

Chapitre 6

Modèle moyen de Terre

Nous allons ici discuter des modèles à symétrie sphérique de la Terre. Les propriétés de la Terre seront donc supposées ne dépendre que de la coordonnée sphérique r , ou de la profondeur z comptée positive depuis la surface vers l'intérieur. La masse volumique sera notée $\rho(r)$. On donne les valeurs numériques suivantes : le rayon de la Terre, $a = 6400$ km, l'intensité de la pesanteur en surface $g_0 = 9,81$ m s⁻², et la constante gravitationnelle, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻². La constante gravitationnelle est déduite de l'expérience de Cavendish (1731-1810) qui fut d'ailleurs appelée expérience de pesée de la Terre.

6.1 Pesanteur à l'intérieur de la Terre

Ne ne considérons pas ici la force centrifuge qui est aussi une composante de la force de pesanteur observée. Le théorème de Gauss nous indique que le champ de gravitation à la distance r du centre d'une distribution de masse à symétrie sphérique est identique à celui d'une particule matérielle, confondue avec le centre de cette sphère, où serait concentrée toute la masse interne à la sphère de rayon r . On peut donc écrire:

$$g(r) = G \frac{M(r)}{r^2} \quad (6.1)$$

En admettant que la pesanteur soit uniquement due à l'attraction newtonienne, nous avons donc

$$g_0 = G \frac{M_T}{a^2} \quad (6.2)$$

où est la masse de la Terre est M_T . Cela permet de calculer $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Sa masse volumique moyenne déduite de

$$M_T = \frac{4}{3} \pi \bar{\rho} a^3 \quad (6.3)$$

est $\bar{\rho} = 5480$ kg m⁻³.

La Terre n'a pas une masse volumique uniforme. D'ailleurs sa masse volumique moyenne est bien supérieure celle des roches de sa surface ($\rho_c = 2700$ kg m⁻³ pour les roches crustales, $\rho_m = 3200$ kg m⁻³ pour les roches mantelliques). Pour avoir une idée des variations de la gravité et de la pression avec la profondeur dans une planète

dont la densité serait uniforme, faisons cependant cette hypothèse. Dans ce cas

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}r = g_0\frac{r}{a} \quad (6.4)$$

Le centre d'une planète et donc celui de la Terre sont donc en état d'apesanteur.

Bien que l'essentiel de la Terre soit solide, supposons que son intérieur soit en équilibre sous l'action des forces pressantes et des forces de gravitation comme si la planète entière était liquide. La pression atmosphérique à la surface est considérée ici comme négligeable. Dans ce cas l'équilibre hydrostatique impose que

$$dP = -\bar{\rho}g(r)dr \quad (6.5)$$

Soit

$$P(r) = \frac{1}{2}\frac{\bar{\rho}g_0}{a}(a^2 - r^2) \quad (6.6)$$

La pression varie, dans cette hypothèse d'homogénéité de façon parabolique et la pression au centre serait de $P(r=0) = \frac{1}{2}\bar{\rho}g_0a = 1.7 \cdot 10^{11}$ Pa.

Des mesures astronomiques permettent de connaître le moment d'inertie I de la Terre par rapport à son axe de rotation, $I = 8,02 \cdot 10^{37}$ kg m². Cette quantité vaut simplement

$$I = \iiint d^2\rho dV \quad (6.7)$$

où d est la distance par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Si la masse volumique ne dépend que du rayon, on peut facilement montrer que cette quantité vaut

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^a \rho(r)r^4 dr \quad (6.8)$$

Si la Terre avait une masse volumique uniforme, son inertie serait de $9.85 \cdot 10^{37}$ kg m², donc supérieure celle observée. Cela indique que la Terre concentre sa densité vers son centre.

On imagine maintenant que la Terre est constituée de deux couches de masses volumiques uniformes, une couche de masse volumique ρ_+ s'étendant du centre jusqu'au rayon r_i et surmontée d'une couche de masse volumique ρ_- . Dans ce cas là il est facile de déterminer les deux densités qui vérifient

$$M = \frac{4}{3}\pi(\rho_-a^3 + (\rho_+ - \rho_m)r_i^3) \quad (6.9)$$

$$I = \frac{8}{15}\pi(\rho_-a^5 + (\rho_+ - \rho_m)r_i^5) \quad (6.10)$$

La résolution de ces deux équations donne

$$\rho_- = \frac{3}{8\pi a^3} \frac{5I - 2r^2 M_T}{a^2 - r^2} \quad (6.11)$$

$$\rho_+ = \frac{3}{8\pi a^3 r^3} \frac{2M(r^4 + a^4 + ra^3 + a^2r^2 + ar^3) - 5I(a^2 + ar + r^2)}{a + r} \quad (6.12)$$

Un modèle à deux couches doit nécessairement avoir

$$r_i \leq \sqrt{\frac{5I}{2M}} \quad (6.13)$$

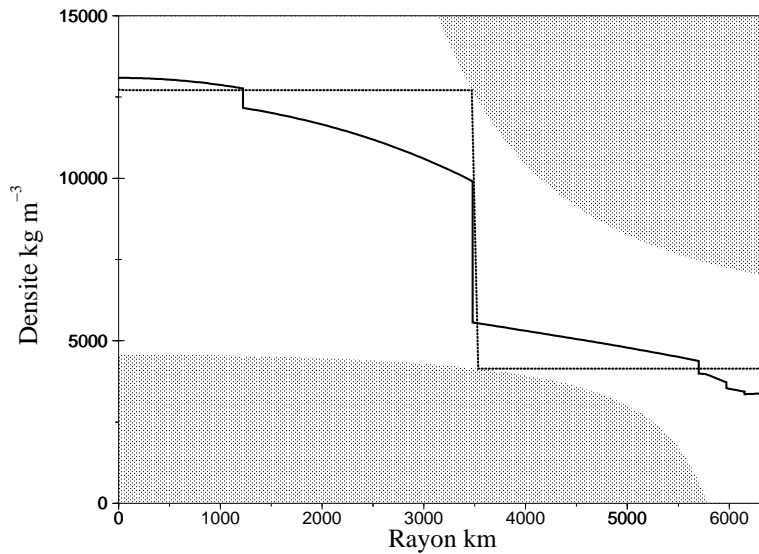


Figure 6.1: La densité à l'intérieur de la Terre est indiquée par un trait épais. La densité d'un modèle à deux couches qui est en accord avec les observations de la masse et de l'inertie de la Terre est figurée en pointillé. L'ensemble des modèles acceptables doit de façon générale s'inscrire dans la zone non-grisée.

car sinon ρ_- serait négatif. Pour la Terre $r_i \leq 5780$ km.

Les modèles de la sismologie montrent une discontinuité majeure correspondant $r = 3500$ km. Dans ce cas les deux équations précédentes impliquent que $\rho_+ = 12700$ kg m^{-3} et $\rho_- = 4150$ kg m^{-3} . Avec ces hypothèses, la masse du noyau serait de

$$M_n = \frac{4}{3}\pi\rho_+r_i^3 = 36\%M_T \quad (6.14)$$

La figure 6.1 montre le vrai profil de densité de la Terre ainsi que celui que nous venons de déduire de ce modèle simpliste à deux couches.

En utilisant notre petit modèle à deux couches, nous pouvons calculer la gravité qui est dessinée sur la Figure 6.2. La gravité prédite à l'interface noyau-manteau serait alors de 11.7 m s^{-2} , c'est dire supérieure la gravité en surface. Cel ne doit pas nous étonner, en effet dans la Terre la gravité à l'interface noyau-manteau est légèrement supérieure celle de la surface. La gravité réelle reste en fait proche de sa valeur en surface dans tout le manteau.

On abandonne l'hypothèse précédente d'une Terre constituée de deux couches homogènes. On considère maintenant que la masse volumique d'une planète ne peut que diminuer avec le rayon r . Cela paraît raisonnable, soit que la Terre soit constituée de couches hétérogènes ségréguées par la gravité, soit que la terre soit constituée d'un matériau homogène, comprimé par la pression.

On pourrait démontrer que si deux modèles à symétrie sphérique, de masses volumiques décroissantes avec r , correspondent à la même masse et la même inertie alors la différence de ces deux masses volumiques change au moins deux fois de signe entre 0 et a . Considérons une solution décroissante avec r qui est en accord avec la masse et l'inertie observées de la Terre. Comparons la avec un modèle à deux couches qui vérifie les mêmes observations et qui présente donc un saut de densité de ρ_+ à ρ_-

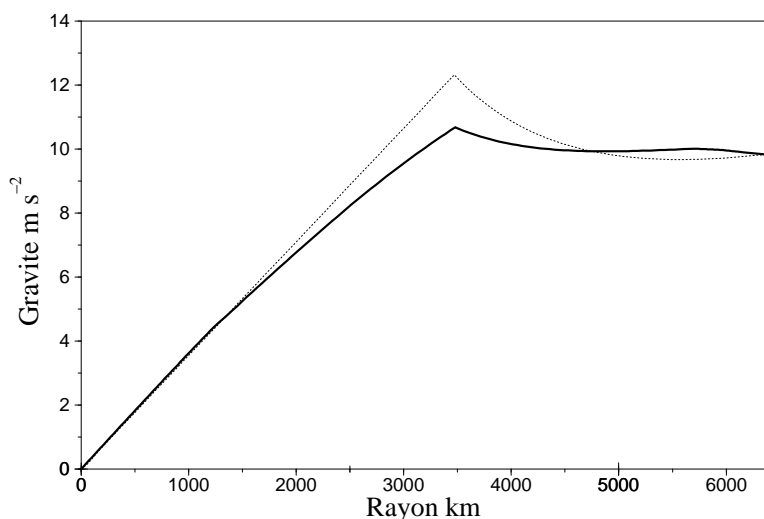


Figure 6.2: Variation radiale de la gravité suivant le modèle en deux couches de la Figure 6.1. La variation réelle est dessinée en trait gras.

la profondeur r_i . Cette fonction en escalier et la fonction $\rho(r)$, décroissante, doivent se couper deux fois au moins. Il est facile de se rendre compte que $\rho(r_i)$ doit forcément se situer entre ρ_- et ρ_+ . On doit donc résoudre le système (6.9) pour obtenir $\rho_-(r)$ et $\rho_+(r)$. La zone dans laquelle doit être comprise la masse volumique terrestre $\rho(r)$ est la zone non-grisée de la Figure 6.1.

6.2 Thermodynamique des solides à haute pression

À l'intérieur de la Terre, la pression $P(r)$ et la masse volumique $\rho(r)$ varient en fonction du rayon r . On note K la quantité $\rho \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{Terre}$. Cette fonction varie aussi avec le rayon. C'est l'incompressibilité de la Terre, mesurée à partir des propriétés radiales. Il est facile de relier cette quantité à la gravité en utilisant la définition de la pression

$$g = -\frac{K}{\rho^2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (6.15)$$

On peut maintenant multiplier cette équation par r^2 puis la dériver en se rappelant la définition de la gravité. On obtient:

$$\frac{d}{dr} \left(K \frac{r^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho r^2. \quad (6.16)$$

L'intégration de cette équation pourrait permettre de calculer la masse volumique terrestre si la fonction K était connue. Nous allons voir dans la suite que nous pouvons obtenir K soit comme fonction de la masse volumique grâce à la thermodynamique, soit comme fonction du rayon grâce à la sismologie.

Il n'y a pas d'équations d'état simple pour les solides équivalentes au $PV = nRT$ des gaz parfaits. Plusieurs équations sont utilisées qui sont souvent assez complexes (Birch-Murnaghan, Vinet...) et qui sont parfois "démontrées" dans des livres. En fait

il me semble que tout cela reste très empirique et dans la suite j'utiliserais une équation plus simple qui permet d'illustrer analytiquement tout ce que l'on pourrait faire, au moins numériquement avec une équation plus simple.

Je considère que les solides vérifient une équation d'état de la forme suivante :

$$P = a \frac{T - T_0}{V} + \frac{b}{V^n} + c \quad (6.17)$$

où a , b et c dépendent du nombre de moles de solide considéré et où la pression, la température et le volume sont notés P , T et V . L'exposant n peut être mesuré expérimentalement. Il dépend de la nature du solide et est généralement compris entre 3 et 4. Pour les applications concernant les silicates du manteau on prendra $n = 3,3$. La température $T_0 = 298$ K et la pression $P_0 = 0$ définissent l'état de référence. Dans cet état, ce solide occupe le volume V_0 .

On définit la dilatation isobare α par

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (6.18)$$

On note α_0 la dilatation isobare dans l'état de référence. Par dérivation de l'équation d'état $P = cte$ on obtient

$$\alpha = \frac{a}{a(T - T_0) + bnV^{1-n}} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0(T - T_0) + (V_0/V)^{n-1}} \quad (6.19)$$

La dilatation isobare diminue lorsqu'on s'enfonce dans une planète puisque T et $1/V$ y augmentent.

On définit l'incompressibilité isotherme K_T par

$$K_T = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \quad (6.20)$$

On note K_0 l'incompressibilité isotherme dans l'état de référence. Par dérivation de l'équation d'état $T = cte$ on obtient

$$K_T = a \frac{(T - T_0)}{V} - bn \frac{1}{V^n} = K_0 \left((V_0/V)^n + \alpha(T - T_0)(V_0/V) \right) \quad (6.21)$$

L'incompressibilité isotherme augmente lorsqu'on s'enfonce dans une planète.

Ces définitions précédentes nous ont permis de calculer les paramètres a , b et c en fonction de paramètres mesurables dans les conditions standards. Nous pouvons donc réécrire l'équation d'état du solide sous la forme

$$P = \frac{K_0}{n} \left(\left(\frac{V_0}{V} \right)^n - 1 \right) + \alpha_0 K_0 (T - T_0) \frac{V_0}{V} \quad (6.22)$$

Le manteau terrestre est constitué de silicates dont la masse volumique dans l'état de référence est $\rho_0 = 3300$ kg m⁻³ et tels que $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹ et $K_0 = 114 \cdot 10^9$ Pa. La masse volumique du manteau comprimé à une pression caractéristique du manteau (par exemple $1.7 \cdot 10^{11}$ Pa, comme obtenu en (6.6)) et maintenu à la température de référence sera

$$\rho = \rho_0 \left(1 + n \frac{P}{K_0} \right)^{1/n} \quad (6.23)$$

soit 5660 kg m⁻³, c'est à dire une augmentation de 70%.

Si le manteau restait à l'état solide à la température de 1500 K et à pression nulle, sa densité serait (d'après la définition de α ou par développement de l'équation d'état)

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (6.24)$$

soit 3150 kg m^{-3} , c'est dire une diminution de 4.5%.

Les deux applications précédentes indiquent que la densité dans une planète dépend essentiellement de la pression.

Cela signifie que la masse volumique du manteau ne varie presque qu'en fonction de la température suivant l'équation (6.23) que nous avons écrit plus haut (Équation de Birch). L'incompressibilité varie donc essentiellement comme

$$K_T \sim K_0 + nP \quad (6.25)$$

c'est donc une fonction linéaire de la pression.

On admet que le manteau terrestre est constitué d'un silicate de formule chimique $\text{Mg}_{1,8}\text{Fe}_{0,2}\text{Si O}_4$. On donne :

Élément	Mg	Fe	Si	O
Masse molaire (g mol^{-1})	24,3	55,8	28,1	16,0

Le matériel constituant le manteau peut subir une transformation élémentaire réversible. On note la chaleur échangée par :

$$\delta Q = C_V dT + \ell dV, \quad (6.26)$$

en variables T, V , ou :

$$\delta Q = C_P dT + h dP, \quad (6.27)$$

en variables T, P . On admettra que le seul travail que le système peut échanger est celui des forces de pression. Puisque $dU = \delta Q - PdV$, $dH = dU + d(PV)$ et $dS = \delta Q/T$ sont des différentielles totales exactes, on en déduit simplement que

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V. \quad (6.28)$$

$$\ell = \alpha T K_T \quad (6.29)$$

$$h = -\alpha T V \quad (6.30)$$

D'après notre équation d'état $\partial^2 P / \partial T^2 = 0$ et C_V ne peut être qu'une fonction de T . À haute température, la capacité thermique d'une mole d'atomes d'un solide tend vers $C_{Vm} = 3R$ où R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$). Cette limite est une assez bonne approximation aux températures du manteau terrestre. Une mole de manteau représente 7 moles d'atomes et a donc une capacité thermique molaire $C_{Vm} = 21R = 174.7 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$. La chaleur massique du manteau (147 g de masse molaire) est donc $c_V = 174.7/0.147 = 1.188 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

On définit Γ , le paramètre de Gruneisen, comme la quantité

$$\Gamma = \frac{\alpha K_T V_m}{C_{Vm}} \quad (6.31)$$

où V_m est le volume d'une mole de manteau. On peut aisément vérifier qu'il s'agit d'un nombre sans dimension. D'après la définition de K_T et α , nous avons simplement

$$\Gamma = \frac{\alpha_0 K_T}{\rho_0 c_v} \quad (6.32)$$

C'est donc une constante qui vaut numériquement 0.88 avec les valeurs numériques que nous avons choisies.

Il est très difficile de mesurer expérimentalement la capacité thermique isochore C_V d'un solide. Il est en effet plus facile de contrôler une pression qu'un volume. On mesure donc plutôt la capacité thermique isobare C_P . En utilisant les deux expressions de la chaleur échangée, on montre simplement que

$$C_p - C_v = -\ell \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad (6.33)$$

ce qui s'écrit encore d'après les définitions précédentes

$$C_P - C_V = -\Gamma \alpha T C_V \quad (6.34)$$

ou encore

$$\frac{C_P}{C_V} = 1 - \alpha T \Gamma \quad (6.35)$$

puisque Γ est de l'ordre de l'unité et $\alpha T \ll 1$, les deux capacités restent toujours proches.

6.3 Équilibre adiabatique du manteau

On considère souvent que la diffusion de la chaleur est si lente dans les silicates qu'on peut la négliger. On négligera aussi la production de la chaleur par décroissance radioactive ainsi que tous les processus irréversibles. Cela n'a rien d'évident. Dans son mouvement ascendant ou descendant, une particule de manteau subirait une transformation réversible adiabatique.

Si une particule de manteau n'échange pas de chaleur avec son environnement, $\delta Q = 0$. En utilisant l'expression xxx et la définition de Γ qui permet d'écrire $\ell = C_V T \Gamma / V$, on démontre que durant son déplacement, la température du manteau et sa densité sont liées par

$$TV^\Gamma = Cte \quad (6.36)$$

ou encore

$$T\rho^{-\Gamma} = Cte \quad (6.37)$$

L'équation précédente a été obtenue en utilisant les variables $T - V$. En utilisant les variables $P - T$ et en appliquant l'équation fondamentale de la statique des fluides on démontre que lorsqu'une particule s'enfonce d'une quantité dz , sa température croît d'une quantité dT telle que :

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_S = \frac{T\alpha g}{c_P}. \quad (6.38)$$

On appelle cette quantité le gradient adiabatique.

Pour justifier que le manteau soit globalement en équilibre adiabatique on fait généralement le discours peu satisfaisant suivant (les processus dissipatifs font que le manteau n'est pas en équilibre adiabatique). On note :

$$\left(\frac{dT}{dz} \right)_{Terre} \quad (6.39)$$

la vraie variation de la température avec la profondeur dans la Terre. Si une particule se déplace de façon adiabatique réversible, d'une profondeur dz , elle est alors soumise à la force ascensionnelle (une poussée d'Archimède) dF par unité de masse, telle que

$$dF = \alpha g \left\{ \left(\frac{dT}{dz} \right)_{Terre} - \left(\frac{dT}{dz} \right)_S \right\} dz. \quad (6.40)$$

Le fait que le manteau terrestre soit en convection vigoureuse, indique que dF n'est pas une force de rappel. dF devrait donc être positif. Cependant dF ne peut pas être trop grand car ce terme représente le moteur de la convection, et une convection trop forte va nécessairement homogénéiser la température. Qualitativement que ces deux gradients doivent donc être presque égaux.

En admettant que $g \simeq g_0$, $c_P \simeq c_V$ et que le manteau est en équilibre adiabatique, on en déduit que

$$T \geq T_0 \exp(\alpha_0 g_0 z / c_v) \quad (6.41)$$

Le signe \geq rappelant que α doit être inférieur à α_0 .

Avec une température sous la lithosphère de 1350 K, la température au bas du manteau, à une profondeur de 2900 km devrait être inférieure à 2930 K, du moins s'il n'y a pas de couche limite thermique au travers du manteau où à l'interface noyau-manteau.

6.4 Modèle thermodynamique de la masse volumique terrestre

Dans l'approximation où le manteau est adiabatique, l'incompressibilité empirique de la Terre, K doit être égal à K_S ,

$$K_S = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S \quad (6.42)$$

A entropie constante, une variation de température dT , s'accompagne d'une variation de volume et de pression tels que

$$dT = -\frac{\ell}{C_V} dV = -\frac{h}{C_P} dV \quad (6.43)$$

On a donc

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{h}{\ell} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \frac{K_T}{K_S} \quad (6.44)$$

K_S et K_0 ne sont donc pas très différents.

Nous savons donc relier l'incompressibilité adiabatique du manteau à la masse volumique et à des paramètres mesurés dans l'état de référence.

La masse volumique à l'intérieur du manteau terrestre pourrait être calculée en utilisant xxx du moins, la où le manteau est adiabatique et homogène.

Pratiquement, l'approximation $K_S \sim K_0$ et le peu de rôle du à la variation de la température conduisent à

$$K_S \sim K_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n. \quad (6.45)$$

L'incompressibilité croît donc rapidement avec la masse volumique. Elle ne permet pas une résolution analytique de l'équation démontrée en C2). Au XVIII^{ème} siècle,

6.4. MODÈLE THERMODYNAMIQUE DE LA MASSE VOLUMIQUE TERRESTRE 67

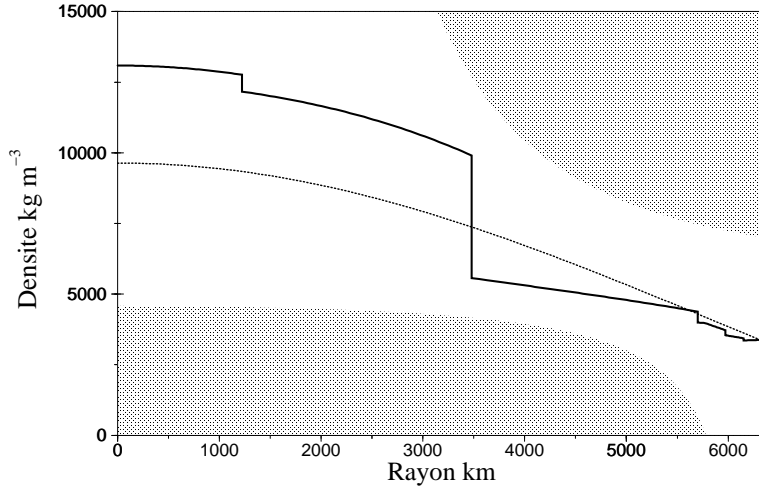


Figure 6.3: La densité à l'intérieur de la Terre est indiquée par un trait épais. Le modèle de Laplace est figuré en pointillé. L'ensemble des modèles acceptables doit de façon générale s'inscrire dans la zone non-grisée.

Laplace avait suggéré que l'incompressibilité croissait comme le carré de la masse volumique : $K_S = m\rho^2$. Il ne connaissait ni la valeur de la constante m ni celle de l'incompressibilité dans l'état de référence.

Dans ce cas, la variation de la masse volumique avec la profondeur solution de l'équation (6.16) est donnée par

$$\rho = \rho_c \frac{\sin(pr)}{pr}, \quad (6.46)$$

où ρ_c est la masse volumique au centre de la planète et

$$p = \sqrt{4\pi G/m} \quad (6.47)$$

Avec cette expression, on peut calculer par exemple la densité en surface

$$\rho_0 = \rho_c \frac{\sin(pa)}{pa}, \quad (6.48)$$

et la masse de la Terre

$$M_T = 4\pi\rho_c \frac{1}{p} \int \sin(pr)r dr = 4\pi\rho_c \frac{\sin(pr) - pr \cos(pr)}{p^2} \quad (6.49)$$

La résolution des deux équations précédentes en m et ρ_c conduit à $\rho_c = 9637 \text{ kg m}^{-3}$ et $p = 3.544 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-1}$. Le modèle de Laplace est dessiné sur la Figure 6.3 C'est à dire encore $K_0 = m\rho_0^2 = 0.73 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. La compressibilité estimée par Laplace n'était pas si absurde!

Bien sûr, au lieu de calculer les paramètres en utilisant la densité en surface, nous aurions pu utiliser l'inertie. Numériquement il ne serait pas difficile de calculer des modèles en accord avec ρ_0 , M_T et I , présentant une discontinuité à l'interface noyau-manteau et ayant une compressibilité connue.

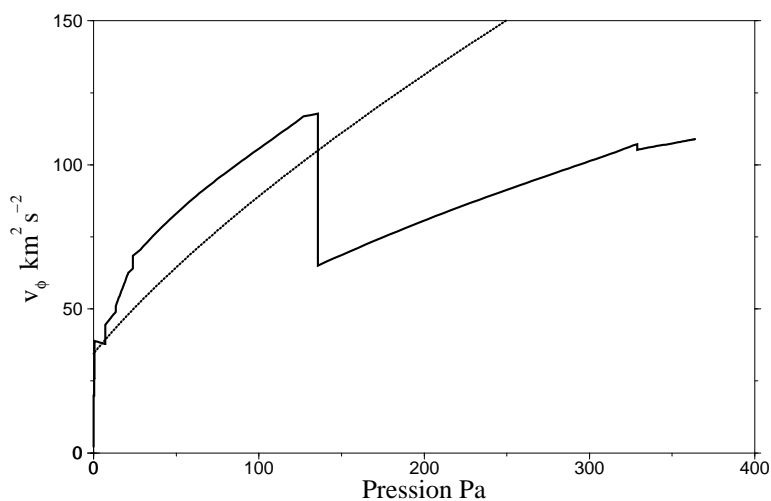


Figure 6.4: La vitesse v_{phi} telle qu'elle est observée dans le manteau terrestre (trait épais et telle que nous l'avons prédite avec notre équation d'état.

6.5 Apport des données sismologiques

À l'intérieur d'un solide, deux types d'ondes sismiques peuvent se propager. Ces ondes ont pour célérités :

$$v_p = \sqrt{\frac{3K_S + 4\mu}{3\rho}} \quad \text{et} \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (6.50)$$

où μ est un paramètre appelé rigidité. L'étude de la propagation des ondes sismiques permet de connaître les valeurs de ces vitesses en fonction de la profondeur. On note v_ϕ la quantité $v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2$. On a, bien sûr

$$v_\phi^2 = \frac{K_S}{\rho}. \quad (6.51)$$

La Figure 6.4 montre cette vitesse dite 'acoustique' telle qu'elle est observée par les sismologues. Le modèle que nous avons utilisé conduit avec les équation (6.23) et (6.25) à la courbe en pointillé.

Fondamentalement, un modèle de densité réaliste utilisera l'ensemble des ingrédients que nous avons vu ; une hypothèse adiabatique, des compressibilités déduites de modèles sismologiques où inspirées de modèles thermodynamiques, la connaissance de la masse, de l'inertie et de la densité en surface, et essaiera de panacher ces éléments avec les couches observées par la sismologie, ainsi qu'avec les contraintes des modes propres sismologiques sphéroïdaux qui sont sensibles à la structure de densité.

Les modèles de température chercheront eux aussi à utiliser les rares contraintes des équilibres de phases (équilibres graine-noyau, ou spinelle-postspinelle) et à extrapoler entre ces points d'ancrage, loin des couches thermiques limites, grâce à l'hypothèse d'adiabaticité.