi^* L_i^{\mathrm{m}}$ où L^{m} est défini en appliquant le lemme **5.1.2**. De même pour L^{b} et L^{e}. Cela s'applique en particulier lorsque $\mathfrak{Z} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est relatif à un $\bar{K}$-point de $]Z_w[$.

On en déduit le lemme suivant car $L_i^{\mathrm{e}} = L_i$ si et seulement si L_i est disjoint de K_i^{can} dans $G_i[p]$.

Lemme 5.3.4. — *Soit $L_i \subset G_i[p]$ un sous-groupe fini et plat sur $]Z_w[$. On a $\deg(L_i) = 0$ sur $]Z_w[$ si L_i est disjoint de K_i^{can} et $\deg(L_i) \geqslant 1$ dès que L_i rencontre K_i^{can}. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\lambda_0 > 0$ assez petit tel que pour tout $\lambda < \lambda_0$ et tout $L_i \subset G_i[p]$ fini et plat sur $]Z_w[_\lambda$ on a $\deg(L_i) < 1$ sur $]Z_w[$ si L_i est disjoint de K_i^{can} et $\deg(L_i) \geqslant 1 - \varepsilon$ dès que L_i rencontre K_i^{can}.*

Ce lemme permet de découper la restriction de la correspondance C_{i,a_i}^{rig} à $]Z_w[_\lambda$ par p_1^{rig} en

$$C_{i,a_i}^{rig} \cap (p_1^{rig})^{-1}(]Z_w[_\lambda) = C_{i,a_i}^{<} \sqcup C_{i,a_i}^{\geqslant} .$$

Dans ce découpage, $C_{i,a_i}^{<}$ paramètre les supplémentaires de H_{i,a_i} qui ne rencontrent pas K_i^{can} sur $]Z_w[_\lambda$ et

$$C_{i,a_i}^{\geqslant}$$

les supplémentaires qui rencontrent K_i^{can} sur $]Z_w[_\lambda$. D'après le lemme **5.3.4**, le degré du supplémentaire universel est < 1 sur

$$C_{i,a_i}^{<}$$

et $\geqslant 1 - \eta$ sur $C_{i,a_i}^{\geqslant}$ où η est un réel positif dépendant de λ. Sur la restriction de $C_{i,a_i}^{\geqslant}$ à $]Z_w[$ le degré de ce supplémentaire universel est $\geqslant 1$.

Remarque 5.3.5. — Les correspondances $C_{i,a_i}^{<}$ et $C_{i,a_i}^{\geqslant}$ dépendent bien sûr du choix de w même si ce choix n'est pas indiqué dans les notations. Ne pas insister sur le choix de w permettra de définir les séries de Kassaei sans complication de notation dans le paragraphe **5.5**.

***5.3.6**. Tubes pour W^1.* — Soit $w \in W^1$. Par définition de W^1, il existe un unique indice $i_w \in \{1, \cdots, d\}$ tel que G_{i_w} ne soit pas un groupe de Barsotti-Tate ordinaire sur le tube $]Z_w[$ de la strate de Kottwitz–Rapoport Z_w. Les rangs étales et multiplicatifs de $G_{i_w}[p]$ sont constants sur Z_w et on peut appliquer le lemme **5.1.2**. Le rang de

$$G_{i_w}^{\mathrm{m}}$$

est $p^{a_{i_w}-1}$, celui de $G_{i_w}^{\mathrm{b}}$ est p^2 et celui de

$$G_{i_w}^{\mathrm{e}}$$

est $p^{b_{i_w}-1}$. Soit $L_i \subset G_i[p]$ un sous-groupe fini et plat. On utilise une notation analogue à **5.3.3** pour lui associer des groupes finis et plats L_i^{m}, L_i^{b} et L_i^{e} sur $]Z_w[$.

***Lemme 5.3.7**. — Supposons $i = i_w$. Soit $L_i \subset G_i[p]$ un sous-groupe fini et plat de rang p^{b_i} sur $]Z_w[$. On a $\deg(L_i) < 1$ sur $]Z_w[$ si et seulement si $L_i^{\mathrm{m}} = 0$ et $L_i^{\mathrm{e}} = G_i[p]^{\mathrm{e}}$.*

Démonstration. — Il est clair que $\deg(L_i) \geqslant 1$ si $L_i^{\mathrm{m}} \neq 0$. De même, si $L_i^{\mathrm{m}} = 0$ et $L_i^{\mathrm{e}} \subsetneq G_i[p]^{\mathrm{e}}$ on a d'après la dernière propriété du lemme **5.1.2** que $L_i^{\mathrm{b}} = G_i[p]^{\mathrm{b}}$ qui est de degré 1. Il nous suffit donc de prouver que $\deg(L_i) < 1$ si $L_i^{\mathrm{m}} = 0$ et $L_i^{\mathrm{e}} = G_i[p]^{\mathrm{e}}$. Mais dans ce cas, L_i^{b} est de rang 1 donc de degré < 1 d'après [**Fa1**, cor. 2, ex. 2]. On conclut puisque $\deg(L_i) = \deg(L_i^{\mathrm{b}})$ lorsque $L_i^{\mathrm{m}} = 0$. □

***Remarque 5.3.8**.* — Dans le cas (C), lorsque $i = i_w$ on a $\deg(L_i) < 1$ sur $]Z_w[$ si et seulement si $L_i^{\mathrm{m}} = 0$. La condition $L_i^{\mathrm{e}} = G_i[p]^{\mathrm{e}}$ dans le lemme précédent ne sert que dans le cas (A). Dans le cas (C), elle est équivalente à la condition $L_i^{\mathrm{m}} = 0$.

Le lemme **5.3.7** pour $i = i_w$ et le lemme **5.3.4** pour $i \neq i_w$ permettent pour tout i de découper la restriction de la correspondance C_{i,a_i}^{rig} à $]Z_w[$ en

$$C_{i,a_i}^{rig} \cap (p_1^{rig})^{-1}(]Z_w[) \;=\; C_{i,a_i}^{<} \sqcup C_{i,a_i}^{\geqslant}\,.$$

Dans cette décomposition, $C_{i,a_i}^{<}$ paramètre exactement les supplémentaires L_i de H_{i,a_i} qui vérifient $L_i^{\mathrm{m}} = 0$ et $L_i^{\mathrm{e}} = G_i[p]^{\mathrm{e}}$. Le lemme **5.3.7** montre que le degré du supplémentaire universel est < 1 sur $C_{i,a_i}^{<}$ et $\geqslant 1$ sur $C_{i,a_i}^{\geqslant}$.

***Remarque 5.3.9**.* — Dans l'esprit de [**PS1**], il est facile de montrer que cette décomposition surconverge sur un voisinage strict de $]Z_w[$ dans le tube $]\bar{Z}_w[$ de l'adhérence $\bar{Z}_w$ de Z_w dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ pour tout $w \in W^1$. Nous n'utiliserons pas cette surconvergence.

5.4. Décomposition des opérateurs de Hecke. — Soit $w \in W^0 \cup W^1$ et $1 \leqslant i \leqslant d$. Si $w \in W^0$ désignons par λ n'importe quel réel > 0 assez petit pour que le sous-groupe canonique existe sur $]Z_w[_\lambda$. Si $w \in W^1$ posons $\lambda = 0$. D'après les lemmes **5.3.4** et **5.3.7**, la correspondance C_{i,a_i} se découpe en

$$C_{i,a_i}^{rig} \cap (p_1^{rig})^{-1}(]Z_w[_\lambda) \;=\; C_{i,a_i}^{<} \sqcup C_{i,a_i}^{\geqslant}$$

et les morphismes p_1^{rig} et p_2^{rig} de chacun des facteurs vers X_{Iw}^{rig} sont finis étales. On obtient en conséquence une décomposition

$$U_i \;=\; U_i^{<} \sqcup U_i^{\geqslant}$$

de l'opérateur géométrique $U_i : \mathcal{P}(]Z_w[_\lambda) \to \mathcal{P}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig})$. En termes modulaires, l'action de $U_i^{<}$ sur le groupe de Barsotti-Tate universel avec structure de niveau iwahorique consiste à quotienter par tous les supplémentaires L_i de H_{i,a_i} paramétrés par $C^{<}_{i,a_i}$. De même pour $U_i^{\geqslant}$. Le lemme suivant résulte des lemmes **5.3.4** et **5.3.7**.

Lemme 5.4.1. — *Soit $1 \leqslant i \leqslant d$. Lorsque $w \in W^0$ ou $w \in W^1$ et $i \neq i_w$ on a $U_i^{<} = U_i$ et $U_i^{\geqslant} = 0$ si et seulement si le groupe H_{i,a_i} est multiplicatif sur Z_w. Lorsque $w \in W^1$ et $i = i_w$ on a $U_i^{<} = U_i$ et $U_i^{\geqslant} = 0$ si et seulement si H_{i,a_i} est de rang multiplicatif p^{a_i-1} et de rang étale nul sur Z_w.*

Remarque 5.4.2. — Dans le cas (C), lorsque $w \in W^1$ et $i = i_w$ la condition sur le rang étale de H_{i,a_i} est équivalente à celle sur son rang multiplicatif dans le lemme précédent.

La proposition suivante montre que $U_i^{<}$ a une zone de grand degré pour image.

Proposition 5.4.3. — *Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, on a $\delta_i > a_i - 1$ sur l'image par $U_i^{<}$ de $]Z_w[_\lambda$.*

Démonstration. — Soit x un point de $]Z_w[_\lambda$ et $y \in U_i^{<}(\{x\})$. Notons $H_{i,a_i,x}$ et $H_{i,a_i,y}$ les groupes finis et plats sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ correspondants à x et y. De même pour $G_{i,x}[p]$. Par définition, il existe un sous-schéma en groupes $L_{i,y} \subset G_{i,x}[p]$ fini et plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ associé à y tel que

$$L_{i,y,\bar{K}} \oplus H_{i,a_i,x,\bar{K}} \ = \ G_{i,x,\bar{K}}[p] \ .$$

On a $\deg(L_{i,y}) < 1$ et $H_{i,a_i,y} = G_{i,x}[p]/L_{i,y}$ comme schéma en groupes fini et plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. On en déduit $\delta_i(y) = a_i - \deg(L_i) > a_i - 1$. □

La proposition suivante nous permettra d'itérérer l'opérateur $U_i^{\geqslant}$.

Proposition 5.4.4. — *Soit $1 \leqslant i \leqslant d$. Supposons $U_i^{\geqslant}$ non nul sur $]Z_w[$. L'image de $]Z_w[$ par $U_i^{\geqslant}$ est incluse dans le tube d'une union de strates de Kottwitz-Rapoport sur laquelle un autre opérateur $U_i^{\geqslant}$ est défini et est non nul.*

Démonstration. — Comme les rangs étale et multiplicatif d'un groupe de Barsotti-Tate sont invariants par isogénie, nous avons bien défini une décomposition de U_i en union de deux opérateurs $U_i^{<}$ et $U_i^{\geqslant}$ sur l'image de $]Z_w[$ par $U_i^{\geqslant}$ grâce aux lemmes **5.3.4** et **5.3.7**. Soit $w' \in W$ tel que $]Z_{w'}[$ rencontre l'image par $U_i^{\geqslant}$ de $]Z_w[$. Il nous suffit de prouver que si w ne satisfait pas aux conditions équivalentes du lemme **5.4.1** pour l'indice i alors w' ne les satisfait pas non plus. Soit $x \in]Z_w[$ et $y \in U_i^{\geqslant}(\{x\})$ tels que $y \in]Z_{w'}[$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, notons $G_{i,x}$ le groupe de Barsotti-Tate sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et $H_{i,a_i,x} \subset G_{i,x}[p]$ son sous-groupe fini et plat correspondants à x. Notons $L_{i,y} \subset G_{i,x}[p]$ le sous-groupe fini et plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ supplémentaire de $H_{i,a_i,x}$ sur $\mathrm{Spec}(\bar{K})$ correspondant à y. Notons $H_{i,a_i,y} = G_{i,x}[p]/L_{i,y}$ et $G_{i,y} = G_{i,x}/L_{i,y}$. Lorsque $w \in W^0$ il s'agit de vérifier que $H^{\mathrm{m}}_{i,a_i,y} \neq G^{\mathrm{m}}_{i,y}$. C'est évident car $L^{\mathrm{m}}_{i,y} \neq 0$ par hypothèse. Lorsque $w \in W^1$ il s'agit de vérifier que $H^{\mathrm{m}}_{i,a_i,y} \neq G^{\mathrm{m}}_{i,y}$ ou $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i,y} \neq 0$. C'est évident car $L^{\mathrm{m}}_{i,y} \neq 0$ ou $L^{\mathrm{e}}_{i,y} \neq G_{i,x}[p]^{\mathrm{e}}$ par hypothèse. □

On pose $U^{<} = \prod_{i=1}^{d} U_i^{<}$ où le produit désigne la composition d'une famille commutative d'opérateurs. On pose

$$U^{\geqslant} \ = \ U \ - \ U^{<} \ = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\cdots,d\}} \left(\prod_{i \in I} U_i^{\geqslant} \right) \circ \left(\prod_{i \notin I} U_i^{<} \right)$$

On obtient deux opérateurs géométriques $U^{<}$ et $U^{\geqslant}$ de $\mathcal{P}(]Z_w[_\lambda)$ dans $\mathcal{P}(X_{\mathrm{Iw}}^{rig})$ qui agissent sur les espaces de formes modulaires grâce à la normalisation décrite dans le paragraphe **2.3**.

Proposition 5.4.5. — *L'opérateur géométrique $U^{<}$ envoie $]Z_w[_\lambda$ dans $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$. Il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que pour tout $\lambda > 0$ assez petit, l'opérateur géométrique $U^{\geqslant}$ envoie $]Z_w[_\lambda$ dans une union de voisinages stricts $]Z_{w'}[_{N\lambda}$ où w' parcourt un sous-ensemble W_w de W minimal pour la propriété précédente. Si λ est assez petit, un opérateur $U^{\geqslant}$ est défini sur $]Z_{w'}[_{N\lambda}$ pour tout $w' \in W_w$. Lorsque $U^{\geqslant}$ est non nul sur $]Z_w[_\lambda$, l'opérateur $U^{\geqslant}$ correspondant sur $]Z_{w'}[_{N\lambda}$ est également non nul pour tout $w' \in W_w$.*

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition **5.4.3** en faisant varier i. La seconde résulte de [**Pi**, prop. 4.17]. Elle n'a d'intérêt que si $\lambda \neq 0$ donc $w \in W^0$. La troisième assertion résulte de la proposition **5.4.4**. □

On peut appliquer la construction du paragraphe **5.1.3** à tout modèle formel de $]Z_w[_\lambda$ muni d'un morphisme vers la complétion formelle π-adique de X_{Iw}, au faisceau localement libre ω^κ et aux opérateurs de Hecke $U^{<}$ et $U^{\geqslant}$ agissant sur les espaces de formes modulaires de poids κ. La norme obtenue est indépendante du choix du modèle formel. Le lemme suivant est évident d'après les définitions (voir [**Pi**, prop. 5.2]).

Lemme 5.4.6. — *Soit $w \in W^0 \cup W^1$, soit V un ouvert de $]Z_w[_\lambda$ et $1 \leqslant i \leqslant d$. Notons*

$$\partial \;=\; \inf \{\, \deg(L_{i,x}),\;\; x \in C_{i,a_i}^{\geqslant} \cap (p_1^{rig})^{-1}(V) \,\}$$

où $L_{i,x}$ est le sous-groupe de $G_i[p]$ correspondant à x. On a

$$\left|U_i^{\geqslant}\right|_V \;\leqslant\; p^{a_ib_i - \partial(k_{i,a_i} + l_{i,b_i})}$$

dans le cas (A) et

$$\left|U_i^{\geqslant}\right|_V \;\leqslant\; p^{a_i(a_i+1)/2 - \partial k_{i,a_i}}$$

dans le cas (C). Dans les deux cas, k_{i,a_i} et l_{i,b_i} sont des composantes du vecteur κ selon l'écriture donnée au début de la partie 5.

5.5. Séries de Kassaei. — Suivant une idée introduite par Kassaei dans [**Ka**] pour le groupe GL_2 sur $\mathbb{Q}$, nous allons définir des séries approximant le prolongement voulu de f sur certaines zones de X_{Iw}^{rig}. Dans le reste de l'article, sauf mention explicite du contraire on suppose satisfaite l'hypothèse suivante.

Hypothèse 5.5.1. — Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ on a $k_{i,a_i} + l_{i,b_i} > v(\alpha_i) + a_ib_i$ dans le cas (A) et $k_{i,a_i} > v(\alpha_i) + a_i(a_i+1)/2$ dans le cas (C).

5.5.2. *Tubes ordinaires.* — On choisit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, on ait

$$k_{i,a_i} + l_{i,b_i} - v(\alpha_i) - a_ib_i - \varepsilon \;>\; 0$$

dans le cas (A) et

$$k_{i,a_i} - v(\alpha_i) - a_i(a_i+1)/2 - \varepsilon \;>\; 0$$

dans le cas (C). On choisit $\varepsilon_0 > 0$ assez petit pour que pour tout $w \in W^0$, le sous-groupe canonique surconverge sur $]Z_w[_{\varepsilon_0}$ et que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ et tout ouvert V de $]Z_w[_{\varepsilon_0}$

$$|U_i^{\geqslant}|_V \;\leqslant\; p^{-k_{i,a_i} - l_{i,b_i} + a_ib_i + \varepsilon}$$

dans le cas (A) et

$$|U_i^{\geqslant}|_V \;\leqslant\; p^{-k_{i,a_i} + a_i(a_i+1)/2 + \varepsilon}$$

dans le cas (C). Un tel ε_0 existe d'après le lemme **5.4.6**. On suppose de plus ε_0 assez petit pour que la proposition **5.4.5** s'applique pour tout $w \in W^0$ et qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $U^{\geqslant}$ envoie $]Z_w[_{\varepsilon_0}$ dans l'union des voisinages stricts $]Z_{w'}[_{N\varepsilon_0}$ avec $w' \in W_w$. On pose $\varepsilon_n = (1/N)^n \cdot \varepsilon_0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Définition 5.5.3. — Soit $w \in W^0$ et $n \geqslant 1$ un entier. On pose

$$f_{w,n} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k-1} \cdot \left((U^{\geqslant})^k \circ U^{<} \right)(f)$$

On obtient une section $f_{w,n}$ de ω^κ définie $]Z_w[_{\varepsilon_n}$. Cette section est bien définie d'après la proposition **5.4.5** puisque le dernier opérateur par lequel on compose est $U^{<}$ et qu'on peut composer les opérateurs $U^{\geqslant}$.

Remarque 5.5.4. — Lorsque H_{i,a_i} est multiplicatif sur Z_w, on a $f_{w,n} = f$ pour tout $n \geqslant 1$ où f est le prolongement de la forme modulaire de départ décrit dans le paragraphe **5.2**. En général, il faut voir $f_{w,n}$ comme une approximation à l'ordre n de f sur $]Z_w[_{\varepsilon_n}$. En effet, on a formellement

$$f \;=\; \alpha^{-n} \cdot U^n \cdot f \;=\; f_{w,n} + \alpha^{-n} \cdot (U^{\geqslant})^n \cdot f \qquad (\mathbf{5.5}.\mathrm{A})$$

et dans cette expression seul est *a priori* défini le terme $f_{w,n}$.

Notons I_w le sous-ensemble de $\{1, \cdots, d\}$ formé des indices i tels que H_{i,a_i} ne soit pas multiplicatif sur Z_w. D'après le lemme **5.4.1**, on a $U_i^{\geqslant} \neq 0$ si et seulement si $i \in I_w$.

Proposition 5.5.5. — *Pour tout $n \geqslant 1$ et $w \in W^0$ on a les estimations*

$$|f_{w,n+1} - f_{w,n}|_{]Z_w[_{\varepsilon_n}} \;=\; O\left(p^{-n\sum_{i\in I_w}\ k_{i,a_i}+l_{i,b_i}-a_ib_i-v(\alpha_i)-\varepsilon}\right)$$

dans le cas (A) et

$$|f_{w,n+1} - f_{w,n}|_{]Z_w[_{\varepsilon_n}} \;=\; O\left(p^{-n\sum_{i\in I_w}\ k_{i,a_i}-a_i(a_i+1)/2-v(\alpha_i)-\varepsilon}\right)$$

dans le cas (C). En particulier, dans les deux cas la norme de $f_{w,n}$ sur $]Z_w[_{\varepsilon_n}$ est bornée indépendamment de n.

Démonstration. — On a par définition $f_{w,n+1} - f_{w,n} = \alpha^{-n-1}\left((U^{\geqslant})^{n+1} \circ U^{<}\right)(f)$ sur $]Z_w[_{\varepsilon_n}$. Cette expression admet un développement selon les indices $1 \leqslant i \leqslant d$ et les opérateurs $U_i^{<}$ et $U_i^{\geqslant}$. On déduit de ce développement l'estimation voulue en utilisant le lemme **5.4.6** puisque la norme de $U_i^{<}$ est toujours bornée, que l'image par $U_i^{<}$ de l'ouvert quasi-compact

$$]Z_w[_{\varepsilon_n}$$

est quasi-compacte et que la norme de f est finie sur tout ouvert quasi-compact de $X_{\mathrm{Iw}}^{rig}(1^-)$. On en déduit que la norme de $f_{w,n}$ sur $]Z_w[_{\varepsilon_n}$ est bornée indépendamment de n en appliquant l'inégalité triangulaire et en utilisant le fait que $f_{w,1}$ est bornée sur l'ouvert quasi-compact $]Z_w[_{\varepsilon_1}$. □

Montrons un lemme de finitude généralisant [**Ka**, par. 4] et [**Pi**, par. 6.3]. Introduisons auparavant une notation. Soit $w \in W^1$ tel que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ et $H^{\mathrm{m}}_{i,a_i} = G_i[p]^{\mathrm{m}}$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Rappelons qu'on a défini un indice i_w dans le paragraphe **5.3.6**. Notons $1 \leqslant j_w \leqslant a_{i_w}$ l'unique entier tel que

$$H_{i_w,\,j_w}/H_{i_w,\,j_w-1}$$

soit bi-infinitésimal. Pour tous réels positifs η et ν, notons $]Z_w[^{\eta,\nu}$ le lieu de X^{rig}_{Iw} où

$$\deg(H_{i_w,\,a_{i_w}}) \;-\; \deg(H_{i_w,\,j_w}/H_{i_w,\,j_w-1}) \;\geqslant\; a_{i_w} - 1 - \eta\,,$$

où la fonction δ_{i_w} est $\geqslant a_{i_w} - 1 + \nu$ et où la fonction δ_i est égale à a_i pour tout $i \neq i_w$. Notons $]Z_w[^{\eta,0^+}$ l'union des $]Z_w[^{\eta,\nu}$ pour $\nu > 0$. On a $]Z_w[\, \subset\,]Z_w[^{\eta,0^+} \subset X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$.

Lemme 5.5.6. — *Il existe un réel $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_1$ tel que la norme de f sur $]Z_w[^{\varepsilon',\,0^+}$ soit finie où f désigne le prolongement sur $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ réalisé dans le paragraphe **5.2**.*

Démonstration. — Notons $i = i_w$. Soit $w' \in W^0$ l'unique élément tel que Z_w soit inclus dans l'adhérence de $Z_{w'}$ et que $\oplus_k H^{\mathrm{e}}_{k,a_k}$ soit de rang p sur $]Z_{w'}[$. Sur $]Z_{w'}[_{\varepsilon_1}$ on a construit une forme $f_{w',\,1}$. Soit $0 < \varepsilon'_1 \leqslant \varepsilon_1$ un réel que nous ajusterons plus tard au cours de la démonstration. D'après la proposition **3.2.1**, il existe une suite $(\varepsilon'_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de l'intervalle $]0,1[$ décroissante de limite nulle de premier terme ε'_1 telle que

$$U_i\left(]Z_w[^{a_i-1,\varepsilon_{n+1}}\right) \;\subset\,]Z_w[^{a_i-1,\varepsilon_n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Soit M un réel majorant la norme de f sur l'ouvert quasi-compact $]Z_w[^{a_i-1,\varepsilon'_1}$ et la norme de $f_{w',\,1}$ sur l'ouvert quasi-compact $]Z_{w'}[_{\varepsilon_1}$. Montrons par récurrence sur n que la norme de f est majorée par M sur

$$]Z_w[^{\varepsilon'_1,\varepsilon'_n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Posons

$$\mathcal{W}_{n+1} \;=\,]Z_w[^{\varepsilon'_1,\varepsilon'_{n+1}} \setminus\;]Z_w[^{\varepsilon'_1,\varepsilon'_n}$$

pour tout $n \geqslant 1$. On a $U_i(\mathcal{W}_{n+1}) \subset \mathcal{W}_n$. Supposons ε'_1 choisi assez petit pour que $\mathcal{W}_{n+1}$ soit inclus dans $]Z_{w'}[_{\varepsilon_1}$ pour tout $n \geq 1$. Par inégalité ultramétrique, on a

$$|f|_{\mathcal{W}_{n+1}} \;\leqslant\; \max\left(\left|f - \alpha_i^{-1}\,U_i^{\geqslant}\,(f)\right|_{\mathcal{W}_{n+1}}\,,\;\; \left|\alpha_i^{-1}\,U_i^{\geqslant}\,(f)\right|_{\mathcal{W}_{n+1}}\right)\,.$$

On conclut la récurrence en remarquant que $f - \alpha_i^{-1}U_i^{\geqslant}\,(f) = f_{w',\,1}$ est borné par M et que d'après le lemme **5.4.6** et l'hypothèse **5.5.1** on a

$$\left|\alpha_i^{-1}\,U_i^{\geqslant}\,(f)\right|_{\mathcal{W}_{n+1}} \;\leqslant\; |f|_{U_i^{\geqslant}(\mathcal{W}_{n+1})} \;\leqslant\; |f|_{\mathcal{W}_n}$$

qui est aussi borné par M. Cela démontre le lemme. □

Remarque 5.5.7. — Le lecteur est invité à représenter graphiquement l'énoncé et la preuve du lemme dans le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_2$ ou GSp_4.

Corollaire 5.5.8. — *Soit $w \in W^1$ tel que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ et $H^{\mathrm{m}}_{i,a_i} = G_i[p]^{\mathrm{m}}$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. La norme de f est finie sur $]Z_w[$.*

5.5.9. Tubes pour W^1. — On raisonne exactement comme dans le paragraphe **5.5.2** à cela près que l'on ne considère pas de voisinages stricts des tubes en question.

Définition 5.5.10. — Soit $w \in W^1$ et $n \geqslant 1$ un entier. On pose

$$f_{w,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k-1} \cdot \left((U^{\geqslant})^k \circ U^{<} \right)(f)$$

On obtient une section $f_{w,n}$ de ω^κ définie $]Z_w[$ qui est bien définie d'après la proposition **5.4.5**.

Remarque 5.5.11. — Lorsque $i \neq i_w$ et H_{i,a_i} est multiplicatif sur Z_w, on a $f_{w,n} = f$ pour tout $n \geqslant 1$. De même lorsque $i = i_w$ et H_{i,a_i} est de rang multiplicatif $p^{a_i - 1}$ et de rang étale nul sur Z_w.

Notons I_w le sous-ensemble des $i \in \{1, \cdots, d\}$ tels que $H^{\mathrm{m}}_{i,a_i} \neq G_i[p]^{\mathrm{m}}$ ou $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} \neq 0$ sur Z_w. D'après le lemme **5.4.1**, on a $U_i^{\geqslant} \neq 0$ si et seulement si $i \in I_w$.

Proposition 5.5.12. — *Pour tout $n \geqslant 1$ et $w \in W^1$ on a*

$$|f_{w,n+1} - f_{w,n}|_{]Z_w[} = O\left(p^{-n \sum_{i \in I_w} k_{i,a_i} + l_{i,b_i} - a_i b_i - v(\alpha_i)}\right)$$

dans le cas (A) et

$$|f_{w,n+1} - f_{w,n}|_{]Z_w[} = O\left(p^{-n \sum_{i \in I_w} k_{i,a_i} - a_i(a_i+1)/2 - v(\alpha_i)}\right)$$

dans le cas (C). En particulier, la norme de $f_{w,n}$ sur $]Z_w[$ est bornée indépendamment de n.

Démonstration. — On raisonne comme dans la preuve de la proposition **5.5.5** en appliquant le lemme **5.5.6** et en remarquant que $U_i^{<}$ envoie $]Z_w[$ dans $\cup_{w'}]Z_{w'}[$ où w' parcourt les éléments de W^1 tels que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ et $H^{\mathrm{m}}_{i,a_i} = G_i[p]^{\mathrm{m}}$ sur $Z_{w'}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. □

5.6. Fin du prolongement dans le cas (A). — Pour tout $w \in W^0 \cup W^1$ et $n \geqslant 1$, on a construit une section $f_{w,n}$ de ω^κ définie sur $]Z_w[$ ou un voisinage strict de celui-ci. Recollons ces diverses sections. La proposition suivante ne servira que dans le cas (A) mais son énoncé et sa démonstration sont valables dans le cas (A) comme dans le cas (C).

Proposition 5.6.1. — *Il existe une unique section de ω^κ étendant f sur*

$$\bigsqcup_{w \in W^0 \cup W^1}]Z_w[\, .$$

On note encore f cette section.

Démonstration. — Pour tout $n \geqslant 1$ on dispose d'un recouvrement

$$\bigsqcup_{w \in W^0 \cup W^1}]Z_w[\;\subset\; \bigsqcup_{w \in W^0}]Z_w[_{\varepsilon_n} \sqcup \bigsqcup_{w \in W^1}]Z_w[$$

qui est admissible puisque $]Z_w[_{\varepsilon_n}$ est un voisinage strict de $]Z_w[$ pour tout $w \in W^0$. D'après les propositions **5.5.5** et **5.5.12**, on peut supposer que la norme de chacun des $f_{w,n}$ est inférieure à 1. D'après le lemme **5.1.4**, il suffit donc de trouver une suite d'entiers k_n tendant vers l'infini telle que les sections $f_{w,n}$ pour $w \in W^0 \cup W^1$ se recollent modulo p^{k_n}. Soit $w \in W^0$ et $w' \in W^1$ tels que $]Z_w[_{\varepsilon_n} \cap]Z_{w'}[\neq \emptyset$. Notons V cette intersection et étudions la norme de $f_{w,n} - f_{w',n}$ sur V. Sur V, on peut combiner les décompositions de la correspondance C_{i,a_i} effectués dans les paragraphes **5.3.1** et **5.3.6**. Rajoutons un indice w ou w' à ces décompositions selon qu'elles sont relatives à la strate Z_w ou $Z_{w'}$. De même pour les opérateurs $U^{\geqslant}$, $U^{<}$, $U_i^{\geqslant}$ et $U_i^{<}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. On trouve pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ une décomposition

$$C^{\geqslant}_{w,i,a_i} \cap (p_1^{rig})^{-1}(V) \ = \ C'_i \sqcup C''_i$$

avec

$$C'_i \ = \ C^{<}_{w',i,a_i} \cap C^{\geqslant}_{w,i,a_i} \cap (p_1^{rig})^{-1}(V)$$

et

$$C''_i \ = \ C^{\geqslant}_{w',i,a_i} \cap C^{\geqslant}_{w,i,a_i} \cap (p_1^{rig})^{-1}(V)\,.$$

On a $C'_i = \emptyset$ si $i \neq i_{w'}$ où l'indice $i_{w'}$ a été défini dans le paragraphe **5.3.6**. Remarquons que

$$C^{\geq}_{w',i,a_i}$$

est naturellement inclus dans la restriction de $C^{\geq}_{w,i,a_i}$ à

$$(p_1^{rig})^{-1}(V)$$

par compatibilité des sous-groupes canoniques partiels et totaux. En effet, sur V la partie multiplicative $(K_i^{\mathrm{can}})^{\mathrm{m}}$ du sous-groupe canonique K_i^{can} est isomorphe à $G_i[p]^{\mathrm{m}}$ pour tout i. De la décomposition précédente des correspondances, on obtient une décomposition

$$U^{\geqslant}_{w,i} = U'_i + U''_i$$

de la restriction de $U^{\geqslant}_{w,i}$ à V pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Cette décomposition est non triviale seulement si $i = i_{w'}$. De plus, l'image de $U'_{i_{w'}}$ est incluse dans $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ et $U''_{i_{w'}}$ coïncide avec la restriction à V de

$$U^{\geq}_{w',i_{w'}}\,.$$

Expliquons à présent comment donner une écriture explicite de $f_{w,n} - f_{w',n}$ sur V qui permettra de minorer sa norme. Posons $\tilde{U}_i = U^{<}_{w,i}$ et $\hat{U}_i = U^{\geq}_{w,i}$ pour tout $i \neq i_{w'}$ puis $\tilde{U}_{i_{w'}} = U'_{i_{w'}}$ et $\hat{U}_{i_{w'}} = U''_{i_{w'}}$. Posons $\tilde{U} = \prod_{1 \leq i \leq d} \tilde{U}_i$ et

$$\hat{U} \ = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\cdots,d\}} \left(\prod_{i \in I} \hat{U}_i\right) \circ \left(\prod_{i \notin I} \tilde{U}_i\right)$$

où le produit désigne la composition d'une famille commutative d'opérateurs. On obtient alors l'égalité

$$(\mathbf{5.6}.\mathrm{A}) \qquad f_{w,n} - f_{w',n} \ = \ -\,\alpha^{-n} \left(\sum_{k=1}^{n} (\hat{U})^{n-k} \circ (\tilde{U})^k\right)(f)$$

qui est analogue à l'égalité **5.5**.A apparaissant dans la remarque **5.5.4**. Remarquons que le membre de droite de (**5.6**.A) est bien défini car $\tilde{U}$ a son image incluse dans $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$ où f a été prolongée. Remarquons aussi une légère différence formelle entre les membres de droite de (**5.5**.A) et de (**5.6**.A) : dans (**5.5**.A) le terme $U^{<}$ n'intervient qu'une fois avec le facteur de proportionnalité α^{-k-1} alors que dans (**5.6**.A) le terme $\tilde{U}$ intervient k fois mais sans facteur de type α^{-k-1}. C'est que l'expression obtenue pour (**5.5**.A) était en fait $\sum_{k=0}^{n-1} \left((U^{\geq})^k \circ (U^{<})^{n-k}\right)$ que l'on avait simplifiée en utilisant $\alpha \cdot f = U \cdot f$ et le fait que $(U^{<})^{n-k} = U^{<} \circ U^{n-k-1}$ puisque $U^{<}$ a son image incluse dans $X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$.

Grâce à une variante évidente du lemme **5.4.6** pour les correspondances U'_i et U''_i, l'égalité (**5.6**.A) implique que

$$\left|f_{w,n} - f_{w',n}\right|_V \leqslant p^{-n\left(\sum_{1\leq i\leq d} k_{i,a_i}+l_{i,b_i}-a_ib_i-v(\alpha_i)-\varepsilon\right)} \cdot C_{w,w'}$$

dans le cas (A) et

$$\left|f_{w,n} - f_{w',n}\right|_V \leqslant p^{-n\left(\sum_{1\leq i\leq d} k_{i,a_i}-a_i(a_i+1)/2-v(\alpha_i)-\varepsilon\right)} \cdot C_{w,w'}$$

dans le cas (C) où dans les deux cas $C_{w,w'}$ est une constante réelle indépendante de n et finie d'après le corollaire **5.5.8**. On en déduit qu'il existe une suite d'entiers $(k_n)_n$ indépendante du choix de w et de w' tendant vers l'infini telle que $\left|f_{w,n} - f_{w',n}\right|_V = O(p^{-k_n})$. Cela suffit pour conclure la démonstration. □

On obtient le corollaire suivant qui conclut l'étape de prolongement analytique dans le cas (A).

Corollaire 5.6.2. — *Soit $f \in \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}}, \kappa)^\dagger$ de poids $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$. Supposons f propre pour U_i de valeur propre $\alpha_i \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Supposons l'hypothèse **5.5.1** vérifiée. La forme f s'étend canoniquement en une section de ω^κ sur X_{Iw}^{rig} dans le cas (A).*

Démonstration. — Cela résulte du lemme **5.1.7** appliqué à la complétion formelle π-adique de X_{Iw} et à l'ouvert $\cup_{w\in W^0\cup W^1} Z_w$ de la fibre spéciale. Cet ouvert est bien dense de complémentaire de codimension $\geqslant 2$ d'après le corollaire **4.2.6**. De plus, $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ est Cohen-Macaulay. En effet, comme X_{Iw} est plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ d'après [**G1**], le caractère Cohen-Macaulay de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ résulte de celui X_{Iw} (voir [**PRS**, rem. 2.1.3]). Mais le fait que X_{Iw} soit Cohen-Macaulay est le théorème principal de [**He**]. □

Remarque 5.6.3. — Pour l'instant, nous ne pouvons pas obtenir de conclusion similaire dans le cas (C). En effet, les strates de Kottwitz–Rapoport associées aux éléments de W^2 sont également de codimension un, mais le comportement dynamique de U sur $]Z_w[$ est plus compliqué lorsque $w \in W^2$ que lorsque $w \in W^0 \cup W^1$.

5.7. Fin du prolongement dans le cas (C). — Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas (C). Notre but est de démontrer un analogue du corollaire **5.6.2**.

5.7.1. *Prolongement en assez grand degré.* — Dans l'esprit de la partie **5.2**, nous allons montrer que f s'étend à une zone de $X_{\mathrm{Iw}}(1)$. Soit $w \in W^2$. Par définition de W^2 il existe un unique indice $1 \leqslant i_w \leqslant d$ tel que G_{i_w} ne soit pas ordinaire sur $]Z_w[$. On applique le lemme **5.1.2**. Les rangs de

$$G_{i_w}^{\mathrm{m}}\,,\;\; G_{i_w}^{\mathrm{b}} \;\text{ et }\; G_{i_w}^{\mathrm{e}}$$

sont égaux à $p^{a_{i_w}-2}$, p^4 et $p^{a_{i_w}-2}$. Utilisons une notation analogue à **5.3.3**. D'après le corollaire **4.3.2.6**, le degré de H_{i,a_i}^{b} est égal à 1 sur $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$ lorsque $i = i_w$. Supposons de plus que $H_{i,a_i}^{\mathrm{e}} = 0$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. La fonction δ_i, c'est-à-dire le degré de H_{i,a_i}, est alors égale à a_i sur $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$ si $i \neq i_w$ et à $a_i - 1$ si $i = i_w$. Ainsi, $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$ est inclus dans $X_{\mathrm{Iw}}(1)$.

Proposition 5.7.2. — *Soit $w \in W^2$ tel que $H_{i,a_i}^{\mathrm{e}} = 0$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. La forme f se prolonge en une section de ω^κ sur $X_{\mathrm{Iw}}(1^-) \cup]Z_w^{\mathrm{sg}}[$.*

On note encore f ce prolongement.

Démonstration. — Grâce à l'équation fonctionnelle $f = U_{i_w}(f)/\alpha_{i_w}$, il suffit de prouver que $\delta_{i_w} > a_{i_w} - 1$ sur $U_{i_w}(]Z_w^{\mathrm{sg}}[)$. Soit $x \in]Z_w^{\mathrm{sg}}[$ et $y \in U_{i_w}(\{x\})$. Supposons par l'absurde que $\delta_{i_w}(y) = \delta_{i_w}(x) = a_{i_w} - 1$. Notons $G_{i_w,x}$ le groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon un sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ et $H_{i_w,a_{i_w},x}$ le sous-groupe fini et plat de $G_{i_w,x}[p]$ correspondants à x. Notons $L_{i_w,y}$ le sous-groupe fini et plat de $G_{i_w,x}[p]$ supplémentaire de $H_{i_w,a_{i_w},x}$ sur $\mathrm{Spec}(\bar{K})$ qui correspond à y. D'après la démonstration de la proposition **3.1.2**, on a $\delta_{i_w}(y) = a_{i_w} - \deg(L_{i_w,y})$ donc $\deg(L_{i_w,y}) = 1$. Cela implique que l'isomorphisme générique $H_{i_w,a_{i_w},x} \times L_{i_w,y} \to G_{i_w,x}[p]$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. On a en particulier $G_{i_w,x}[p]^{\mathrm{b}} = H^{\mathrm{b}}_{i_w,a_{i_w},x} \times L^{\mathrm{b}}_{i_w,y}$. Cela contredit le résultat de la proposition **4.3.2.4**, à savoir l'indécomposabilité de la fibre spéciale de $G_{i_w,x}[p]^{\mathrm{b}}$ qui est un groupe de Barsotti-Tate tronqué supergénéral sur $\mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. On a donc $\delta_{i_w}(y) > a_{i_w} - 1$. □

Remarque 5.7.3. — La proposition précédente est valable avec la même démonstration sous l'hypothèse $\alpha \neq 0$ sans supposer l'hypothèse **5.5.1** satisfaite.

Lemme 5.7.4. — *Soit $w \in W^2$ tel que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. La forme f obtenue grâce à la proposition* ***5.7.2*** *est bornée sur $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$.*

Démonstration. — Soient w' et w'' les deux uniques éléments de W^1 tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, chaque gradué du drapeau $H_{i,\bullet}$ est multiplicatif sur $Z_{w'}$ et $Z_{w''}$ si et seulement si il l'est sur Z_w et tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$,

$$H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} \;=\; 0$$

et $H^{\mathrm{m}}_{i,a_i} = G_i[p]^{\mathrm{m}}$ sur $Z_{w'}$ et $Z_{w''}$. D'après le lemme **5.5.6**, il existe un réel $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_1$ tel que la norme de f soit finie sur

$$]Z_{w'}[^{\varepsilon',\,0^+}$$

et sur $]Z_{w''}[^{\varepsilon',\,0^+}$. Pour tout $\eta > 0$ notons $X^{rig}_{\mathrm{Iw},\eta}$ le lieu de X^{rig}_{Iw} où

$$\deg(H_{i_{w'},\,a_{i_{w'}}}) \;-\; \deg(H_{i_{w'},\,j_{w'}}/H_{i_{w'},\,j_{w'}-1}) \;\geqslant\; a_{i_{w'}} - 1 - \eta$$

ou bien

$$\deg(H_{i_{w''},\,a_{i_{w''}}}) \;-\; \deg(H_{i_{w''},\,j_{w''}}/H_{i_{w''},\,j_{w''}-1}) \;\geqslant\; a_{i_{w''}} - 1 - \eta$$

où l'on a utilisé les notations définies avant le lemme **5.5.6**. On peut d'ailleurs remarquer que $i_w = i_{w'} = i_{w''}$.

Le principe même de la démonstration de la proposition **5.7.2** montre que la fonction degré δ_{i_w} a strictement augmenté sur l'image par U_{i_w} de $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$. Comme cette fonction était constante égale à $a_{i_w} - 1$ sur $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$, on en déduit qu'elle est $> a_{i_w} - 1$ sur l'image de $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$ par U_{i_w}. D'autre part d'après [**Pi**, th.3.1.(1)], $X^{rig}_{\mathrm{Iw},\eta}$ est stable par U_{i_w} pour tout $\eta > 0$. On en déduit que l'image par U_{i_w} de

$$]Z_w^{\mathrm{sg}}[\ \cap\ X^{rig}_{\mathrm{Iw},\,\eta}$$

est incluse dans $X^{rig}_{\mathrm{Iw},\,\eta}$ et que la fonction δ_{i_w} y prend des valeurs $> a_{i_w} - 1$. On en déduit d'après les définitions que pour tout $\eta > 0$, l'image de

$$]Z_w^{\mathrm{sg}}[\ \cap\ X^{rig}_{\mathrm{Iw},\,\eta}$$

par U_{i_w} est incluse dans

$$]Z_{w'}[^{\eta,\,0^+} \cup\,]Z_{w''}[^{\eta,\,0^+}\ .$$

Comme la norme de l'opérateur U_{i_w} est finie, on en déduit grâce au lemme **5.5.6** que la norme de f est finie sur $]Z_w^{\rm sg}[\cap X^{rig}_{{\rm Iw},\,\varepsilon'}$. Pour démontrer le lemme, il suffit de voir qu'elle est également finie sur

$$V\ =]Z_w^{\rm sg}[\ \cap\ \mathcal{V}$$

où l'ouvert quasi-compact $\mathcal{V}\subset X^{rig}_{\rm Iw}$ est définie par les inégalités

$$\deg(H_{i_{w'},\,a_{i_{w'}}})\ -\ \deg(H_{i_{w'},\,j_{w'}}/H_{i_{w'},\,j_{w'}-1})\ \leqslant\ a_{i_{w'}}-1-\varepsilon'/2$$

et

$$\deg(H_{i_{w''},\,a_{i_{w''}}})\ -\ \deg(H_{i_{w''},\,j_{w''}}/H_{i_{w''},\,j_{w''}-1})\ \leqslant\ a_{i_{w''}}-1-\varepsilon'/2$$

Pour démontrer cette finitude, prouvons que V est quasi-compact. Considérons les ouverts

$$V'\ =\ \mathcal{V}\ \cap\ \delta_{i_w}^{-1}([a_{i_w}-1,a_{i_w}])$$

et

$$V''\ =\ \bigcup_{w'''\in W^0\cup W^1}\ ]Z_{w'''}[\ \cup\ \bigcup_{w'''\in W^2}\ ]Z^{\rm sg}_{w'''}[$$

de $X^{rig}_{\rm Iw}$. L'ouvert V' est clairement quasi-compact et l'ouvert V'' est quasi-compact comme tube d'un ouvert de la fibre spéciale $X_{\rm Iw}\times{\rm Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Comme $V=V'\cap V''$, l'ouvert V est quasi-compact et la restriction de f à V est automatiquement bornée. $\square$

Remarque 5.7.5. — Le lecteur est invité à faire le dessin du parallélogramme des degrés de [**Pi**, par. 4.3] dans le cas où ${\rm G}={\rm GSp}_4$ pour se représsenter graphiquement la démonstration qui précède et les notations qui y sont introduites.

Proposition 5.7.6. — *Soit $w\in W^2$ tel que $H^{\rm e}_{i,a_i}=0$ sur Z_w pour tout $1\leqslant i\leqslant d$. La forme f se prolonge canoniquement en une section de ω^κ sur $X_{\rm Iw}(1^-)\cup\,]Z_w[$.*

On note encore f ce prolongement.

Démonstration. — Soit J le sous-ensemble de $\{1,\cdots,a_{i_w}\}$ formé des indices j tel que

$$H_{i_w,\,j}/\,H_{i_w,\,j-1}$$

soit multiplicatif sur Z_w. Le cardinal de J est égal à $a_{i_w}-2$. Notons $\mathfrak{Z}$ le sous-schéma formel ouvert de la complétion π-adique de $X_{\rm Iw}$ sur lequel H_{i,a_i} est multiplicatif pour tout $i\neq i_w$ et

$$H_{i_w,\,j}\ /\ H_{i_w,\,j-1}$$

est multiplicatif pour tout $j\in J$. Le sous-schéma Z_w de $X_{\rm Iw}\times{\rm Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ est inclus dans la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$. Plus précisément, les seules strates de Kottwitz–Rapoport de codimension $\leqslant 1$ de la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$ sont associées à $w\in W^2$ et aux éléments d'un sous-ensemble W^w de $W^0\cup W^1$. Notons Z^{rig} la fibre générique rigide de $\mathfrak{Z}$.

Commençons par prolonger f au tube V de l'ouvert

$$Z_w^{\rm sg}\ \cup\ \bigcup_{w'\in W^w} Z_{w'}$$

de la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$ dont le complémentaire est de codimension $\geqslant 2$. D'après le lemme **5.7.4**, le prolongement f défini dans la proposition **5.7.2** est borné sur $]Z_w^{\rm sg}[$. D'après les lemmes **5.5.5** et **5.5.12**, les différentes séries de Kassaei $f_{w',n}$ sont bornées pour $w'\in W^w$.

Quitte à multiplier par une constante, on suppose que toutes ces formes sont de norme ≤ 1. Pour prolonger f à V, il suffit donc de construire une suite $(k_n)_n$ tendant vers l'infini telle que f sur $]Z_w^{\mathrm{sg}}[$ et les séries de Kassaei $f_{w',n}$ pour $w' \in W^w$ se recollent modulo p^{k_n} sur le recouvrement admissible $(REC)_n$

$$V \quad \subset \quad]Z_w^{\mathrm{sg}}[\quad \cup \bigcup_{w' \in W^w \cap W^1}]Z_{w'}[\quad \cup \bigcup_{w' \in W^w \cap W^0}]Z_{w'}[_{\varepsilon_n}.$$

Justifions d'abord l'admissibilité de ce recouvrement (voir aussi la démonstration de [**Pi**, prop. 6.8]). Notons

$$V' \;=\; \delta_{i_w}^{-1}(\{a_{i_w} - 1\}) \quad \cup \bigcup_{w' \in W^w}]Z_{w'}[$$

qui est un ouvert de Z^{rig} contenant V. Notons $\{j_1 < j_2\}$ le complémentaire de J dans $\{1, \cdots, a_{i_w}\}$ et V'' l'intersection dans Z^{rig} de $\delta_{i_w}^{-1}(\{a_{i_w} - 1\})$ et du lieu où le degré de H_{i_w,j_1} est dans l'intervalle $]j_1 - 1, j_1[$. Le recouvrement

$$V' \quad \subset \quad V'' \quad \cup \bigcup_{w' \in W^w \cap W^1}]Z_{w'}[\quad \cup \bigcup_{w' \in W^w \cap W^0}]Z_{w'}[_{\varepsilon_n}$$

est admissible et son intersection avec V est le recouvrement (REC_n) qui est donc admissible.

Construisons la suite $(k_n)_n$ comme dans la démonstration de la proposition **5.6.1**. On dispose en effet de f sur $]Z_w^{\mathrm{sg}}[\cup X_{\mathrm{Iw}}(1^-)$, de $f_{w',n}$ sur $]Z_{w'}[_{\varepsilon_n}$ pour tout $w' \in W^w \cap W^0$ et de $f_{w',n}$ sur $]Z_{w'}[$ pour tout $w' \in W^w \cap W^1$ et il faut trouver k_n tel qu'on ait des égalités modulo p^{k_n} entre ces formes sur les intersections du recouvrement $(REC)_n$. Commençons par comparer f et $f_{w',n}$ sur

$$V_{w'}^0 \;=]Z_{w'}[_{\varepsilon_n} \bigcap \left(]Z_w^{\mathrm{sg}}[\cup X_{\mathrm{Iw}}(1^-)\right)$$

pour tout $w' \in W^w \cap W^0$. On a $f - f_{w',n} = \alpha^{-n} \cdot U_{i_w}^{\geq}(f)$ sur $V_{w'}^0$ donc

$$|f - f_{w',n}|_{V_{w'}^0} \;\leq\; p^{-n(k_{i_w,a_{i_w}} - a_{i_w}(a_{i_w}+1)/2 - v(\alpha_i) - \varepsilon)} \cdot C_{w'}$$

où $C_{w'}$ est un réel positif indépendant de n, ce qui garantit l'existence d'un entier k_n satisfaisant les propriétés voulues sur cette intersection. Comparons ensuite $f_{w',n}$ et $f_{w'',n}$ sur $]Z_{w'}[_{\varepsilon_n} \cap]Z_{w''}[$ pour $w' \in W^w \cap W^0$ et $w'' \in W^w \cap W^1$. On trouve comme dans la proposition **5.6.1** que

$$\left|f_{w,'n} - f_{w'',n}\right|_{]Z_{w'}[_{\varepsilon_n} \cap]Z_{w''}[} \;\leqslant\; p^{-n\left(\sum_{1 \leq i \leq d} k_{i,a_i} - a_i(a_i+1)/2 - v(\alpha_i) - \varepsilon\right)} \cdot C_{w',w''}$$

où $C_{w',w''}$ est une constante réelle positive indépendante de n. Cela permet également de construire k_n ayant la propriété voulue sur $]Z_{w'}[_{\varepsilon_n} \cap]Z_{w''}[$. On a finalement bien prolongé f à tout V.

On veut ensuite prolonger f de V à tout Z^{rig}. On applique pour cela le lemme **5.1.7** au schéma formel $\mathfrak{Z}$ et à l'ouvert

$$Z_w^{\mathrm{sg}} \cup \bigcup_{w' \in W^w} Z_{w'}$$

de la fibre spéciale. Cet ouvert est bien dense de complémentaire de codimension ≥ 2, et la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$ est Cohen-Macaulay d'après le théorème principal de [**He**] et la platitude de $\mathfrak{Z}$ montrée dans [**G2**]. On en déduit que f se prolonge automatiquement à Z^{rig} donc en particulier à $]Z_w[$. $\square$

Lemme 5.7.7. — *Soit $w \in W^2$ tel que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Le prolongement canonique de f sur $]Z_w[$ est borné.*

Démonstration. — Réutilisons les notations introduites dans la démonstration de la proposition **5.7.6**. On y a prolongé f sur la fibre générique rigide Z^{rig} du schéma formel $\mathfrak{Z}$. Or Z^{rig} est égal au tube de la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$ dans X^{rig}_{Iw}. Mais cette fibre spéciale est ouverte dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ par construction de $\mathfrak{Z}$. Ainsi Z^{rig} est quasi-compact et f est automatiquement bornée sur Z^{rig} donc en particulier sur $]Z_w[$. $\square$

Notons W^2_{tot} le sous-ensemble de W formé des w tel qu'il existe un unique indice $1 \leq i_w \leq d$ tel que le groupe de Barsotti-Tate principalement polarisé $G_{i_w}[p]$ soit de p-rang $a_{i_w} - 2$ sur Z_w et tel que $G_i[p]$ soit ordinaire sur Z_w pour tout $i \neq i_w$. Il contient le sous-ensemble W^2 qui est caractérisé par la condition supplémentaire que Z_w soit de codimension un dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Notons W^2_{petit} le complémentaire de W^2 dans W^2_{tot}. La proposition suivante étend la proposition **5.7.6** et sa démonstration est très similaire.

Proposition 5.7.8. — *Soit $w \in W^2_{\mathrm{petit}}$ tel que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. La forme f se prolonge canoniquement en une section bornée de ω^κ sur $X_{\mathrm{Iw}}(1^-) \cup]Z_w[$.*

On note encore et toujours f ce prolongement.

Démonstration. — Soit J le sous-ensemble de $\{1, \cdots, a_{i_w}\}$ formé des indices j tel que

$$H_{i_w,\,j} / \, H_{i_w,\,j-1}$$

soit multiplicatif sur Z_w. Le cardinal de J est égal à $a_{i_w} - 2$. Notons $\mathfrak{Z}$ le sous-schéma formel ouvert de la complétion π-adique de X_{Iw} sur lequel H_{i,a_i} est multiplicatif pour tout $i \neq i_w$ et

$$H_{i_w,\,j} \,/\, H_{i_w,\,j-1}$$

est multiplicatif pour tout $j \in J$. Le sous-schéma Z_w de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ est inclus dans la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$. De plus, les seules strates de Kottwitz–Rapoport de codimension $\leqslant 1$ de la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$ sont associées aux éléments d'un sous-ensemble W^w de $W^0 \cup W^1 \cup W^2$. Notons Z^{rig} la fibre générique rigide de $\mathfrak{Z}$. Commençons par prolonger f au tube V de l'ouvert

$$\bigcup_{w' \in W^w} Z_{w'}$$

de la fibre spéciale de $\mathfrak{Z}$ dont le complémentaire est de codimension $\geqslant 2$. Lorsque $w' \in W^w \cap W^2$, l'existence d'un prolongement de f sur le tube de $Z_{w'}$ résulte de la proposition **5.7.6**. Ce prolongement est borné grâce au lemme **5.7.7**. Les lemmes **5.5.5** et **5.5.12** fournissent des séries de Kassaei $f_{w'',n}$ bornées pour $w'' \in W^w \cap (W^0 \cup W^1)$. Quitte à multiplier par une constante, on suppose que toutes ces formes sont de norme ≤ 1. Pour prolonger f à V, il suffit encore une fois de construire une suite $(k_n)_n$ tendant vers l'infini telle que f sur $]Z_{w'}[$ pour $w \in W^w \cap W^2$ et les séries de Kassaei $f_{w'',n}$ pour $w'' \in W^w \cap (W^0 \cup W^1)$ se recollent modulo p^{k_n} sur le recouvrement admissible $(REC)_n$

$$V \quad \subset \quad \bigcup_{w' \in W^w \cap W^2}]Z_{w'}[\quad \cup \quad \bigcup_{w'' \in W^w \cap W^1}]Z_{w''}[\quad \cup \quad \bigcup_{w'' \in W^w \cap W^0}]Z_{w''}[_{\varepsilon_n} .$$

L'admissibilité de ce recouvrement a été prouvé dans la démonstration de la proposition **5.7.6**. On construit alors la suite $(k_n)_n$ et on prouve le recollement des diverse séries de Kassaei comme dans la démonstration de la proposition **5.7.6**. On obtient donc un prolongement de f à tout V.

On veut ensuite prolonger f de V à tout Z^{rig}. On applique encore une fois le lemme **5.1.7** au schéma formel $\mathfrak{Z}$ et à l'ouvert
$$\bigcup_{w' \in W^w} Z_{w'}$$
qui est dense de complémentaire de codimension ≥ 2 dans la fibre spéciale. On en déduit que f se prolonge automatiquement à Z^{rig} donc en particulier à $]Z_w[$. Le prolongement obtenu est borné puique Z^{rig} est quasi-compact comme tube d'un ouvert. $\square$

5.7.9. *Séries de Kassaei pour W^2_{tot}.* — Soit $w \in W^2_{\mathrm{tot}}$. On découpe pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$ la restriction de la correspondance C^{rig}_{i,a_i} à $]Z_w[$ en
$$C^{rig}_{i,a_i} \cap (p_1^{rig})^{-1}(]Z_w[) \ = \ C^{<}_{i,a_i} \sqcup C^{\geqslant}_{i,a_i} \ .$$
Dans cette décomposition, $C^{<}_{i,a_i}$ paramètre exactement les supplémentaires L_i de H_{i,a_i} qui vérifient $L_i^{\mathrm{m}} = 0$. Lorsque $i \neq i_w$ on obtient la décomposition décrite dans le paragraphe **5.5.2**.

Remarque 5.7.10. — Le lecteur prendra garde au fait que lorsque $i = i(w)$, le degré du supplémentaire universel n'est pas nécessairement < 1 sur
$$C^{<}_{i,a_i} \ .$$
Il est par contre toujours $\geqslant 1$ sur
$$C^{\geqslant}_{i,a_i} \ .$$
Une des complications des strates paramétrées par W^2_{tot} par rapport à celles paramétrées par W^0 et W^1 est qu'il n'est pas facile de séparer les supplémentaires de degré < 1 de ceux de degré $\geqslant 1$.

On obtient donc une décomposition de l'opérateur géométrique $U_i :]Z_w[\to \mathcal{P}(X^{rig}_{\mathrm{Iw}})$ en somme
$$U_i \ = \ U_i^{<} \ + \ U_i^{\geqslant} \ .$$
Lorsque $i \neq i_w$, c'est la décomposition décrite dans le paragraphe **5.3.1**. Le lemme suivant se démontre exactement comme le lemme **5.4.1**.

Lemme 5.7.11. — *Notons $i = i_w$. On a $U_i^{<} = U_i$ et $U_i^{\geqslant} = 0$ sur $]Z_w[$ si et seulement si H_{i,a_i} est de rang multiplicatif $p^{a_i - 2}$ sur Z_w donc si et seulement si H^{e}_{i,a_i} est nul sur Z_w.*

Corollaire 5.7.12. — *L'opérateur géométrique $U^{\geqslant}$ envoie $]Z_w[$ dans une union de tubes $]Z_{w'}[$ où w' parcourt un sous-ensemble W_w de W^2_{tot} minimal pour la propriété précédente. Un opérateur $U^{\geqslant}$ est défini sur $]Z_{w'}[$ pour tout $w' \in W_w$. Lorsque $U^{\geqslant}$ est non nul sur $]Z_w[$, l'opérateur $U^{\geqslant}$ correspondant sur $]Z_{w'}[$ est non nul pour tout $w' \in W_w$.*

Soit $x \in]Z_w[$ et $1 \leqslant i \leqslant d$. Notons $H_{i,a_i,x} \subset G_{i,x}[p]$ les groupes finis et plats sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ correspondants à x. Soit $L_{i,x} \subset G_{i,x}[p]$ un sous-groupe fini et plat sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ qui est un supplémentaire de $H_{i,a_i,x}$ sur $\mathrm{Spec}(\bar{K})$. Notons
$$y \in X^{rig}_{\mathrm{Iw}}$$
le point obtenu en quotientant la fibre en x du schéma abélien universel par le sous-groupe $L_{i,x}$. Soient $H_{i,a_i,y} \subset G_{i,y}[p]$ les groupes finis et plats sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ correspondants à y. On a donc $H_{i,a_i,y} = G_{i,x}[p]/L_{i,x}$. Ce groupe est canoniquement isomorphe au dual de Cartier $L^D_{i,x}$ de $L_{i,x}$ puisque $L_{i,x}$ est un sous-groupe lagrangien de $G_{i,x}[p]$.

Lemme 5.7.13. — *Si* $L^{\mathrm{m}}_{i,x} = 0$, *on a* $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i,y} = 0$.

Démonstration. — La dualité de Cartier échange groupes étales et multiplicatifs. On obtient donc bien $(L^D_{i,x})^{\mathrm{e}} = 0$. □

On peut alors définir des séries de Kassaei exactement comme dans le paragraphe **5.5**. On pose $U^< = \prod_{i=1}^d U_i^<$ et

$$U^{\geqslant} = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\cdots,d\}} \left(\prod_{i\in I} U_i^{\geqslant} \right) \circ \left(\prod_{i \notin I} U_i^< \right).$$

Pour tout $w \in W^2_{\mathrm{tot}}$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$f_{w,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{-k-1} \cdot \left((U^{\geqslant})^k \circ U^< \right)(f).$$

Cette définition est justifiée car d'après le corollaire **5.7.12** on peut itérer les opérateurs $U^{\geqslant}$ et d'après la proposition **5.7.6**, la forme f est définie sur l'image de l'opérateur géométrique $U^<$. On démontre en effet que cette image est inclue dans l'union des tubes $]Z_{w'}[$ où $w' \in W^2_{\mathrm{tot}}$ est tel que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ sur $Z_{w'}$ en appliquant le lemme **5.7.13**.

Remarque 5.7.14. — Lorsque $w \in W^2_{\mathrm{tot}}$ vérifie $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} = 0$ sur Z_w pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, la forme $f_{w,n}$ est égale au prolongement de f décrit dans la proposition **5.7.6** pour tout $n \geqslant 1$.

D'après une variante évidente du lemme **5.4.6**, en utilisant le lemme **5.7.7** on démontre comme dans la proposition **5.5.5** que

$$|f_{w,n+1} - f_{w,n}|_{]Z_w[} = O\left(p^{-n\sum_{i\in I_w} k_{i,a_i} - a_i(a_i+1)/2 - v(\alpha_i)} \right)$$

pour tout $n \geqslant 2$ où $I_w \subset \{1,\cdots,d\}$ est l'ensemble des i tels que $H^{\mathrm{e}}_{i,a_i} \neq 0$ sur Z_w. En particulier, $f_{w,n}$ est bornée indépendamment de n sur $]Z_w[$.

Proposition 5.7.15. — *La forme* f *s'étend canoniquement en une section de* ω^κ *sur*

$$\bigcup_{w \in W^0 \cup W^1 \cup W^2}]Z_w[\,.$$

Démonstration. — Pour tout $n \geqslant 1$ on dispose d'un recouvrement admissible

$$\bigsqcup_{w\in W^0\cup W^1 \cup W^2}]Z_w[\ \subset \bigsqcup_{w\in W^0}]Z_w[_{\varepsilon_n} \sqcup \bigsqcup_{w \in W^1 \cup W^2}]Z_w[$$

On recolle alors les diverses formes $f_{w,n}$ pour $w \in W^0 \cup W^1 \cup W^2$ modulo une puissance assez grande de p tendant vers l'infini avec n en raisonnant exactement comme dans la démonstration de la proposition **5.6.1** en utilisant le lemme **5.7.7**. □

On peut enfin conclure l'étape de prolongement analytique dans le cas (C).

Corollaire 5.7.16. — *Soit* $f \in \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}}, \kappa)^\dagger$ *de poids* $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$. *Supposons* f *propre pour* U_i *de valeur propre* $\alpha_i \neq 0$ *pour tout* $1 \leqslant i \leqslant d$. *Supposons l'hypothèse* ***5.5.1*** *vérifiée. La forme* f *s'étend canoniquement en une section de* ω^κ *sur* X^{rig}_{Iw} *dans le cas (C).*

Démonstration. — On raisonne exactement comme dans la démonstration du corollaire **5.7.16** en remplaçant la référence à [**G1**] par [**G2**]. □

6. Principe de Köcher rigide et classicité

Soit $f \in \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}}^{rig}, \omega^\kappa)$ une forme modulaire rigide-analytique de poids $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$. Dans cette partie, nous montrons que lorsque la dimension complexe de l'espace symétrique de G est > 1, la forme f est algébrique donc provient d'une section de

$$\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\ \omega^\kappa)\ .$$

La démonstration s'effectue en trois temps : construction de compactifications toroïdales de X_{Iw} sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, prolongement de f aux compactifications toroïdales grâce à un principe de Köcher formel puis algébrisation de ce prolongement à la « GAGA ».

6.1. Compactifications toroïdales. — D'après [**Pin**], la variété de Shimura $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ admet des compactifications toroïdales dépendant de choix combinatoires d'éventails. Nous voulons construire des modèles entiers de ces compactifications sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. Lorsque le groupe G est égal au groupe symplectique GSp_{2g} sur $\mathbb{Q}$ avec $g \geqslant 1$, ces compactifications ont été construites dans [**St1**]. Lorsqu'on s'intéresse non pas à la variété X_{Iw} ayant mauvaise réduction sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ mais à la variété X ayant bonne réduction sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, de telles compactifications ont été construites inconditionnellement dans [**La**]. Ces deux approches sont en fait compatibles et leur union permet de construire des compactifications toroïdales de X_{Iw} sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. On obtient le théorème suivant.

Théorème 6.1.1. — *Soit $\mathfrak{S}$ un choix combinatoire comme dans* [**La**, déf. 6.3.3.2]. *On peut lui associer canoniquement une compactification toroïdale $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ de X_{Iw} sur* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. *Le changement de base de $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ à* $\mathrm{Spec}(K)$ *coïncide avec la compactification toroïdale de* $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K)$ *associée à $\mathfrak{S}$ dans* [**Pin**]. *Localement pour la topologie étale, le voisinage du bord de $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ admet la description explicite donnée dans* [**La**, th. 6.4.4.1.(5)]. *Le faisceau ω^κ s'étend canoniquement en un faisceau localement libre sur $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ pour tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$.*

Remarque 6.1.2. — Expliquons ce que nous entendons par la description de [**La**, th. 6.4.4.1.(5)]. La variété de Shimura X_{Iw} admet un modèle canonique sur l'anneau d'entiers $\mathcal{O}_E$ du corps réflexe E. Lan a construit des compactifications toroïdales de X_{Iw} au-dessus de l'ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_E)$ formé des places de bonne réduction et a donné une description explicite du voisinage de leur bord. Sa description garde un sens au-dessus du lieu de mauvaise réduction $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. C'est cette description étendue à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ qui est mentionnée dans l'énoncé du théorème **6.1.1**.

Esquisse de démonstration. — Les résultats de [**St1**] montrent que dès qu'une variété de Shimura PEL quelconque Y_{Iw} sur un schéma S se fibre par oubli du niveau au-dessus d'une variété de Shimura PEL notée Y sur S et qu'on sait construire des compactifications toroïdales de Y sur S en adaptant la méthode de [**FC**], on peut en déduire l'existence de compactifications toroïdales de Y_{Iw} sur S sous deux hypothèses. La première de ces hypothèses est la propreté du morphisme d'oubli du niveau de Y_{Iw} vers Y. Elle sert à prouver que les compactifications toroïdales de Y_{Iw} sont bien propres sur S. La seconde de ces hypothèses est la normalité de Y_{Iw} qui est utilisée à plusieurs endroits cruciaux de [**St1**]. D'après [**St1**, prop. 3.1.7.1], cette normalité est automatique dès que S est un schéma de Dedekind, que Y_{Iw} est plat sur S et que les fibres du morphisme de Y_{Iw} dans S sont réduites.

On applique cela à $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$, $Y = X$ et $Y_{\mathrm{Iw}} = X_{\mathrm{Iw}}$. La propreté du morphisme de X_{Iw} dans X consistant à oublier le drapeau est évidente. De plus, ce morphisme est plat à fibres réduites d'après [**G1**] dans le cas (A) et [**G2**] dans le cas (C). Enfin, l'adaptation des méthodes de [**FC**] pour construire les compactifications toroïdales de X a été réalisée dans [**La**]. □

Remarque 6.1.3. — La démonstration du théorème **6.1.1** est valable sans l'hypothèse **1.1.1** garantissant que le groupe G est déployé sur $\mathbb{Q}_p$. Il suffit de supposer G non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, c'est-à-dire avec les notations de **1.1.1** de supposer $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ isomorphe à un produit d'algèbres de matrices sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$.

On fixera désormais un choix combinatoire $\mathfrak{S}$ comme dans le théorème **6.1.1** et l'on notera $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ la compactification toroïdale de X_{Iw} associée sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$.

Remarque 6.1.4. — Si le groupe G est anisotrope sur $\mathbb{Q}$, le schéma X_{Iw} est propre sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$. Dans ce cas, il n'y a qu'un choix combinatoire $\mathfrak{S}$ possible et on a $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} = X_{\mathrm{Iw}}$.

6.2. Principe de Köcher. — Dans ce paragraphe, on suppose que la dimension complexe de l'espace symétrique de G est > 1. En utilisant les notations du paragraphe **1.1**, on suppose donc $d > 1$ ou $a_1 > 1$ si $d = 1$. Expliquons le principe de Köcher qui montre que les sections de ω^κ sur X_{Iw} s'étendent toujours à $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$.

Proposition 6.2.1. — *Pour tout schéma S sur* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ *et tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$, l'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0(\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \times S,\, \omega^\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}} \times S,\, \omega^\kappa)\,.$$

Démonstration. — On raisonne exactement comme dans [**FC**, V.1.3] ou [**St2**, prop. 2.5.6]. Mentionnons juste les quelques différences. Tout d'abord, les références précédentes se concentrent sur le cas où le poids κ est diagonal mais leurs résultats s'étendent sans peine au cas général. La démonstration de [**St2**, prop. 2.5.1] utilise ensuite un résultat de Yu disponible pour les variétés de Siegel mais pas pour les variétés de Shimura PEL générales. Donnons un nouvelle preuve de [**St2**, 2.5.1] ne faisant pas appel à ce résultat de Yu. Il s'agit de montrer que toute composante irréductible de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ rencontre le bord de $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$. Par densité des strates de Kottwitz–Rapoport ordinaires dans $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$, chaque composante irréductible de $X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ s'envoie surjectivement sur $X \times \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi)$ par le morphisme d'oubli du niveau. On conclut en remarquant que X est propre si et seulement si X_{Iw} l'est. □

On en déduit le corollaire suivant en appliquant la proposition **6.2.1** à $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\pi^n)$ pour tout $n \geqslant 1$. On y note $\bar{\mathfrak{X}}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ et $\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}}$ les complétions formelles π-adiques de $\bar{X}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}}$ et de X_{Iw}.

Corollaire 6.2.2. — *Pour tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$, l'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0(\bar{\mathfrak{X}}_{\mathrm{Iw}}^{\mathfrak{S}},\, \omega^\kappa) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_{\mathrm{Iw}},\, \omega^\kappa)\,.$$

On en déduit le principe de Köcher rigide suivant en passant aux fibres génériques rigides.

Corollaire 6.2.3. — *Pour tout $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$, l'application de restriction induit un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left((\bar{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{S}}_{\mathrm{Iw}})^{rig},\, \omega^\kappa\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left(\mathfrak{X}^{rig}_{\mathrm{Iw}},\, \omega^\kappa\right).$$

Rappelons le corollaire suivant du principe « GAGA » en géométrie rigide-analytique [**Ki**].

Proposition 6.2.4. — *Le morphisme d'analytification suivant est un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0\left(\bar{X}^{\mathfrak{S}}_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0\left((\bar{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{S}}_{\mathrm{Iw}})^{rig},\, \omega^\kappa\right)$$

6.3. Le critère de classicité. — Combinons à présent divers résultats démontrés dans cet article et énonçons le théorème principal. Il généralise le critère de classicité de Coleman [**Co**] à toutes les variétés de Shimura PEL de type (A) et (C) associées à un groupe déployé sur $\mathbb{Q}_p$.

Théorème 6.3.1. — *Soit X_{Iw} une variété de Shimura PEL de type (A) ou (C) de niveau iwahorique en p associée à des données PEL vérifiant l'hypothèse **1.1.1**. Soit $\kappa \in X^+(\mathrm{T_M})$ un poids dominant et $f \in \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}}, \kappa)^\dagger$ une forme modulaire surconvergente de poids κ. Supposons f propre pour U_i de valeur propre non nulle pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. Supposons κ grand devant les valuation p-adiques de ces valeurs propres dans le sens de l'hypothèse **5.5.1**. La forme f est classique, c'est-à-dire dans l'image de l'injection*

$$\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa) \hookrightarrow \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\, \kappa)^\dagger.$$

Démonstration. — Lorsque G ne vérifie pas l'hypothèse **1.4.2** donc a le demi-plan de Poincaré pour espace symétrique, le théorème résulte de [**Co**] ou de [**Ka**]. Supposons donc que la dimension complexe de l'espace symétrique de G soit > 1. Grâce au corollaire **5.6.2** dans le cas (A) et au corollaire **5.7.16** dans le cas (C), la forme f est dans l'image du morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^0(X^{rig}_{\mathrm{Iw}},\, \omega^\kappa) \hookrightarrow \mathrm{M}(X_{\mathrm{Iw}},\, \kappa)^\dagger.$$

On conclut en appliquant le corollaire **6.2.3** et les propositions **6.2.4** et **6.2.1** en vertu desquels les morphismes suivants de restriction et d'analytification sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0\left(\bar{X}^{\mathfrak{S}}_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0\left((\bar{X}^{\mathfrak{S}}_{\mathrm{Iw}})^{rig},\, \omega^\kappa\right) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^0\left(X_{\mathrm{Iw}} \times \mathrm{Spec}(K),\, \omega^\kappa\right) & \longrightarrow & \mathrm{H}^0\left(X^{rig}_{\mathrm{Iw}},\, \omega^\kappa\right)
\end{array}$$

□

Remarque 6.3.2. — Nous aurions pu démontrer la classicité de f lorsque l'espace symétrique de G est de dimension un sans recourir à [**Co**] et [**Ka**]. Il aurait fallu mener l'étape de prolongement analytique de la partie 5 en tenant compte des pointes de la variété de Shimura, qui est essentiellement une courbe modulaire dans ce cas.

Références

[AIP] F. Andreatta, A. Iovita et V. Pilloni, *Families of Siegel modular forms*, prépublication (2011).

[AM] A. Abbes et F. Mokrane, *Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p-adiques pour les variétés abéliennes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **99** (2004).

[AG] F. Andreatta et C. Gasbarri, *The canonical subgroup for families of abelian varieties*, Compositio Math. **143** (2007).

[Be] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Première partie, prépublication (1996), disponible sur `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[Bu1] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Jour. Amer. Math. Soc. **16** (2002).

[Bu2] K. Buzzard, *Eigenvarieties*, dans « L-functions and Galois representations », London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. **320**, Cambridge Univ. Press (2007).

[Ch] G. Chenevier, *Familles p-adiques de formes automorphes pour* GL_n, J. Reine Angew. Math. **570** (2004).

[Co] R. Coleman, *Classical and overconvergent modular forms*, Invent. Math. **124** (1996).

[dJ] A. J. de Jong, *The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with* $\Gamma_0(p)$*-level structure*, J. Algebraic Geom. **2** (1993).

[EGA3] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, tome 1, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **11** (1961).

[EGA4] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, tome 3, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **28** (1966).

[FC] G. Faltings et C. L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete vol. **22**, Springer-Verlag (1990).

[Fa1] L. Fargues, *La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats*, J. Reine Angew. Math. **645** (2010).

[Fa2] L. Fargues, *La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles*, avec la collaboration de Yichao Tian, à paraître à Ann. Sci. École Norm. Sup.

[GN] A. Genestier et B. C. Ngô, *Alcôves et p-rang des variétés abéliennes*, Ann. Inst. Fourier **52** (2002).

[G1] U. Görtz, *On the flatness of models of certain Shimura varieties of PEL type*, Math. Ann. **321** (2001).

[G2] U. Görtz, *On the flatness of local models for the symplectic group*, Adv. in Math. **176** (2003).

[H1] T. Haines, *The combinatorics of Bernstein functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001).

[H2] T. Haines, *Introduction to Shimura varieties with bad reduction of parahoric type*, dans « Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties », Clay Math. Proc. vol. **4**, Amer. Math. Soc. (2005).

[HT] M. Harris et R. Taylor, *The geometry and cohomology of simple Shimura varieties*, Ann. of Math. Stud. vol. **151**, Princeton University Press (2001).

[He] X. He, *Normality and Cohen-Macaulayness of local models of Shimura varieties*, preprint (2012).

[Ka] P. Kassaei, *A gluing lemma and overconvergent modular forms*, Duke Math. J. **132** (2006).

[Ki] R. Kiehl, *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Inv. Math. **2** (1967).

[Ko] R. Kottwitz, *Points on Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992).

[KR] R. Kottwitz et M. Rapoport, *Minuscules alcoves for* GL_n *and* GSp_{2n}, Manuscripta Math. **102** (2000).

[La] K.W. Lan, *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, thèse de doctorat, université d'Harvard (2008).

[Me] W. Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics vol. 264, Springer (1972).

[Oo] F. Oort, *Newton polygons and formal groups : conjectures by Manin and Grothendieck*, Ann. of Math. **152** (2000).

[PRS] G. Pappas, M. Rapoport, and B. Smithling, *Local models of Shimura varieties, I. Geometry and combinatorics*, to appear in the Handbook of Moduli (2011).

[Pi] V. Pilloni, *Prolongement analytique des formes de Siegel de genre* 2, à paraître à Duke Math. J.

[PS1] V. Pilloni et B. Stroh, *Sous-groupes canoniques partiels*, Manuscripta Math. **133** (2010).

[PS2] V. Pilloni et B. Stroh, *Surconvergence et classicité : le cas Hilbert*, prépublication (2011).

[Pin] R. Pink, *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, thèse de doctorat, universitéf de Bonn (1989).

[Sa] S. Sasaki, *Analytic continuation of overconvergent Hilbert eigenforms*, Compositio Math. **146** (2010).

[SGA2] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie SGA 2. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, Adv. Studies in Pure Math. vol. 2 (1968).

[SGA3] M. Demazure et A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie SGA 3. Schémas en groupes II*, Lecture Notes in Mathematics vol. **152**, Springer (1970).

[St1] B. Stroh, *Compactifications des variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction*, Bull. Soc. Math. France **138** (2010).

[St2] B. Stroh, *Compactification minimale et mauvaise réduction*, Ann. Inst. Fourier **60** (2010).

[Ta] J. Tate, *p-Divisible groups*, Proc. of Conf. on Local fields (Driebergen, 1996), Springer, 1967, p. 158-183.

[Ti] Y. Tian, *Classicality of overconvergent Hilbert eigenforms : case of quadratic residue degrees*, prépublication (2011).

[Ur] E. Urban, *Eigenvarieties for reductive groups*, Ann. of Math. **174** (2011).

[We] T. Wedhorn, *Ordinariness in good reductions of Shimura varieties of PEL type*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **32** (1999).

---

15 janvier 2012

Vincent Pilloni et Benoît Stroh • *Courriel :* `vincent.pilloni@umpa.ens-lyon.fr`, `stroh@math.univ-paris13.fr`, CNRS, ENS Lyon, UMPA, 46, allée d'Italie 69364 Lyon France
CNRS, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France