

Phénomènes de rigidité dans les groupes modulaires des surfaces

Yassine Guerch

Encadrant: Camille Horbez

Université Paris-Sud

26 août 2019

Table des matières

1	Introduction	3
2	Notions et résultats préliminaires	6
2.1	Premières définitions	6
2.2	Le groupe modulaire d'une surface	13
2.3	Les twists de Dehn	15
2.4	Espaces munis d'action du groupe modulaire	23
2.4.1	Le complexe des courbes	23
2.4.2	Le complexe des arcs	26
3	Automorphismes du complexe des courbes	29
3.1	Injectivité de $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut } C(S)$	29
3.2	Propriétés de $\text{Aut } C(S)$	30
3.3	Propriétés de $\text{Aut } A(S)$	38
3.4	De $\text{Aut } C(S)$ vers $\text{Aut } A(S)$	41
4	Le commensurateur abstrait de $\text{Mod}(S)$	70
4.1	Espace de Teichmüller et classification de Nielsen-Thurston	73
4.1.1	Espace de Teichmüller	73
4.1.2	Feuilletages singuliers mesurés	76
4.1.3	Classification de Nielsen-Thurston	83
4.1.4	Propriétés des éléments pseudo-Anosov	85
4.2	Éléments purs de $\text{Mod}(S)$	86
4.2.1	Le groupe $\Gamma_S(m)$	86
4.2.2	Propriétés des éléments purs	94
4.2.3	Sous-groupes de $\Gamma_S(m)$	100
4.3	Stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes	102

1. Introduction

Soit S une surface compacte, connexe, orientée. Le *groupe modulaire* de S , noté $\text{Mod}(S)$, est le groupe constitué des classes d'isotopies d'homéomorphismes de S dans elle-même, préservant l'orientation et étant égaux à l'identité sur le bord de la surface. C'est un groupe de première importance dans l'étude des surfaces car il encode des informations sur les symétries de la surface. Par ailleurs, $\text{Mod}(S)$ agit naturellement sur l'espace de Teichmüller, et donc, l'étude de $\text{Mod}(S)$ donne des informations sur ce dernier. Le groupe $\text{Mod}(S)$ est ainsi un groupe clé dans la théorie des surfaces de Riemann. Enfin, le groupe modulaire apparaît naturellement dans la théorie des variétés de dimension 3, car une construction de variété de dimension 3 passe par l'identification du bord d'anses par des homéomorphismes de surface.

Les groupes modulaires des surfaces ont ainsi été étudiés de longue date, dès le début du vingtième siècle par Dehn [Deh], qui cherchait à comprendre la structure algébrique du groupe modulaire. Nielsen [Nie3, Nie4, Nie5, Nie1, Nie2], quant à lui, étudia le comportement individuel des éléments de $\text{Mod}(S)$. Cette étude de $\text{Mod}(S)$ fut ensuite poursuivie, notamment dans les années 1970 avec les travaux de Thurston [FLP].

Dans ce mémoire, nous étudierons les symétries de $\text{Mod}(S)$. Plus précisément, nous examinerons les isomorphismes entre sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}(S)$. En effet, nous chercherons à comprendre dans quelle mesure un tel isomorphisme diffère d'une conjugaison par un élément du groupe modulaire. Nous présenterons dans ce contexte la preuve du théorème suivant, dû à Ivanov ([Iva1]) :

Théorème 4.3. *Soit S une surface homéomorphe à une surface $S_{g,n}$ de genre g avec n points retirés de la surface. On suppose que $g \geq 2$ et $(g, n) \neq (2, 0)$. Soient H_1, H_2 des sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}(S)$, et $F: H_1 \rightarrow H_2$ un isomorphisme. Alors il existe un unique $f \in \text{Mod}(S)$ tel que, pour tout $h \in H_1$,*

$$F(h) = fhf^{-1}.$$

Le théorème énoncé est un théorème dit de *rigidité* car il montre que le groupe modulaire n'a pas d'autres symétries que celles induites par des conjugaisons. Plus généralement, nous entendrons par rigidité la construction d'un espace géométrique sur lequel agit le groupe étudié et dont le groupe des automorphismes contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe au groupe étudié.

La construction de tels espaces géométriques est un outil classique de théorie géométrique des groupes. Nous allons ainsi prouver au préalable un autre théorème de rigidité afin de prouver le premier théorème énoncé. L'espace géométrique que nous allons utiliser dans ce cas est un objet combinatoire, il s'appelle le *complexe des courbes*, noté $C(S)$. Il s'agit du complexe simplicial drapeau dont les sommets sont les classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles de S et où deux sommets sont reliés par une arête s'il existe des représentants des classes d'isotopie qui ne s'intersectent pas.

La première partie du mémoire aura donc pour objectif de prouver le théorème de rigidité suivant, dû à Ivanov ([Iva1]) :

Théorème 3.1. *Soit S une surface homéomorphe à une surface $S_{g,n}$, avec $g \geq 2$. Le morphisme naturel*

$$\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut } C(S)$$

est une surjection. De plus, si $(g, n) \neq (2, 0)$, le morphisme considéré est un isomorphisme. Dans le cas où $(g, n) = (2, 0)$, le noyau est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Pour prouver ce dernier théorème, nous allons prouver qu'un automorphisme du complexe des courbes préserve non seulement les propriétés combinatoires du complexe des courbes, mais également des propriétés topologiques des classes d'isotopie de courbes. Ceci nous permettra de montrer, dans le cas où l'on a retiré un nombre fini de points à S , qu'un automorphisme de $C(S)$ induit, dans le cas où $n \neq 0$, un automorphisme du complexe des arcs $A(S)$, qui est un équivalent du complexe des courbes pour les classes d'isotopie d'arcs propres, simples et essentiels de S . Les automorphismes du complexe des arcs sont plus aisés à étudier que les automorphismes du complexe des courbes en vue de la proposition suivante :

Proposition 3.11. *Deux automorphismes f et g du complexe des arcs ayant même valeur sur un simplexe de codimension 0 sont égaux.*

Cette proposition permettra alors de prouver le théorème 3.1.

Afin de déduire le théorème 4.3 de ce dernier, nous allons montrer qu'un isomorphisme f entre sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}(S)$ induit un automorphisme du complexe des courbes. Pour prouver cela, nous montrerons que f envoie stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes fermées simples sur stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes fermées simples. Ce fait nécessitera une caractérisation algébrique des stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes, énoncée comme suit :

Proposition 4.66. *Soit H un sous-groupe de*

$$\Gamma_S(m) := \ker\{\text{Mod}^*(S) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\}.$$

Le sous-groupe H est non virtuellement abélien contenant un sous-groupe normal cyclique maximal pour la propriété d'être non virtuellement abélien et de contenir un sous-groupe normal si, et seulement si, $H = \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(a)$, où a est une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles.

Puis, nous prouverons une caractérisation de l'adjacence dans le complexe des courbes, énoncée comme suit :

Proposition 4.67. *Soit H un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$. Soient a et b des classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles. Alors $i(a, b) = 0$ si, et seulement si, il n'existe pas de sous-groupe $A \leq \text{Mod}(S)$ isomorphe à \mathbb{F}_2 tel que $H \cap \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \subseteq C_H(A \cap H)$.*

Nous prouverons cette caractérisation algébrique des stabilisateurs en étudiant plus en détail le comportement des éléments de $\text{Mod}(S)$. Nous étudierons en particulier les éléments de $\text{Mod}(S)$ dits *pseudo-Anosov*, c'est-à-dire les éléments qui ne sont pas périodiques et qui ne fixent aucun simplexe de $C(S)$ (voir théorème 4.30). L'objectif pour prouver le résultat sur les stabilisateurs sera ainsi de démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.64. *Soit G un sous-groupe de $\Gamma_S(m)$ ne fixant aucun simplexe de $C(S)$. Alors soit G contient un sous-groupe d'indice fini cyclique engendré par un pseudo-Anosov, soit G contient deux éléments pseudo-Anosov f et g tels que $\langle f, g \rangle \simeq \mathbb{F}_2$.*

Une fois ce résultat prouvé, la caractérisation des stabilisateurs s'en déduira facilement et le théorème d'Ivanov également.

Le mémoire s'organisera comme suit. Dans un premier temps, nous donnerons des résultats préliminaires sur les surfaces et les classes d'isotopie de courbes (partie 2). Puis, nous présenterons le groupe modulaire d'une surface (sous-partie 2.2) ainsi que les premiers résultats et des éléments distingués du groupe modulaire : les twists de Dehn. Les espaces géométriques sur lesquels agit le groupe modulaire seront alors exposés dans la sous-partie 2.4. Enfin, nous prouverons le théorème de rigidité dans la partie 3 et le théorème sur les isomorphismes entre sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}(S)$ dans la partie 4.

2. Notions et résultats préliminaires

2.1. Premières définitions

Nous présentons dans cette partie les principaux objets que nous utiliserons durant le mémoire. On consultera [FM] pour des preuves des résultats admis présentés.

On considère dans tout le mémoire des surfaces (c'est-à-dire des variétés topologiques de dimension 2, avec un éventuel bord) compactes, connexes et orientées. On rappelle le théorème suivant qui donne une classification complète des surfaces :

Théorème 2.1. [Tho, Theorem 5.1] *Toute surface fermée connexe et orientable est homéomorphe à une somme connexe entre une sphère de dimension 2 et $g \geq 0$ tores. Toute surface compacte, connexe et orientable est obtenue à partir d'une surface fermée en retirant $b \geq 0$ disques ouverts d'adhérences disjointes.*

Une manière d'obtenir une surface non compacte à partir d'une surface compacte est de retirer n points de l'intérieur de S . On notera ainsi $S_{g,b,n}$ une surface de genre g avec b bords et n points retirés. On rappelle également la formule de la caractéristique d'Euler :

$$\chi(S) = 2 - 2g - (b + n).$$

Comme la caractéristique d'Euler est un invariant de la classe d'homéomorphisme de S , il s'ensuit que la surface S est déterminée à homéomorphisme près par trois des quatre nombres g , b , n et $\chi(S)$.

Remarque 2.2. *Il sera souvent utile de considérer les n points retirés de la surface comme étant des points marqués.*

Définition 2.3. Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,b,n}$, avec $b + n > 0$. Une *composante périphérique* de S est une composante de bord ou un point marqué de S .

Définition 2.4. Soit S une surface.

1. Une *courbe fermée* est une application continue $S^1 \rightarrow S$. Elle est dite *simple* si l'application est injective.
2. Une *homotopie* entre deux courbes fermées α et β est une application continue $F: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ telle que :
 - (a) $F(S^1 \times \{0\}) = \alpha$;
 - (b) $F(S^1 \times \{1\}) = \beta$.

Deux courbes fermées α et β sont dites *homotopes* s'il existe une homotopie entre α et β .

3. Une courbe est *essentielle* si elle est homotope ni à un point ni à une composante périphérique de S .

Par exemple, dans le cas du tore T^2 , soit F l'application qui a une courbe fermée orientée associe sa classe d'homologie.

Fait : F induit une correspondance entre les classes d'homotopie de courbes fermées orientées et les éléments du premier groupe d'homologie $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ (c.f. [FM, Proposition 1.5]).

De même, l'application F induit une correspondance entre les classes d'homotopie de courbes fermées et les éléments de $\mathbb{Z}^2/\{\pm 1\}$, où l'action est l'antipodie. Les classes de courbes fermées simples correspondent dans ce cas aux éléments primitifs de \mathbb{Z}^2 , i.e. les éléments (p, q) avec p et q premiers entre eux. Un représentant de (p, q) est la courbe $t \mapsto (e^{2i\pi pt}, e^{2i\pi qt})$ avec $t \in [0, 1]$.

Remarque 2.5. *Dans la suite du mémoire, nous utiliserons régulièrement la notation $[\alpha]$ pour parler de la classe d'homotopie d'une courbe fermée simple α .*

En considérant deux courbes fermées, il est naturel d'étudier le nombre de fois qu'elles s'intersectent. On généralise cette idée aux classes d'homotopie des courbes :

Définition 2.6. Le nombre d'intersection géométrique $i(a, b)$ entre deux classes d'homotopie de courbes fermées simples a et b est le nombre minimal de points d'intersection entre deux représentants de a et b :

$$i(a, b) = \min \{ |\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b \}.$$

Si α et β sont des représentants de a et b réalisant ce minimum, on dit que α et β sont en *position minimale*.

Remarque 2.7. *On utilisera parfois dans la suite du texte la même notation $i(\alpha, \beta)$ pour parler cette fois du nombre d'intersection entre deux courbes α et β si ce dernier est fini. On admettra que, par des opérations d'homotopie, on peut toujours se ramener au cas où les intersections entre les courbes sont finies.*

On observe que le nombre d'intersection géométrique est une application symétrique : $i(a, b) = i(b, a)$. De plus, pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples a , $i(a, a) = 0$. Une remarque importante est que les homéomorphismes de la surface dans elle-même préservent le nombre d'intersection entre deux courbes. De ce fait, les classes d'homotopie d'homéomorphismes préservent l'intersection géométrique entre les classes d'homotopie de courbes fermées simples.

La question de savoir si deux représentants sont en position minimale se ramène à un problème local via le critère (admis) suivant :

Proposition 2.8. *[FM, Proposition 1.7] Deux courbes fermées simples α et β sont en position minimale si, et seulement si, il n'existe pas de disque plongé dans S dont le bord est l'union d'un arc de α et d'un arc de β s'intersectant exactement deux fois en leurs extrémités.*



Figure 1: Un exemple de bigone

Un tel disque est appelé un *bigone*. Ce critère prend alors le nom de *critère du bigone*. Ainsi, en effectuant des homotopies pour éliminer les possibles bigones, on conclut que le nombre d'intersection géométrique est toujours réalisé.

Remarque 2.9. *Par le critère du bigone, on obtient immédiatement que deux courbes s'intersectant une seule fois sont en position minimale.*

Proposition 2.10. *Soit T^2 un tore. Soient (p, q) et (p', q') deux classes d'homotopies de courbes fermées simples de T^2 . L'intersection géométrique entre (p, q) et (p', q') est égale à :*

$$i((p, q), (p', q')) = |pq' - p'q|.$$

Preuve. On commence par résoudre le cas où $(p, q) = (1, 0)$. Donnons tout d'abord une borne supérieure de l'intersection géométrique en considérant les représentants $t \mapsto (e^{2i\pi t}, 1)$ et $t \mapsto (e^{2i\pi p't}, e^{2i\pi q't})$. On cherche alors les couples $(t, t') \in [0, 1]^2$ tels que $(e^{2i\pi t}, 1) = (e^{2i\pi p't'}, e^{2i\pi q't'})$, c'est-à-dire tels que $(e^{2i\pi(t-p't')}, e^{2i\pi(-q't')}) = (1, 1)$. En d'autres termes, on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} t - p't' \in \mathbb{Z}; \\ -q't' \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Comme $t' \in [0, 1)$, les valeurs possibles de $q't'$ sont $\{0, \dots, q' - 1\}$. Or, par la première équation, il existe, pour chaque t' , une et une seule valeur possible de t . Donc le nombre d'intersection géométrique est $\leq q'$. L'égalité provient du fait que l'orientation induite par les arcs d'un bigone au niveau des deux points d'intersection du bigone est différente, ce qui n'est pas le cas avec les courbes considérées (c.f. figure 2).

Dans le cas général, si (p, q) représente une courbe fermée simple essentielle, c'est-à-dire, si (p, q) est primitif, alors il existe une matrice $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $A((p, q)) = (0, 1)$. Comme A est un homéomorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 préservant \mathbb{Z}^2 , il induit un homéomorphisme du tore dont l'action sur $H_1(T^2)$ est donnée par A . Comme les classes d'homotopie d'homéomorphismes préservent le nombre d'intersection géométrique, la formule générale se déduit du cas particulier de la classe d'isotopie $(0, 1)$. □

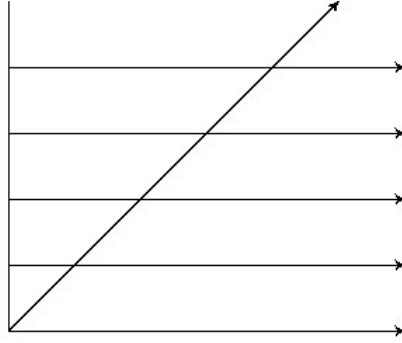


Figure 2: Orientation de l'intersection dans un tore plat.

Remarque 2.11. *Les résultats sont strictement identiques dans le cas d'un tore avec un point marqué, par les mêmes raisonnements.*

Définition 2.12. Deux courbes fermées simples α et β sont *isotopes* s'il existe une homotopie

$$H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$$

entre α et β telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, $H(S^1 \times \{t\})$ est une courbe fermée simple.

Nous avons la proposition suivante, qui nous permet d'utiliser de manière interchangeable les notions d'homotopie et d'isotopie :

Proposition 2.13. *[FM, Proposition 1.10] Deux courbes fermées simples et essentielles sont homotopes si, et seulement si, elles sont isotopes.*

Définition 2.14. Soit S une surface à bord contenant des points marqués $\{x_1, \dots, x_n\}$.

1. Un *arc propre* est une application continue $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$ telle que $\alpha^{-1}(\partial S \cup \{x_1, \dots, x_n\}) = \{0, 1\}$. Un arc est *simple* si $\alpha|_{]0,1[}$ est un plongement.
2. Une *homotopie* entre deux arcs propres α et β est une application continue $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ telle que $F([0, 1] \times \{0\}) = \alpha$ et $F([0, 1] \times \{1\}) = \beta$. Une homotopie H entre deux arcs est dite *relative aux composantes périphériques* si pour tout $s \in [0, 1]$, $H(0, s)$ et $H(1, s)$ sont dans $\partial S \cup \{x_1, \dots, x_n\}$.
3. Une *isotopie* deux arcs est une homotopie $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ entre ces deux arcs tels que pour tout $s \in [0, 1]$, $H([0, 1] \times \{s\})$ est un arc propre et simple.

4. Un arc propre est dit *essentiel* si il n'est pas homotope, relativement aux composantes périphériques, à une composante périphérique de S .

Comme dans le cas des courbes fermées, deux arcs sont homotopes relativement aux bords si, et seulement si, ils sont isotopes (c.f. [FM, Section 1.2.7]).

On définit de manière identique au cas des courbes fermées simples l'intersection géométrique entre deux arcs propres et simples. Dans les cas des arcs, le critère du bigone est également valide.

Les courbes et arcs nous seront utiles durant ce mémoire en raison de l'utilisation majeure de la technique de découpage le long d'une courbe ou d'un arc simple. Pour définir cette technique, nous avons besoin d'une définition :

Définition 2.15. Soit S une surface de genre g avec b composantes de bord et n points marqués. Soit α une courbe fermée simple de S . Un *voisinage régulier* de α est l'image d'un plongement $S^1 \times [-1, 1] \rightarrow S$ tel que l'image de $S^1 \times \{0\}$ soit égale à α . On note $\alpha \times [-1, 1]$ l'image d'un tel plongement dans S , et $\alpha \times]-1, 1[$ l'image de $S^1 \times]-1, 1[$.

Nous pouvons à présent décrire le processus de découpage le long d'une courbe fermée simple :

Soit S une surface de genre g avec b composantes de bord et n points marqués. Soit α une courbe fermée simple et soit $\alpha \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de α . La surface découpée le long de α , notée S_α , est la surface $S - (\alpha \times]-1, 1[)$. La définition donne immédiatement que S_α est une surface compacte avec au moins deux composantes de bord. Par ailleurs, S_α est équipée d'un homéomorphisme h entre deux composantes de bord tel que

1. le quotient $S_\alpha / (x \sim h(x))$ est homéomorphe à S ;
2. l'image des deux composantes de bord distinguées par l'application quotient est α .

Remarque 2.16. Si α est une courbe fermée simple, et $\alpha \times [-1, 1]$ et $(\alpha \times [-1, 1])'$ deux voisinages réguliers de α , alors $S - (\alpha \times]-1, 1[)$ et $S - ((\alpha \times]-1, 1[)')$ sont homéomorphes. Ainsi, S_α est unique à homéomorphisme près.

Une courbe fermée simple sera dite *non séparante* si la surface coupée S_α est connexe, et sera dite *séparante* sinon.

Nous définissons maintenant la technique de découpage de S le long d'un arc α . Nous définissons par ailleurs la notion de voisinage régulier de α :

Définition 2.17. Soit S une surface de genre g avec b composantes de bord et n points marqués tels que $b+n > 0$. Soit α un arc propre et simple de S . Pour définir le voisinage régulier de α , nous distinguons trois cas, selon les extrémités de α .

1. On suppose que les deux extrémités de α sont contenues dans deux bords B_1 et B_2 . Soit $i \in \{1, 2\}$ et $f_i: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ un plongement tel que $f_i(S^1 \times \{0\}) = B_i$. Soit $F: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow S$ un plongement tel que $F([0, 1] \times \{0\}) = \alpha$ et tel que, pour tout $s \in [-1, 1]$, $F([0, 1] \times \{s\})$ est un arc propre et simple dont les extrémités sont dans B_1 et B_2 . Alors un voisinage régulier de α , noté $\alpha \times]-1, 1[$ est égal à $f_1(S^1 \times [0, 1]) \cup f_2(S^1 \times [0, 1]) \cup F([0, 1] \times [-1, 1])$. Nous notons $\alpha \times]-1, 1[= f_1(S^1 \times [0, 1]) \cup f_2(S^1 \times [0, 1]) \cup F([0, 1] \times]-1, 1[)$.
2. On suppose que les deux extrémités de α sont deux points marqués x_1 et x_2 . Soit $i \in \{1, 2\}$, D^2 un disque fermé et soit $f_i: D^2 \rightarrow S$ un plongement tel que le centre du disque soit envoyé sur x_i . Soit $F: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow S$ une application continue telle que $F([0, 1] \times \{0\}) = \alpha$ et tel que, pour tout $s \in [-1, 1]$, $F([0, 1] \times \{s\})$ est un arc propre et simple dont les extrémités sont x_1 et x_2 . Alors un voisinage régulier de α , noté $\alpha \times]-1, 1[$ est égal à $f_1(D^2) \cup f_2(D^2) \cup F([0, 1] \times [0, 1])$. Nous notons $\alpha \times]-1, 1[= f_1(\text{int}(D^2)) \cup f_2(\text{int}(D^2)) \cup F([0, 1] \times]-1, 1[)$.
3. On suppose que l'une des extrémités de α est un point marqué x_1 et que l'autre extrémité est contenue dans un bord B_2 . Soit $f_1: D^2 \rightarrow S$ un plongement tel que le centre du disque soit envoyé sur x_1 . Soit $f_2: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ un plongement tel que $f_2(S^1 \times \{0\}) = B_2$. Soit $F: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow S$ une application continue telle que $F([0, 1] \times \{0\}) = \alpha$ et telle que, pour tout $s \in [-1, 1]$, $F([0, 1] \times \{s\})$ est un arc propre et simple dont les extrémités sont x_1 et B_2 . Alors un voisinage régulier de α , noté $\alpha \times]-1, 1[$ est égal à $f_1(D^2) \cup f_2(D^2) \cup F([0, 1] \times [0, 1])$. Nous notons $\alpha \times]-1, 1[= f_1(\text{int}(D^2)) \cup f_2(S^1 \times [0, 1]) \cup F([0, 1] \times]-1, 1[)$.

Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,b,n}$ avec $b+n > 0$. Nous pouvons maintenant définir la surface coupée le long d'un arc propre et simple α , notée S_α , comme étant la surface $S - (\alpha \times]-1, 1[)$. Comme dans le cas d'une courbe fermée simple S_α est une surface possédant au moins un bord. De même, S_α est unique à homéomorphisme près. Nous appelons un arc propre simple α *non séparant* si S_α est connexe, et *séparant* sinon.

Par la suite, nous noterons $\text{Homeo}^+(S)$ le groupe des homéomorphismes de S dans lui-même préservant l'orientation. On a le résultat suivant :

Proposition 2.18. *L'action de $\text{Homeo}^+(S)$ sur les courbes fermées simples non séparantes est transitive.*

Preuve. Si α et β sont deux courbes simples fermées non séparantes, alors S_α et S_β ont même caractéristique d'Euler et même nombre de composantes de bord. Ces surfaces sont donc homéomorphes. En choisissant un homéomorphisme préservant l'orientation et respectant les relations d'équivalence entre les bords distingués, on en déduit un homéomorphisme de S préservant l'orientation et envoyant α sur β . \square

Dans le cas des courbes séparantes, on définit d'abord le *genre d'une courbe séparante* α comme étant le minimum des genres des deux composantes connexes de S_α . La même démonstration montre alors, dans le cas où S est une surface fermée et compacte, que

l'action de $\text{Homeo}^+(S)$ sur les courbes fermées simples séparantes de même genre est transitif.

Plus généralement, ce principe de démonstration permettant de trouver un homéomorphisme de S préservant l'orientation et envoyant un n -uplet de courbes fermées simples vérifiant certaines propriétés vers un autre n -uplet de courbes fermées simples vérifiant les mêmes propriétés est appelé *le principe de changement de coordonnées*.

On prouve de manière similaire que :

Proposition 2.19. *Soit S une surface. L'action de $\text{Homeo}^+(S)$ sur ces n -uplets de courbes ou arcs est transitive :*

1. *les paires de courbes fermées simples qui s'intersectent exactement une fois ;*
2. *les n -uplets de courbes fermées simples disjointes dont l'union n'est pas séparante ;*
3. *les arcs non séparants qui rencontrent le même nombre de composantes de bord ;*
4. *les chaînes de courbes fermées simples, une chaîne de courbes fermées simples dans une surface S étant une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ telle que pour tout j , $i(\alpha_j, \alpha_{j+1}) = 1$ et pour tous i, j tels que $|i - j| > 1$, $i(\alpha_i, \alpha_j) = 0$.*

Remarque 2.20. *On voit que toutes les courbes fermées simples dans la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non séparante (resp. séparante) sont non séparantes (resp. séparantes). En particulier, on pourra parler d'une classe d'isotopie de courbes séparante ou non séparante.*

Définition 2.21. 1. Une courbe fermée simple α d'une surface S *délimite un disque avec deux points marqués* si S_α n'est pas connexe et si l'une de ses composantes connexes est homéomorphe à $S_{0,1,2}$. On parlera également d'une classe d'isotopie de courbes fermées simples délimitant un pantalon si toutes les courbes de la classe d'isotopie délimitent un disque avec deux points marqués

2. Deux courbes fermées simples α et β *délimitent un anneau épointé* si $S_{\alpha \cup \beta}$ n'est pas connexe et si l'une de ses composantes connexes est homéomorphe à $S_{0,2,1}$. Deux classes d'isotopie de courbes fermées simples a et b délimitent un anneau épointé si il existe deux représentants α et β de a et b délimitant un anneau épointé.

Nous donnons enfin une classification des arcs et courbes à isotopie près des surfaces de genre 0 avec 3 composantes périphériques. Une surface de genre 0 avec 3 bords et aucun point marqué est un *pantalon*, de ce fait la classification présentée sera appelée par la suite *la classification des arcs du pantalon*.

Proposition 2.22. *Soit S une surface de genre 0 avec trois composantes périphériques.*

1. *Toutes les courbes fermées simples de S sont isotopes à une composante périphérique.*

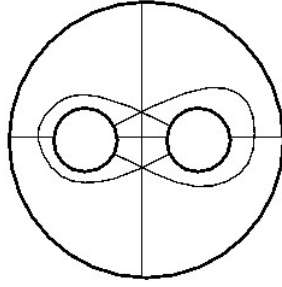


Figure 3: Les arcs du pantalon.

2. Soient P_1, P_2 et P_3 les composantes de S . Pour tous $i, j \in \{1, 2, 3\}^2$ il existe, à isotopie près, un unique arc reliant P_i à P_j .

Remarque 2.23. Cette classification donne également les intersections géométriques entre les classes d'isotopie des arcs de telles surfaces.

L'intérêt de ces courbes et arcs est donc qu'ils permettent d'étudier plus facilement le groupe des homéomorphismes de la surface.

2.2. Le groupe modulaire d'une surface

Définition 2.24. Une *isotopie* d'une surface est une homotopie $H: S \times [0, 1] \rightarrow S$ entre deux éléments f et g de $\text{Homeo}(S)$ telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, $H|_{S \times \{t\}}: S \times \{t\} \rightarrow S$ est un homéomorphisme.

Une isotopie $H: S \times [0, 1] \rightarrow S$ est dite *relative au bord* si, pour tout $t \in [0, 1]$, $H|_{\partial S \times \{t\}}$ est l'application identité.

Être isotope est une relation d'équivalence dans $\text{Homeo}(S)$. Ceci nous permet de définir l'objet d'étude principal de ce mémoire, à savoir le groupe modulaire d'une surface :

Définition 2.25. Le *groupe modulaire* d'une surface S , noté $\text{Mod}(S)$, est le groupe des classes d'isotopie relative au bord d'homéomorphismes préservant l'orientation et égaux à l'identité sur le bord.

Le groupe modulaire étendu d'une surface S , noté $\text{Mod}^*(S)$, est le groupe des classes d'équivalence d'isotopie relative au bord d'homéomorphismes égaux à l'identité sur le bord.

Remarques 2.26. 1. Si S est une surface de genre g avec b bords et n points retirés de la surface, alors on ne suppose pas que les n points retirés soient fixes par les éléments de $\text{Mod}(S)$. Ceci constitue la différence entre les bords et les points retirés

dans le cadre de notre étude. Ainsi, si nous ne supposons pas le bord fixé par les éléments de $\text{Mod}(S)$, les composantes de bords auraient le même “comportement” que les points marqués vis-à-vis de $\text{Mod}(S)$.

Nous définissons ainsi le groupe modulaire pur d’une surface, noté $\text{PMod}(S)$, comme étant le groupe constitué des éléments de $\text{Mod}(S)$ fixant les points marqués.

Comme il existe une application $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui détermine si les homéomorphismes de la classe d’isotopie préservent l’orientation ou non, on obtient une suite exacte courte :

$$1 \rightarrow \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Mod}^*(S) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

On note ainsi que $\text{Mod}(S)$ est un sous-groupe d’indice 2 de $\text{Mod}^*(S)$.

Les éléments de $\text{Mod}^*(S)$ définissent naturellement une application des classes d’isotopie des courbes fermées simples vers elles-mêmes. Nous utiliserons la notation fonctionnelle, à savoir que les éléments de $\text{Mod}^*(S)$ seront appliqués aux classes d’isotopie de courbes fermées simples de la droite vers la gauche.

Proposition 2.27. *[FM, Proposition 1.11] Soit S une surface. Si $F: S^1 \times I \rightarrow S$ est une isotopie lisse de courbes fermées simples, alors il existe une isotopie $H: S \times I \rightarrow S$ telle que $H|_{S \times \{0\}}$ est l’identité et $H|_{F(S^1 \times \{0\}) \times I} = F$.*

Ainsi, si a est une classe d’isotopie de courbes fermées simples, α un représentant de a et si $\phi \in \text{Mod}^*(S)$ est telle que $\phi(a) = a$, alors il existe un représentant f de ϕ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Plus généralement, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.28. *[Hir, Chapter 8, Theorem 1.3.] Soit S_0 une sous surface de S , c’est-à-dire une sous variété de S de dimension 2 avec d’éventuels bords. Si $F: S_0 \times I \rightarrow S$ est une isotopie à support compact K avec $K \cap \partial S = \emptyset$, alors il existe une isotopie $H: S \times I \rightarrow S$ telle que $H|_{F(S_0 \times \{0\}) \times I} = F$.*

Nous donnons à présent des exemples de groupes modulaires de surfaces.

Proposition 2.29. *Soit D^2 un disque, c’est-à-dire une surface de genre 0 avec 1 bord. Alors $\text{Mod}(D^2)$ est trivial.*

Preuve. On identifie D^2 avec le disque unité fermé de \mathbb{R}^2 . Soit $\phi: D^2 \rightarrow D^2$ un homéomorphisme de D^2 préservant l’orientation et égal à l’identité sur le bord du disque. Alors on définit l’application

$$F(x, t) = \begin{cases} (1-t)\phi\left(\frac{x}{1-t}\right) & \text{si } 0 \leq |x| < 1-t \\ x & \text{si } 1-t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

pour $0 \leq t < 1$ et on définit $F(x, 1)$ comme étant l’identité de D^2 . Le résultat est alors une isotopie de ϕ vers l’identité. \square

Remarque 2.30. Une preuve entièrement similaire permet de montrer que le disque avec un point marqué a également un groupe modulaire trivial.

Proposition 2.31. Le groupe modulaire d'un tore est isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Proposition 2.32. Soit $S_{0,0,3}$ une surface de genre 0 avec 3 points marqués. Le groupe modulaire pur de $S_{0,0,3}$ est trivial.

Soit S une surface et α une courbe fermée simple essentielle orientée ou un arc propre simple essentiel orienté. Soit $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Mod}(S)}^+([\alpha])$ le sous-groupe de $\mathrm{Mod}(S)$ fixant la classe d'isotopie de α ainsi que son orientation. Soit S'_α la surface obtenue en collant des disques époinés le long des bords de S_α . Nous définissons à présent un morphisme

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Mod}(S)}^+([\alpha]) \rightarrow \mathrm{Mod}(S'_\alpha)$$

de la manière suivante. Soit $\phi \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{Mod}(S)}([\alpha])$. Par ce qui a été fait précédemment, il existe f un représentant de ϕ tel que $f(\alpha) = \alpha$. Soit $\alpha \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de α . Quitte à changer f dans sa classe d'isotopie, et étant donné que f fixe l'orientation de α , on peut par ailleurs supposer que $f|_{\alpha \times [-1, 1]}$ coïncide avec l'identité. On note alors

$$f_\alpha = f|_{S_\alpha}.$$

On définit une application $f'_\alpha \in \mathrm{Homeo}^+(S'_\alpha)$ comme étant égale, pour tout point contenu dans S_α , à f_α et, pour tout point contenu dans un des disques époinés, à un homéomorphisme quelconque du disque époiné fixant le bord du disque époiné. Par la remarque 2.30, le choix de l'homéomorphisme ne change pas de la classe d'isotopie de f'_α . On obtient ainsi un morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Stab}_{\mathrm{Mod}(S)}^+([\alpha]) & \rightarrow & \mathrm{Mod}(S'_\alpha) \\ [f] & \mapsto & [f'_\alpha]. \end{array}$$

2.3. Les twists de Dehn

Des éléments distinguables dans $\mathrm{Mod}(S)$ sont les twists de Dehn :

On définit tout d'abord un twist de Dehn sur un anneau $A := S^1 \times [0, 1]$. On oriente A en le plongeant dans le plan en coordonnées polaires via l'application $(\theta, t) \mapsto (\theta, t+1)$. Le twist de Dehn $T: A \rightarrow A$ est alors défini par :

$$T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t).$$

L'application T est alors un homéomorphisme (d'inverse $T^{-1}(\theta, t) = (\theta - 2\pi t, t)$), préservant l'orientation et fixant ∂A .

Dans le cas général, soit S une surface orientée arbitraire et soit α une courbe fermée simple dans S . Soit $\alpha \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de α . On fixe un homéomorphisme

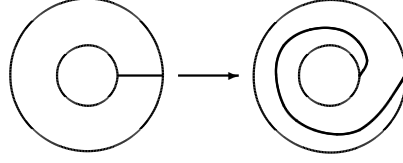


Figure 4: Un twist de Dehn dans un anneau.

$\phi : A \rightarrow \alpha \times [-1, 1]$. On obtient un homéomorphisme $T_\alpha : S \rightarrow S$, appelé twist de Dehn, comme suit :

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & \text{si } x \in \alpha \times [-1, 1] \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, T_α réalise le twist T dans un voisinage régulier de α .

Le twist de Dehn T_α dépend du choix du voisinage régulier $\alpha \times [-1, 1]$ et de l'homéomorphisme ϕ . Cependant, la classe d'isotopie de T_α ne dépend d'aucun de ces choix. De plus, la classe d'isotopie de T_α ne dépend pas du choix du représentant de la classe d'isotopie de α . Donc, si a désigne la classe d'isotopie de α , alors T_a est bien défini comme élément de $\text{Mod}(S)$, appelé le twist de Dehn autour de a .

Pour décrire l'action des twists de Dehn sur les classes d'isotopie des courbes, on utilise une technique de chirurgie :

si $i(a, b) = k$ avec $k \geq 1$, pour représenter schématiquement le twist de Dehn $T_a(b)$, on choisit un représentant β de b et k représentants disjoints $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de a tous en position minimale avec β (on peut choisir les α_i de manière à ce que α_{i-1} et α_i délimitent un anneau dans S , on dit alors que α_{i-1} et α_i sont *parallèles*). A chaque point d'intersection de β avec un α_i , on effectue de la chirurgie comme dans la figure ci-dessous. Ainsi, à chaque intersection entre β et un α_i , on coupe β au niveau de cette intersection. On obtient alors deux arcs. On modifie ces deux arcs de la manière suivante : l'arc de β à la gauche de α_i effectue un virage à gauche (ceci dépend de l'orientation de β) lorsqu'il atteint α_i , puis suit la courbe α_i . Lorsque l'arc est revenu au niveau de l'intersection initial, on le recolle au deuxième arc. En effectuant ce procédé à chaque intersection, le résultat est une courbe fermée simple dans la classe d'isotopie de $T_a(b)$.

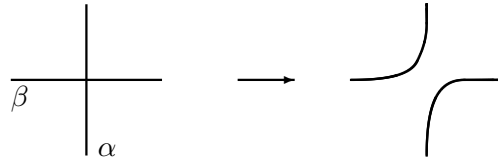


Figure 5: Un twist de Dehn par chirurgie.

Dans le cas d'un anneau, c'est-à-dire une surface de genre 0 avec 2 bords, on possède une description explicite de son groupe modulaire en fonction du twist de Dehn autour

de la courbe faisant le tour de l'anneau :

Proposition 2.33. *Soit A un anneau. Alors $\text{Mod}(A) \simeq \mathbb{Z}$, et une base de $\text{Mod}(A)$ est un twist de Dehn autour de la courbe engendrant l'anneau.*

Corollaire 2.34. *Soit S une surface, α une courbe fermée simple essentielle de S . Soient H et H' deux homéomorphismes préservant l'orientation de S et fixant α ainsi que son orientation. Si les homéomorphismes H_α^1 et H_α^2 induits par H et H' dans S'_α sont isotopes, alors H est isotope à la composée de H' avec une puissance d'un twist de Dehn autour de α .*

Preuve. Nous présentons la preuve de [Iva2]. On suppose que les représentants H_α^1 et H_α^2 restreints aux disques épointés collés à S_α sont tous les deux égaux à l'identité. Soit a la classe d'isotopie dans S de α . En changeant H et H' dans leur classe d'isotopie, on peut supposer que H et H' restreints à α sont égaux à l'identité. De plus, comme H et H' préservent l'orientation de α , ils préservent les côtés de α et on peut donc supposer que H et H' fixent un voisinage régulier $\alpha \times [0, 1]$ de α . Maintenant, puisque les homéomorphismes H_α^1 et H_α^2 sont isotopes, et puisque H_α^1 et H_α^2 fixent les points marqués des disques épointés collés à S_α , on peut supposer que l'isotopie entre H_α^1 et H_α^2 est relative aux disques épointés collés à S_α . En particulier, on en déduit une isotopie entre H_α et H'_α . En étendant cette isotopie à S tout entier par la proposition 2.28, on obtient une isotopie entre H et $H' \circ G$ où G est un homéomorphisme de S égal à l'identité en-dehors de $\alpha \times]0, 1[$. Par la proposition précédente, G est isotope relativement aux bords de X à T_a^n pour un certain $n \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat. \square

Désormais, nous considérerons une surface S de genre g sans bord avec n points marqués. Pour simplifier les notations, nous noterons $S_{g,n} := S_{g,0,n}$. On montre maintenant plusieurs propriétés des twists de Dehn qui nous serviront par la suite :

Proposition 2.35. *Soient a et b deux classes d'isotopies de courbes fermées simples essentielles. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors on a :*

$$i(T_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2.$$

En particulier, les twists de Dehn sont des éléments non triviaux du groupe modulaire d'ordre infini.

Preuve. Soient α et β deux représentants de a et b en position minimale. En prenant $|k|i(a, b)$ copies parallèles de α , une copie de β parallèle à β et en appliquant la technique de chirurgie précédemment décrite, on obtient un représentant β' de $T_a^k(b)$ tel que :

$$|\beta \cap \beta'| = |k|i(a, b)^2.$$

Il suffit maintenant de prouver que β et β' sont en position minimale. D'après le critère du bigone, il suffit de montrer que β et β' ne forment pas de bigone.

Soient $\{\beta_i\}$ (resp. $\{\beta'_i\}$) des arcs deux à deux distincts, contenus dans β (resp β') tels que, pour tous i et j , les extrémités β_i et β'_j sont deux points distincts de $\beta \cap \beta'$. Par

ailleurs, nous supposons que, pour tous i et j , $\text{int}(\beta_i)$ et $\text{int}(\beta'_j)$ ne contiennent aucun point de $\beta \cap \beta'$. Enfin, nous supposons que $\cup_i \beta_i \cup_j \beta_j = \beta \cup \beta'$. Par la construction de β' , pour tout i , soit β'_i est isotope à un arc contenu dans β , soit β'_i est isotope à un arc contenu dans α .

Comme les courbes β et β' sont simples, un bigone entre β et β' ne peut être formé que par un arc β_i et un arc β'_j . Ces arcs peuvent délimiter deux types de disque : soit l'orientation des arcs au niveau des deux points d'intersection est la même, soit chacun des points d'intersection a une orientation différente. Dans le premier cas, le disque ne peut pas être un bigone car un bigone a une orientation différente en les points d'intersection. Le second cas n'est pas possible car, comme les arcs $\{\beta'_i\}$ sont isotopes à des arcs contenus dans α , on en déduirait un bigone entre α et β . Ceci contredirait le fait que α et β sont en position minimale.

La deuxième partie de la proposition provient du fait que pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles a , il existe une classe d'isotopie de courbes b telle que $i(a, b) > 0$. \square

On a en fait le résultat plus général suivant :

Proposition 2.36. [FM, Proposition 3.4] Soient $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}^*$ tels que, pour tous i, j , $\frac{e_i}{e_j} > 0$. Soient a_1, \dots, a_n des classes d'isotopie de courbes fermées simples dans une surface S et $M = \prod_{i=1}^n T_{a_i}^{e_i}$. Soient b et c des classes d'isotopie de courbes fermées simples dans S . Alors on a :

$$\left| i(M(b), c) - \sum_{i=1}^n |e_i| i(a_i, c) \right| \leq i(b, c).$$

Cette proposition permet de déduire un certain nombre de propriétés des twists de Dehn :

Proposition 2.37. Pour toutes classes d'isotopie de courbes fermées simples a et b , pour tout élément f du groupe modulaire, pour tout entier $j, k \in \mathbb{Z}^*$, on a les résultats suivants :

1. $T_a^j = T_b^k \Leftrightarrow a = b$ et $j = k$;
2. $T_{f(a)}^k = f T_a^k f^{-1}$;
3. $f T_a^k = T_a^k f \Leftrightarrow f(a) = a$;
4. $i(a, b) = 0 \Leftrightarrow T_a(b) = b \Leftrightarrow T_a T_b = T_b T_a$.

Preuve. 1. La réciproque est immédiate car les twists de Dehn sont des éléments de $\text{Mod}(S)$.

Pour l'implication, soit $a \neq b$. Montrons tout d'abord qu'il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples c telle que $i(a, c) = 0$ et $i(b, c) \neq 0$. En

effet, dans le cas où $i(a, b) \neq 0$, on peut choisir $a = c$. Si $i(a, b) = 0$, on distingue plusieurs cas selon le caractère séparant ou non des courbes. Dans la suite on considère α , et β des représentants de a et b respectivement en position minimale.

- (a) Supposons que α et β sont non séparantes et si β est non séparante dans S_α . Alors, nécessairement, S est de genre $g \geq 2$.

Affirmation : il existe dans S une courbe fermée simple séparante γ de genre égal à 1 telle que :

- une des composantes connexes T de S_γ est homéomorphe à $S_{1,0,1}$;
- $i(a, [\gamma]) = i(b, [\gamma]) = 0$;
- α et β sont contenues dans deux composantes connexes distinctes de S_γ ;
- β est contenue dans T .

En effet, on construit γ par principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.19). Dans T , il existe alors une courbe fermée simple non séparante δ intersectant β exactement une fois (la construction est explicite par la proposition 2.11). La courbe δ se relève dans S en une courbe δ' telle que $i(a, [\delta']) = 0$. De plus, par la proposition 2.8, $i(b, [\delta']) \neq 0$.

- (b) Supposons que α et β soient non séparantes dans S et β est séparante dans S_α .

Dans le cas où S est de genre $g = 1$, $S_{\alpha \cup \beta}$ possède une composante connexe S' de genre égal à 0. Comme $a \neq b$, il existe dans S' un point marqué P , et il existe dans $S - S'$ un point marqué, que l'on note Q . On construit alors γ une courbe séparante délimitant une surface de genre 0 avec 2 points marqués, les deux points marqués étant P et Q . γ est construit de manière à ce qu'elle passe par β et non par α .

Dans le cas où $g \geq 2$, une des composantes connexes S' de $S_{\alpha \cup \beta}$ est de genre plus grand que 1. La surface S' contient un unique bord β_1 induit par β . Soit alors γ' un arc propre, simple, non séparant de S' dont les deux extrémités sont contenues dans β_1 . Soit S'' l'autre composante connexe de $S_{\alpha \cup \beta}$. S'' contient un unique bord β_2 induit par β . Si S'' est de genre plus grand que 1, on construit un arc propre, simple, non séparant γ'' dont les deux extrémités sont contenues dans β_2 . Si S'' est de genre égale à 0, puisque α et β sont essentiels, S'' contient un point marqué P . Il existe alors dans S'' un arc propre, simple et essentiel γ'' dont les deux extrémités sont dans β_2 . Dans les deux cas, en reliant dans S les extrémités des arcs γ' et γ'' par des arcs simples contenus dans $\beta \times [-1, 1]$, on obtient une courbe fermée simple essentielle γ telle que $i(a, [\gamma]) = 0$ et $i(b, [\gamma]) \neq 0$.

- (c) Supposons que α est non séparante et β est séparante. Alors S a un genre $g \geq 1$. Par ailleurs, S_α n'est pas homéomorphe à $S_{0,2,0}$ car $a \neq b$. De plus, étant donné que β est essentielle, chaque composante connexe de $S_{\alpha \cup \beta}$ n'est pas homéomorphe à un disque. Enfin, chaque composante connexe de $S_{\alpha \cup \beta}$ contient un bord provenant de β .

Donc, il existe dans S_α une autre courbe fermée simple essentielle γ qui n'est pas isotope à β et qui intersecte β sans former un bigone. En effet, on construit une courbe fermée simple γ qui soit d'intersection non vide avec les deux composantes connexes de $S_{\alpha\cup\beta}$. Par ailleurs, puisqu'aucune composante connexe de $S_{\alpha\cup\beta}$ n'est homéomorphe à un disque, on peut supposer que, dans chaque composante connexe de $S_{\alpha\cup\beta}$, l'arc induit par γ est essentiel. Ainsi, en relevant γ en une courbe γ' dans S , la classe d'isotopie de γ' vérifie bien les conditions voulues.

- (d) Si α est séparante et β est non séparante, alors le genre g de S est plus grand que 1 et la composante connexe S' de S_a contenant β est de genre $g' \geq 1$. Il existe alors une courbe γ dans S' intersectant β une fois.
- (e) Supposons que α et β soient séparantes.

Si le genre de S est nul, alors les deux courbes sont aussi de genre nul. Par ailleurs, il existe une composante connexe de $S_{\alpha\cup\beta}$ contenant un bord induit par α et un bord induit par β . Étant donné que $a \neq b$, cette composante connexe contient un point marqué P . Soit S' la composante connexe de S_β ne contenant pas α . Soit Q un point marqué de S contenu dans S' et différent de P (ce point marqué existe car a et b sont essentielles et $a \neq b$). On prend alors comme γ une courbe fermée simple délimitant une surface contenant 2 points marqués, ces derniers étant P et Q .

Si le genre de S est strictement positif, il y a encore deux cas à distinguer. Si le genre de la composante connexe S'' de S_α contenant β est strictement positif, on trouve, par principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.19), une courbe non séparante dans S'' intersectant β .

Si S'' est de genre nul, on effectue le même raisonnement que dans le cas où le genre de S est nul.

Ainsi, il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples c telle que $i(a, c) = 0$ et $i(b, c) \neq 0$. Pour un tel c , la proposition précédente donne :

$$\begin{aligned} i(T_a^j(c), c) &= |j|i(a, c)^2 = 0, & \text{et} \\ i(T_b^k(c), c) &= |k|i(b, c)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc $T_a^j(c) \neq T_b^k(c)$ et $T_a^j \neq T_b^k$.

Si $a = b$ et $j \neq k$, alors il existe c telle que $i(a, c) \neq 0$, et on a :

$$i(T_a^j(c), c) = |j|i(a, c)^2 = |k|i(a, c)^2 = i(T_a^k(c), c).$$

Donc $|k| = |j|$. Si $k = -j$, alors on a :

$$i(T_a^k(c), T_a^{-k}(c)) = i(T_a^{2k}(c), c) = |2k|i(a, c)^2 \neq 0.$$

D'où $T_a^j(c) \neq T_a^k(c)$ et le résultat s'ensuit.

2. Soit ϕ un représentant de f , α un représentant de a , ψ_α un représentant de T_a^k dont le support est un anneau.

L'homéomorphisme ϕ^{-1} envoie un voisinage régulier de $\phi(\alpha)$ sur un voisinage régulier de α car un homéomorphisme envoie deux courbes délimitant un anneau sur deux courbes délimitant un anneau. Alors ψ_α effectue k twists d'un voisinage de α , et ϕ envoie ce voisinage twisté de α sur un voisinage de $\phi(\alpha)$. Donc le résultat est un twist de Dehn appliqué k fois autour de $\phi(\alpha)$.

3. D'après les points précédents, on a :

$$\begin{aligned} fT_a^k = T_a^k f &\Leftrightarrow fT_a^k f^{-1} = T_a^k \\ &\Leftrightarrow T_{f(a)}^k = T_a^k \\ &\Leftrightarrow f(a) = a \end{aligned}$$

4. Le fait que $T_a(b) = b$ soit équivalent à $T_a T_b = T_b T_a$ découle immédiatement des points 2 et 3.

Supposons maintenant que $i(a, b) = 0$ et montrons que $T_a(b) = b$. Soit α un représentant de a , ψ_α un représentant de T_a . Étant donné qu'un twist de Dehn autour de α a pour support un voisinage régulier $\alpha \times [-1, 1]$ de α , si $i(a, b) = 0$, alors on peut toujours trouver un représentant β de b qui n'intersecte pas $\alpha \times [-1, 1]$. Donc $\psi_\alpha(\beta) = \beta$ et on obtient bien $T_a(b) = b$.

Pour la réciproque, si $T_a(b) = b$, alors $i(T_a(b), b) = i(b, b) = 0$. Comme $i(T_a(b), b) = i(a, b)^2$, on a bien que $i(a, b) = 0$. □

Remarque 2.38. *La preuve de la proposition 2.37 donne également que :*

Pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles a et b , il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles c telle que :

$$i(a, c) = 0 \quad \text{et} \quad i(b, c) \neq 0.$$

Ces résultats nous permettent de démontrer le théorème suivant (nous en donnerons une esquisse) :

Théorème 2.39. *Soit S une surface différente de $S_{0,2}$, $S_{1,0}$, $S_{1,1}$, $S_{1,2}$ et $S_{2,0}$. Alors le centre $Z(\text{Mod}(S))$ de $\text{Mod}(S)$ est trivial. Toutes les autres surfaces ont un centre isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

La preuve (présentée dans [FM, Theorem 3.10]) repose sur le fait que si un élément f de $\text{Mod}(S)$ appartient au centre alors il commute avec tous les twists de Dehn. En particulier, d'après les propriétés des twists de Dehn vues dans la proposition précédente, f fixe toutes les classes d'isotopie de courbes. En choisissant des courbes qui remplissent la surface (i.e. telles qu'en découpant S le long de ces courbes, on obtient une collection de disques et de disque épointé), et en étudiant l'action de f sur le graphe induit par

les courbes, on déduit que f est l'identité excepté dans les cas précédemment cités. Effectivement, dans ces cas là, une *involution hyperelliptique*, définie comme étant les éléments d'ordre 2 de $\text{Mod}(S)$ qui agissent par $-\text{id}$ sur $H_1(S, \mathbb{Z})$, est un élément non trivial du centre de $\text{Mod}(S)$. Dans les cas particuliers du théorème, il existe une unique telle involution hyperelliptique, qui correspond à la classe d'isotopie d'une "rotation d'angle π ". Cette dernière commute avec tous les twists de Dehn, et le résultat suivant donne que l'involution hyperelliptique est contenue dans le centre de $\text{Mod}(S)$.

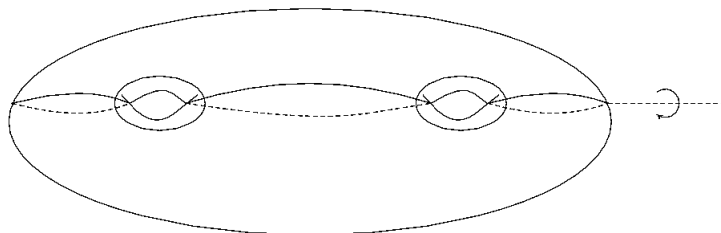


Figure 6: L'involution hyperelliptique dans S_2 fixe toutes les classes d'isotopie de courbes et leurs orientations.

Théorème 2.40. [FM, Theorem 4.1] Soit S une surface de genre $g \geq 0$ sans composante périphérique. Alors $\text{Mod}(S)$ est engendré par un nombre fini de twists de Dehn autour de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles non séparantes.

Enfin, dans le cas d'une surface contenant des points marqués, le groupe modulaire est engendré par des twists de Dehn et des éléments du groupe modulaire appelé les demi-twists de Dehn :

Définition 2.41. Soit P et Q deux points marqués de S , et α une courbe fermée simple essentielle délimitant un disque D contenant P et Q comme points marqués. Soit a la classe d'isotopie de α . Le demi-twist de Dehn est la classe d'isotopie d'un homéomorphisme à support dans D et permutant P et Q . Sa classe d'isotopie est dénotée $T_a^{\frac{1}{2}}$.

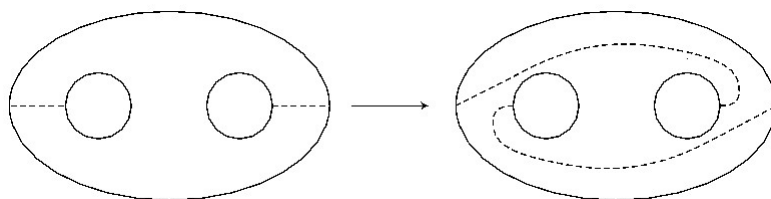


Figure 7: Un demi-twist de Dehn.

On admettra que $(T_a^{\frac{1}{2}})^2 = T_a$ et que, pour tout élément f de $\text{Mod}^*(S)$, $T_{f(a)}^{\frac{1}{2}} =$

$fT_a^{\pm\frac{1}{2}}f^{-1}$. Les preuves sont complètement similaires à celles effectuées pour le twist de Dehn.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème 2.42. *[FM, Corollary 4.15] Soit S une surface de genre $g \geq 0$ avec n points marqués. Alors $\text{Mod}(S)$ est engendré par un nombre fini de twists de Dehn autour de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles et un nombre fini de demi-twists de Dehn.*

2.4. Espaces munis d'action du groupe modulaire

Afin de mieux comprendre le groupe modulaire d'une surface, nous souhaitons le faire agir sur des espaces "adaptés", c'est-à-dire tels que les automorphismes de ces espaces correspondent, à sous-groupe d'indice fini près, au groupe modulaire. Nous présentons dans cette partie deux tels espaces et certaines de leurs propriétés que nous utiliserons par la suite.

2.4.1. Le complexe des courbes

Définition 2.43. Le *complexe des courbes* d'une surface S , noté $C(S)$, est l'unique complexe simplicial drapeau dont les sommets sont les classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles de S et où deux sommets correspondant à des classes d'isotopie a et b sont reliés par une arête si $i(a, b) = 0$.

Nous avons la proposition suivante, qui nous assure que les sommets de tout simplexe du complexe des courbes ont des représentants deux à deux disjoints :

Proposition 2.44. *[FM, Lemma 3.3] Soit S une surface. Soient a_1, \dots, a_n des classes d'isotopie de courbes fermées simples et essentielles telles que, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i(a_i, a_j) = 0$. Il existe des représentants $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de a_1, \dots, a_n tels que, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, α_i et α_j sont disjoints.*

Le complexe des courbes est un complexe simplicial disposant d'une action naturelle du groupe modulaire. En effet, un homéomorphisme envoie deux courbes d'intersection nulle vers deux courbes d'intersection nulle, et cette propriété descend aux classes d'isotopie.

Proposition 2.45. *[FM, Theorem 4.3] Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$. Si $3g + n \geq 5$, alors $C(S)$ est connexe.*

Les propriétés suivantes permettent de montrer que le complexe des courbes est entièrement déterminé par le genre et le nombre de points marqués de la surface :

Proposition 2.46. *La dimension d'un simplexe maximal du complexe des courbes d'une surface S homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $n \geq 1$ est $3g - 4 + n$.*

Preuve. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les représentants des sommets d'un simplexe maximal deux à deux en position minimale. La surface $S_{\cup_i \alpha_i}$ est une collection de surfaces à bords dont le complexe des courbes est vide. Il existe six telles surfaces :

- un disque, ce qui n'est pas possible car toutes les courbes considérées sont essentielles ;
- un disque avec un point marqué, ce qui n'est pas possible car aucun des α_i n'est isotope à un point marqué ;
- un anneau, ce qui n'est pas possible car les α_i sont deux à deux non isotopes ;
- un disque avec deux points marqués ;
- un anneau avec un point marqué ;
- un pantalon, c'est-à-dire une surface homéomorphe à $S_{0,3,0}$.

Donc $S_{\cup_i \alpha_i}$ est une collection de pantalons, d'anneaux avec un point marqué et de disques avec deux points marqués. Soit m_1 le nombre de pantalons, m_2 le nombre d'anneaux avec un point marqué et m_3 le nombre de disques avec deux points marqués de cette collection. Soit $m = m_1 + m_2 + m_3$.

Montrons dans un premier temps que $\chi(S) = \chi(S_{\cup_i \alpha_i})$. On montre pour cela que $\chi(S) = \chi(S_a)$ où a est une courbe fermée simple essentielle.

Si a est non séparante, alors S_a est connexe et homéomorphe à $S_{g-1,2,n}$. D'où :

$$\chi(S_a) = 2 - 2(g-1) - n - 2 = 2 - 2g - n = \chi(S).$$

Si a est séparante, alors S_a est une surface à deux composantes connexes S' et S'' respectivement homéomorphes à $S_{k,1,n'}$ et $S_{g-k,1,n-n'}$. Donc :

$$\chi(S_a) = \chi(S') + \chi(S'') = 2 - 2k - n' - 1 - 2(g-k) - (n-n') - 1 = 2 - 2g - n = \chi(S).$$

D'où $\chi(S) = \chi(S_{\cup_i \alpha_i})$.

Maintenant, comme les caractéristiques d'Euler d'un pantalon, d'un anneau avec un point marqué et d'un disque à deux points marqués sont toutes les trois -1 , on a :

$$m = -m_1\chi(S_{0,3,0}) - m_2\chi(S_{0,2,1}) - m_3\chi(S_{0,1,2}) = -\chi(S_{\cup_i \alpha_i}) = -\chi(S) = 2g - n + 2.$$

Or, chacune des surfaces considérées a en tout trois composantes périphériques. De plus, chaque α_i intervient deux fois dans les composantes de bords de la collection de surfaces. Donc :

$$k = \frac{3m - n}{2} = \frac{3(2g + n - 2) - n}{2} = 3g - 3 + n.$$

Donc le nombre de courbes d'un simplexe maximal est $3g - 3 + n$ et la dimension d'un simplexe maximal est $3g - 4 + n$. \square

Remarque 2.47. *La preuve de la proposition précédente montre par ailleurs que, si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des représentants en position minimale d'un simplexe maximal de $C(S)$, alors $S_{\cup_{i=1}^k \alpha_i}$ est une union disjointe de disques avec deux points marqués, d'anneaux épointés et de pantalons.*

On utilisera également ce résultat dû à Harer [Har, Theorem 3.5] :

Théorème 2.48. *Soit S une surface de genre $g \geq 1$ avec n points marqués. Alors le complexe des courbes de S est homotopiquement équivalent à une somme connexe de sphères de dimension $2g - 3 + n$.*

Les deux résultats précédents montrent en particulier qu'on peut entièrement déterminer le genre et le nombre de points marqués de la surface à partir uniquement du complexe des courbes. Ces propriétés étant stables par automorphisme de complexe simplicial, on en déduit qu'un automorphisme du complexe des courbes envoie le complexe des courbes d'une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ vers le complexe des courbes d'une surface homéomorphe à $S_{g,n}$. Ceci nous sera utile pour caractériser les courbes séparantes et non séparantes en regardant uniquement le complexe des courbes et ainsi montrer que ces classes de courbes sont stables par automorphisme du complexe des courbes.

Pour finir cette sous-partie, nous présentons un complexe simplicial dérivé du complexe des courbes, à savoir le complexe des courbes non séparantes :

- Définition 2.49.**
1. Le *complexe des courbes non séparantes* d'une surface S , noté $C^{nc}(S)$, est l'unique complexe simplicial drapeau dont les sommets sont les classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles non séparantes de S et où deux sommets correspondant à des classes a et b sont reliés par une arête si $i(a, b) = 0$.
 2. Le *complexe des courbes non séparantes modifié* d'une surface S , noté $\widehat{C}^{ns}(S)$, est le graphe dont les sommets sont les classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles non séparantes de S et où deux sommets correspondant à des classes a et b sont reliés par une arête si $i(a, b) = 1$.

Cette proposition nous sera utile dans la preuve du théorème d'Ivanov :

Proposition 2.50. [FM, Theorem 4.4, Lemma 4.5] *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,b,n}$.*

1. *Si $g \geq 2$, alors $C^{ns}(S)$ est connexe.*
2. *Si $g \geq 1$, alors $\widehat{C}^{ns}(S)$ est connexe.*

2.4.2. Le complexe des arcs

Définition 2.51. Le *complexe des arcs* d'une surface S , noté $A(S)$, est l'unique complexe simplicial drapeau dont les sommets sont les classes d'isotopie d'arcs propres simples essentiels et où deux sommets sont reliés entre eux si l'intersection géométrique des classes d'isotopies correspondant aux deux sommets est nul.

Comme pour le complexe des courbes, on démontre ici une série de propriétés qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 2.52. Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $n > 0$. La dimension d'un simplexe maximal de $A(S)$ est $6g - 7 + 3n$.

Preuve. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des représentants des classes d'isotopie d'un simplexe maximal. Par le même raisonnement que précédemment, on montre que, si α est un arc propre, simple et essentiel :

$$\chi(S_\alpha) = \chi(S) + 1.$$

La différence entre les deux caractéristiques d'Euler provient du fait que lorsque l'on coupe selon un arc, le nombre de bords de la surface augmente mais le nombre de composantes périphériques diminue.

Par ailleurs, étant donné que toute surface ayant plus de 2 composantes périphériques possède un arc simple essentiel (à savoir un arc reliant les deux points marqués) et que toute surface avec une composante périphérique et de genre $g \geq 1$ possède un arc non-séparant essentiel, on conclut que les composantes connexes de $S_{\cup \alpha_i}$ sont des disques. Soit m le nombre de disques de $S_{\cup \alpha_i}$. Puisque $\chi(D^2) = 1$, on en déduit que :

$$m = \chi(S_{\cup \alpha_i}) = \chi(S) + k.$$

De plus, chaque disque peut être assimilé à un polygone où les arêtes sont des arcs de $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$ et les sommets des points marqués de S . En fait, chaque polygone est un triangle. En effet, si un polygone n'avait qu'un sommet et une arête, alors l'arc correspondant ne serait pas essentiel. Si un polygone n'avait que deux sommets, cela impliquerait que le disque a exactement deux arêtes provenant des α_i , et ces deux arêtes seraient donc isotopes. Si le polygone a au moins quatre sommets, alors il existerait dans ce disque un arc qui ne serait isotope à aucun des α_i , contredisant la maximalité du simplexe. Donc chaque disque peut être vu comme un triangle avec trois arêtes provenant des α_i . Comme chaque α_i induit deux arêtes, on conclut que $3m = 2k$. D'où :

$$k = m - \chi(S) = \frac{2}{3}k - \chi(S) \Rightarrow k = -3\chi(S) = 6g - 6 + 3n.$$

Donc la dimension maximale d'un simplexe est $6g - 7 + 3n$. □

Remarque 2.53. Durant la preuve, nous avons décomposé S en des sous-surfaces dont les bords sont des triangles formés de points marqués et d'arcs. Une telle décomposition s'appelle une triangulation.

Théorème 2.54. *Soit S une surface. Si $A(S) \neq \emptyset$, alors le complexe des arcs est contractile.*

Preuve. La preuve présentée est due à Hatcher [Hat].

Soit v un sommet de $A(S)$ représenté par une classe d'isotopie d'arcs a . Soit α un représentant de a . Soit p un point d'un simplexe $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ et α_i un représentant de v_i en position minimale avec α . En coordonnées barycentriques, p s'écrit $\sum_{i=1}^k c_i v_i$, avec $0 \leq c_i \leq 1$. Dans la surface, p est représenté par des voisinages réguliers et disjoints $\alpha_i \times [-1, 1]$ de chaque α_i . On fixe une mesure λ sur α telle que, pour tout i et pour toute composante connexe $\beta \times [-1, 1]$ de $\alpha_i \times [-1, 1] \cap \alpha$, $\lambda(\beta \times [-1, 1]) = c_i$.

Maintenant, on choisit une des extrémités P de α comme point de départ, et on oriente α selon ce point de départ. On fixe un voisinage régulier $\alpha \times [-1, 1]$ de α et on suppose, quitte à appliquer des isotopies, que, pour tout $s, t \in [-1, 1]$, et pour tout i , $\alpha_i \times \{t\}$ intersecte $\alpha \times \{s\}$ de manière transverse. Pour chaque i , on note $B_i := \{\beta_i^1 \times [-1, 1], \dots, \beta_i^{n_i} \times [-1, 1]\}$ les composantes connexes de $\alpha_i \times [-1, 1] \cap \alpha \times [-1, 1]$. Soit $B := \{\beta_1 \times [-1, 1], \dots, \beta_n \times [-1, 1]\} = \cup_{i=1}^k B_i$, où on a renuméroté les $\beta_i^j \times [-1, 1]$ de manière à ce que $\beta_k \times [-1, 1]$ soit le k -ième élément de B intersecté par α .

Quitte à appliquer des isotopies, on peut supposer que, pour tout k , $\beta_k \times [-1, 1] \cap \beta_{k+1} \times [-1, 1] = \beta_k \times \{1\} = \beta_{k+1} \times \{-1\}$ et que pour tout i, j tels que $|i - j| > 1$, $\beta_i \times [-1, 1] \cap \beta_j \times [-1, 1] = \emptyset$. Soit $b := \cup_{i=1}^n \beta_i \times [-1, 1]$. La mesure de $b \cap \alpha$ est égale à $\theta := \sum_{i=1}^k c_i i(\alpha_i, \alpha)$.

On définit alors un flot P_t de la manière suivante. On coupe en partant du point marqué P , une partie de longueur $t\theta$ de b . On pousse ensuite les parties coupées le long de α jusqu'au point marqué P . Les parties coupées définissent alors de nouveaux arcs, qu'on nomme α'_i et α''_i , et ayant pour sommets correspondants v'_i et v''_i .

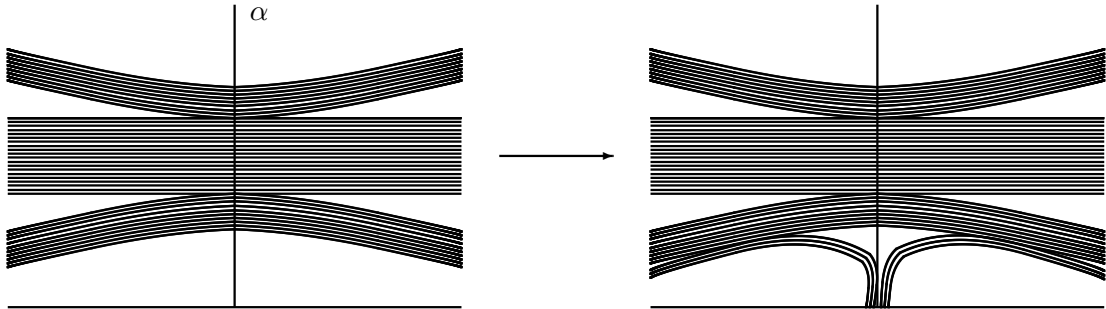


Figure 8: Le flot de Hatcher.

En terme d'un système d'arcs, soit $c_1 = \cup \alpha_i$. Soient x_1, \dots, x_n les points d'intersection de c avec α , ordonnés selon l'orientation de α . En poussant x_1 le long de β jusqu'à P , on obtient un nouveau système d'arcs c_2 en ne comptant plus les arcs isotopes. c_2 rencontre α en les x_2, \dots, x_n . Le simplexe σ_1 correspondant à l'union des systèmes $c_1 \cup c_2$ contient $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ comme face. Le flot P_t définit ainsi une application linéaire de la face correspondant à $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ vers la face correspondant à c_2 , et s'arrêtant lorsqu'elle

atteint cette face. On procède ainsi jusqu'à ce que tous les x_i soient éliminés. Le simplexe $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ est ainsi poussé linéairement par le flot selon une suite de simplexes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Le flot est donc continue sur le simplexe $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Comme le flot sur une face d'un simplexe est le flot du simplexe restreint à cette face, on obtient que le flot est continue sur $A(S)$. De plus il fixe l'étoile simpliciale de v (l'ensemble des simplexes ayant v pour sommet) par définition du complexe des arcs et du flot. Ceci définit ainsi une rétraction par déformation sur l'étoile de v .

Montrons maintenant que l'étoile d'un sommet d'un complexe simplicial est contractile, ce qui permettra de conclure. Effectivement, chaque simplexe est contractile. Soient $\{f_i\}_{i \in I}$ des applications réalisant une rétraction par déformation sur v pour chaque simplexe de l'étoile. Pour conclure il suffit de montrer qu'on peut coller ces applications, i.e. que pour tout simplexe U et T de l'étoile tel que $U \cap T \neq \emptyset$, si f_i et f_j sont les applications correspondantes, alors $f_i|_{U \cap T}$ et $f_j|_{U \cap T}$ sont homotopes. Mais ce dernier fait est vérifié car l'intersection de deux simplexes est un simplexe et que les espaces $(\text{simplexe}) \times [0, 1]$ sont contractiles pour tout simplexe. On peut donc réaliser une homotopie de $f_i|_{U \cap T}$ vers $f_j|_{U \cap T}$ et étendre cette homotopie à tout U par la propriété d'extension des homotopies. On obtient une nouvelle application f'_i qui rétracte par déformation U en v (car $v \in U \cap T$) et qui coïncide avec f_j sur $S \cap T$. En appliquant ce raisonnement à tous les simplexes d'intersection non vide, on obtient une rétraction par déformation de l'étoile de v vers v . \square

3. Automorphismes du complexe des courbes

On montre dans cette partie le théorème suivant, dû à Ivanov [Iva1] :

Théorème 3.1. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $g \geq 2$. Le morphisme naturel*

$$\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut } C(S)$$

est une surjection. De plus, si $(g, n) \neq (2, 0)$, le morphisme considéré est un isomorphisme. Dans le cas où $(g, n) = (2, 0)$, le noyau est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La preuve de ce théorème repose sur le fait que les automorphismes du complexe des courbes préservent un certain nombre de propriétés topologiques des classes d'isotopie des courbes fermées simples. Ceci permettra alors de montrer que tout automorphisme du complexe des courbes induit un automorphisme du complexe des arcs. La proposition suivante permettra alors de conclure :

Proposition 3.11. *Deux automorphismes f et g du complexe des arcs ayant même valeur sur un simplexe de codimension 0 sont égaux.*

Nous montrons en premier lieu l'injectivité du morphisme dans les cas précédemment cités qui nous servira par la suite pour la preuve de la surjectivité.

3.1. Injectivité de $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut } C(S)$

Nous prouvons tout d'abord l'injectivité du morphisme $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut } C(S)$. Celle-ci repose sur la trivivialité du centre de $\text{Mod}(S)$ dans le cas où (g, n) est différent de $(2, 0)$.

Soit $f \in \text{Mod}^*(S)$ tel que l'action de f sur toutes les classes d'isotopie des courbes fermées simples essentielles de la surface soit l'identité. Montrons maintenant que f préserve l'orientation, ce qui conclura la preuve. En effet, si f préserve l'orientation, d'après les propriétés des twists de Dehn et des demi-twists, f commute avec tous les twists de Dehn et les demi-twists. Comme ces derniers engendrent $\text{Mod}(S)$, on conclut que f est dans le centre de $\text{Mod}(S)$, et donc que f est l'identité par le théorème 2.39.

Montrons donc que f préserve l'orientation. On considère un simplexe maximal Δ de $C(S)$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des représentants des classes d'isotopie des sommets de Δ deux à deux en position minimale (ceci est possible par la proposition 2.44). On suppose de plus qu'aucune composante connexe de $S_{\cup \alpha_i}$ ne possède deux bords provenant du même α_i (on rappelle que toutes les composantes connexes de $S_{\cup \alpha_i}$ sont des pantalons, des disques avec deux points marqués ou des anneaux épointés d'après la remarque 2.47). Comme $f(a) = a$ pour toute classe d'isotopie $a \in C(S)$, il existe un représentant F de f tel que $F(\alpha_i) = \alpha_i$ pour tout i . Alors F induit un élément de $\text{Mod}^*(S_{\cup \alpha_i})$, dont on note F' l'un des représentants. On affirme que F' ne permute aucune des composantes connexes de $S_{\cup \alpha_i}$. En effet, supposons que X et Y soient deux composantes connexes de $S_{\cup \alpha_i}$, telles que $F'(X) = Y$. Comme S est connexe et de genre $g \geq 2$, X a pour composante de bord l'un des α_i , par exemple α_1 . Étant donné que F' fixe tous les α_i ,

on conclut que Y a aussi pour bord α_1 . Donc, si on note les images dans S de X et Y par les mêmes lettres, on voit que $\partial(X \cup Y) \subseteq \partial S$. De fait, toujours par le fait que S est connexe, $X \cup Y = S$. Les seules surfaces sans bord ayant une décomposition en deux surfaces avec des complexes des courbes vides sont les surfaces homéomorphes à $S_{0,4}$, $S_{1,2}$ et $S_{2,0}$. Comme toutes ces surfaces sont exclues de la considération, on en déduit que F' ne permute aucune des composantes connexes de $S_{\cup \alpha_i}$.

Maintenant, si F' ne préservait pas l'orientation, on aurait alors que F' induirait sur $\pi_1(P) = \langle x, y \rangle$, où P est une composante connexe de $S_{\cup \alpha_i}$, l'application $x \mapsto x^{-1}$ et $y \mapsto y^{-1}$, qui n'est pas un morphisme de groupes car aucun des α_i n'est deux fois le bord d'une même composante connexe. Donc F' préserve l'orientation et, par suite, $f \in \text{Mod}(S)$. Par ce qui a été dit précédemment, $f = \text{id}$, ce qui conclut.

Dans le cas où S est homéomorphe à $S_{2,0}$, l'involution hyperelliptique est un élément non trivial de $\text{Mod}(S)$ fixant tous les sommets de $C(S)$. C'est en fait le seul élément par le même raisonnement que pour l'injectivité des autres cas et par le fait que le centre de $\text{Mod}(S)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3.2. Propriétés de $\text{Aut } C(S)$

Dans toute cette sous-section, on suppose que S une surface homéomorphe $S_{g,n}$, avec $g \geq 2$.

L'objectif de cette sous-section est de montrer que tout automorphisme de $C(S)$ préserve également des propriétés topologiques des classes d'isotopie de courbes. Pour ce faire, il nous faut traduire les propriétés topologiques des courbes en des termes algébriques. Pour ce faire, nous avons tout d'abord besoin de définitions plus générales sur un complexe simplicial.

Définition 3.2. Soit X un complexe simplicial drapeau, Δ une collection de simplexes de X .

1. *La fermeture* de Δ , notée $Cl(\Delta)$, est le plus petit sous-complexe simplicial de X contenant chaque simplexe de Δ . Ainsi, $Cl(\Delta)$ est le complexe simplicial contenant Δ et toutes les faces des simplexes de Δ .
2. *L'étoile simpliciale* de Δ , notée $St(\Delta)$, est l'ensemble des simplexes de X ayant une face dans Δ .
3. *Le lien* de Δ , noté $L(\Delta)$, est défini par :

$$L(\Delta) = Cl(St(\Delta)) - St(Cl(\Delta)).$$

Par exemple, dans le cas d'un graphe G , soit \tilde{G} le plus petit complexe simplicial drapeau contenant G . Le lien d'un sommet v est le complexe constitué de l'ensemble V des sommets reliés à v , ainsi que les arêtes reliant deux sommets de V dans G .

Ainsi, dans le cas du complexe des courbes, le lien d'un sommet v correspondant à une classe d'isotopie a est le complexe drapeau dont les sommets sont les classes d'isotopie $b \neq a$ avec $i(a, b) = 0$. Deux sommets sont reliés par une arête dans $L(v)$ si l'intersection géométrique des classes d'isotopie correspondantes est nulle. On déduit ainsi que $L(v) \simeq C(S_a)$, le complexe des courbes de S_a .

Définition 3.3. Soit G un graphe.

- Le *lien dual* d'un sommet v , noté $L^*(v)$, est le graphe ayant les mêmes sommets que $L(v)$ et où deux sommets de $L^*(v)$ sont reliés par une arête s'ils ne sont pas reliés par une arête dans $L(v)$.
- Le lien dual de deux sommets v et w , noté $L^*(v, w)$, est le graphe ayant les mêmes sommets que $L(v, w)$ et où deux sommets de $L^*(v, w)$ sont reliés par une arête s'ils ne sont pas reliés par une arête dans $L(v, w)$.

Ainsi, dans le cas du complexe des courbes, soit v un sommet correspondant à une classe d'isotopie a , α un représentant de a , et b et c deux sommets du complexe des courbes appartenant à $L(v)$. Les classes d'isotopie b et c sont dans la même composante connexe C' de $L^*(v)$ si, et seulement si, il existe une suite de sommets a_1, \dots, a_k dans C' tels que $b = a_1$, $c = a_k$, et, pour tout, i $i(a_i, a_{i+1}) \neq 0$. En particulier,

Proposition 3.4. Soit a la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle α , et b et c deux classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles telles que $i(a, b) = i(a, c) = 0$. Les classes d'isotopie b et c sont dans la même composante connexe de $L^*(a)$ si, et seulement, si, ils sont dans la même composante connexe de S_α .

Preuve. Si b et c sont dans la même composante connexe C' de $L^*(a)$, alors il existe une suite de sommets a_1, \dots, a_k tels que $b = a_1$, $c = a_k$, tels que pour tout j , $i(a, a_j) = 0$ et tels que pour tout i , $i(a_i, a_{i+1}) \neq 0$. Une telle suite ne pourrait pas exister s'il existait des représentants β et γ de b et c respectivement qui soient dans deux composantes connexes différentes de S_α car cela impliquerait qu'il existerait i_0 tel que $i(a, a_{i_0}) \neq 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe des représentants β et γ de b et c en position minimale tels que β et γ sont dans la même composante connexe S' de S_α . Alors il existe une classe d'isotopie de courbes d tels que $i(a, d) = 0$, $i(b, d) \neq 0$ et $i(c, d) \neq 0$. Pour montrer cela, il suffit de construire dans S' une courbe fermée simple essentielle δ intersectant β et γ sans former de bigone. La classe d'isotopie de δ dans S vérifie alors les conditions voulues. Ainsi, b et c sont dans la même composante connexe de $L(a)$. \square

En combinant avec le résultat sur la dimension d'un simplexe maximal de $C(S)$, on déduit immédiatement la propriété suivante :

Proposition 3.5. Un sommet $v \in C(S)$ représente une classe d'isotopie d'une courbe séparante ne délimitant pas un disque avec deux points marqués si, et seulement si, $L^*(v)$ n'est pas connexe.

Preuve. Si v est la classe d'isotopie d'une courbe α séparante ne délimitant pas une surface homéomorphe à $S_{0,1,2}$, alors il existe β et γ deux courbes de S_α dans deux composantes connexes différentes. Leurs classes d'isotopie respectives sont dans des composantes connexes différentes de $L^*(v)$. Donc $L^*(v)$ n'est pas connexe.

Réciproquement, si α est non séparante, alors S_α est connexe et donc aussi $L^*(v)$. Si α est séparante et délimite un disque avec deux points marqués, alors, comme $S_{0,1,2}$ a un complexe des courbes vide, toutes les classes d'isotopie de courbes essentielles sont dans la même composante connexe de S_α , et donc $L^*(v)$ est connexe. \square

Proposition 3.6. *Soit a et b deux classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles telles que $i(a, b) = 1$. Alors pour tout automorphisme du complexe des courbes f , $i(f(a), f(b)) = 1$.*

Afin de montrer ce résultat, on prouve d'abord un lemme qui nous permet de traduire le fait que l'intersection géométrique soit égale à 1 en termes de propriétés de sous-complexes du complexe des courbes $C(S)$.

Lemme 3.7. *Soient a_1, a_2 des sommets de $C(S)$. L'intersection géométrique entre a_1 et a_2 est égale à 1 si, et seulement si, il existe a_3, a_4 et a_5 des classes d'isotopie deux à deux distinctes de courbes fermées simples essentielles vérifiant les conditions suivantes :*

1. $i(a_1, a_4) = i(a_1, a_5) = i(a_2, a_4) = i(a_2, a_5) = i(a_3, a_5) = 0$;
2. Les autres intersections sont non nulles ;
3. a_4 est la classe d'isotopie d'une courbe séparante telle qu'il existe un représentant α_4 de a_4 tel que l'une des composantes connexes de S_{α_4} est un tore à un bord contenant des représentants de a_1 et a_2 .

Preuve. Pour l'implication, par principe de changement de coordonnées pour les courbes s'intersectant une fois (c.f. proposition 2.19), on se ramène aux courbes de la figure 9.

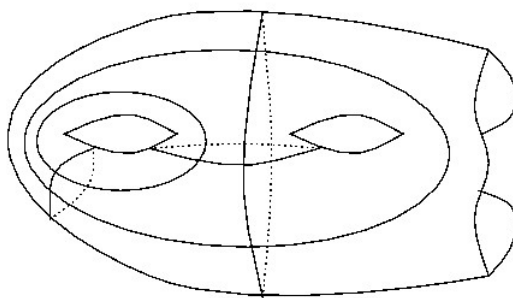


Figure 9: Implication dans la preuve de 3.7.

Pour la réciproque, on choisit des représentants α_i des a_i deux à deux en position minimale. On considère la sous-surface S_{α_4} , et plus précisément sa composante connexe

T homéomorphe à $S_{1,1,0}$. Comme $i(a_3, a_4) \neq 0$ et $i(a_5, a_4) \neq 0$, α_3 et α_5 définissent des arcs dans T . On note γ_3 (resp. γ_5) un arc induit par α_3 (resp. α_5) dans T . Soit

$$T' := T/\partial T.$$

T' est homéomorphe à un tore. Soit $\rho: T \rightarrow T'$ le morphisme canonique, et soit $p = \rho(\partial T)$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, soit α'_i l'image de α_i dans T' , et soit a_i la classe d'isotopie de α'_i . De même, pour tout $j \in \{3, 5\}$, soit γ'_j l'image de γ_j dans T' , et a'_j la classe d'isotopie de γ'_j . On voit, par les hypothèses sur α_3 et α_5 , que $i(a'_3, a'_5) = 1$. On remarque également que si $i(a'_1, a'_2) = 1$, alors $i(a_1, a_2) = 1$ car des représentants en position minimale de a'_1 et a'_2 ne formeront pas de bigone (c.f. proposition 2.8), et donc, en supposant que ces représentants ne contiennent pas p , les antécédents de ces courbes dans T seront des représentants de a_1 et a_2 en position minimale. Montrons donc que $i(a'_1, a'_2) = 1$.

Quitte à appliquer un élément de $\text{Mod}(T')$, par principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.18), on peut supposer que $a'_1 = (1, 0)$. On écrit, pour tout $i \geq 2$, $a'_i = (p_i, q_i)$. On a, par la proposition 2.10 :

$$i(a'_1, a'_3) = 0 = |q_3|.$$

Donc $q_3 = 0$. Par ailleurs,

$$i(a'_3, a'_5) = 1 = |p_3 q_5| = 1.$$

Donc, comme $p_3, q_5 \in \mathbb{Z}$, $|p_3| = |q_5| = 1$.

De plus,

$$i(a_2, a_5) = 0 \Rightarrow p_2 q_5 = p_5 q_2.$$

Les courbes étant simples, $\text{pgcd}(p_i, q_i) = 1$ pour tout i . Donc $p_2 |p_5, q_2 |q_5, q_5 |q_2, p_5 |p_2$, et, par conséquent, $|p_2| = |p_5|$ et $|q_2| = |q_5|$.

Enfin,

$$i(a_1, a_2) = |q_2| = |q_5| = 1.$$

□

On peut désormais prouver la proposition 3.6 :

Preuve. Il suffit de montrer que les trois conditions dans le lemme précédent sont stables par automorphisme du complexe des courbes. Comme pour tout automorphisme f de $C(S)$ et tous sommets u, v de $C(S)$, u et v sont reliés par une arête si, et seulement si, $f(u)$ et $f(v)$ sont reliés par une arête, les deux premières conditions en découlent.

Pour la troisième condition, définissons tout d'abord X comme étant le complexe simplicial drapeau dont les sommets sont ceux correspondant à la composante connexe de $L^*(v)$ contenant a_1 et a_2 et où deux sommets sont reliés par une arête si leur intersection géométrique est nulle.

Affirmation : une classe d'isotopie de courbes fermées simples et essentielles a représentée par un sommet v est séparante et délimite un tore à un bord avec deux représentants de a_1 et a_2 à l'intérieur si, et seulement si :

- $L^*(v)$ n'est pas connexe ;
- X est homotopiquement équivalent à une somme connexe de sphères de dimension 0.

En effet, la proposition 3.5 donne qu'une courbe est séparante et ne délimite pas un disque avec deux points marqués si, et seulement si, $L^*(v)$ n'est pas connexe.

Maintenant, soit α un représentant de a . La construction de X montre qu'il est isomorphe au complexe des courbes de la composante connexe de S_α contenant a_1 et a_2 . Par les propositions 2.46 et 2.48, cette composante connexe est un tore à un bord si, et seulement si la dimension d'un simplexe maximal de X est 0 et si ce dernier est homotopiquement équivalent à une somme connexe de sphères de dimension 0. Comme X est un sous-complexe simplicial de $C(S)$, ces deux conditions sont préservées par automorphisme du complexe des courbes, et on obtient bien le résultat voulu. \square

Corollaire 3.8. *Soit f un automorphisme du complexe des courbes, a la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle.*

1. *Si a est non séparante, alors $f(a)$ l'est également ;*
2. *Si a est séparante et délimite un disque avec deux points marqués, alors $f(a)$ également.*

Preuve. Par la proposition 3.5, a est non séparante ou délimite un disque avec deux points marqués si, et seulement si, $L^*(a)$ est connexe. Montrons maintenant que a est non séparante si, et seulement si, $L^*(a)$ est connexe et il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles b telle que $i(a, b) = 1$.

En effet, si a est non séparante, on construit une telle classe d'isotopie b par principe de changement de coordonnées. En effet, il existe deux courbes fermées simples non-séparantes γ_1 et γ_2 dans S tels que $i([\gamma_1], [\gamma_2]) = 1$, puis par la proposition 2.18, il existe $f \in \text{Mod}(S)$ tel que $f([\gamma_1]) = a$, et $i(a, f([\gamma_2])) = 1$.

Réciproquement, le fait que $L^*(a)$ soit connexe implique que a est non-séparante ou a délimite un disque avec deux points marqués. Le deuxième cas n'est pas possible car, par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), si a délimitait un disque avec deux points marqués, alors pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples b , $i(a, b)$ est un entier pair. Donc a est non séparante.

De même, a est séparante et délimite un disque avec deux points marqués si, et seulement si, $L^*(a)$ est connexe et pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples b , $i(a, b) \neq 1$. Comme ces propriétés sont préservées par automorphisme par la proposition 3.6, on a le résultat voulu. \square

Remarque 3.9. Dans le cas d'une surface à bord, $L^*(a)$ est connexe si, et seulement si, a est soit non séparante, soit délimite un disque avec deux points marqués, soit un anneau épointé, soit un pantalon. Cette remarque nous sera utile par la suite lorsque l'on découpera des surfaces selon des courbes ou des arcs.

Proposition 3.10. Soient a et b deux classes d'isotopies de courbes fermées simples essentielles telles que $i(a, b) = 0$, et soit f un automorphisme du complexe des courbes. Si a et b délimitent un anneau épointé, alors $f(a)$ et $f(b)$ également.

Preuve. Soient α et β deux représentants de a et b en position minimale. Montrons tout d'abord que soit a et b sont non séparantes, soit a et b sont séparantes. En effet, si a est séparante et b non séparante, alors soit P le point marqué dans l'anneau épointé délimité par a et b . Soit S' la surface homéomorphe à $S_{g, n-1}$ obtenue à partir de S en ne considérant plus le point P comme un point marqué. Soient a' et b' les images de a et b dans S' . Alors a' est séparante et b' est non séparante car a est séparante et b est non séparante. Mais $a' = b'$ car a et b délimitent un anneau épointé. D'où une contradiction. Donc soit a et b sont non séparantes, soit a et b sont séparantes.

Maintenant, supposons que a et b soient non séparantes. L'objectif est de montrer que a et b délimitent un anneau épointé si, et seulement si, $L^*(a, b)$ est connexe et il n'existe pas de classe d'isotopie de courbes c telle que $i(b, c) = 1$ et $i(a, c) = 0$. Une fois cette propriété démontrée, le résultat se déduira de la proposition 3.6 dans le cas où a et b sont non séparantes.

Pour cela on montre tout d'abord l'équivalence suivante. Soit β_α la courbe β considérée dans S_α , b_a sa classe d'isotopie dans S_α .

Affirmation : $L^*(a, b)$ est connexe si, et seulement si, β_α est soit non séparante, soit délimite un disque avec deux points marqués, soit délimite un anneau épointé, soit délimite un pantalon.

Effectivement, soit v un sommet de $L(a, b)$ et γ un représentant de v disjoint de $\alpha \times [-1, 1]$ et $\beta \times [-1, 1]$. D'une part, nous observons que, comme dans le cas d'un sommet, l'application qui à v associe la classe d'isotopie de γ dans $S_{\alpha \cup \beta}$ induit un isomorphisme $L(a, b) \simeq C(S_{\alpha \cup \beta})$. Par ailleurs, l'application qui a un sommet $[\delta]$ de $L^*(b_a)$ associe la classe d'isotopie de δ dans S induit un isomorphisme $L^*(b_a) \simeq L^*(a, b)$. De ce fait, le résultat se déduit de la proposition 3.5 et de la remarque 3.9.

À partir de ces résultats préliminaires, nous pouvons montrer l'équivalence annoncée.

Supposons que $L^*(a, b)$ est connexe et qu'il n'existe pas de classe d'isotopie de courbes c telle que $i(b, c) = 1$ et $i(a, c) = 0$. Par l'affirmation précédente, b_a est soit non séparante, soit délimite un disque avec deux points marqués, soit délimite un anneau épointé, soit délimite un pantalon. L'objectif est de montrer que b_a délimite un anneau épointé, car alors a et b délimiteraient un anneau épointé.

Le cas où b_a délimite un disque avec deux points marqués est exclu car sinon b délimiterait un disque avec deux points marqués dans S , ce qui contredirait le fait que b est non séparante. De même le cas où b_a délimite un pantalon est exclu car b n'est pas séparante dans S .

Si b_a était non séparante, alors il existerait une classe d'isotopie c_a dans S_α d'intersection géométrique égale à 1 avec b_a . La classe d'isotopie c_a se relèverait en une classe d'isotopie c dans S telle que $i(b, c) = 1$ et $i(a, c) = 0$. Ceci contredit l'hypothèse initiale. Donc $L^*(a, b)$ connexe et il n'existe pas de classe d'isotopie de courbes c telle que $i(b, c) = 1$ et $i(a, c) = 0$ implique que b_a délimitent un anneau épointé dans S_α et donc a et b délimitent un anneau épointé dans S .

Réciproquement, si a et b délimitent un anneau épointé, alors $S_{\alpha \cup \beta}$ a deux composantes connexes, donc l'une est un anneau épointé. Comme le complexe des courbes d'un anneau épointé est vide, $L^*(a, b)$ est bien connexe. Par ailleurs, la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22) implique que si c est une classe d'isotopie de courbes telle que $i(a, c) = 0$, alors $i(b, c)$ est un entier pair. Donc si a et b délimitent un anneau épointé, il n'existe pas de classe d'isotopie de courbes c telle que $i(b, c) = 1$ et $i(a, c) = 0$. On peut donc conclure que a et b délimitent un anneau épointé si, et seulement si, $L^*(a, b)$ est connexe et il n'existe pas de classe d'isotopie de courbes c telle que $i(b, c) = 1$ et $i(a, c) = 0$.

Étant donné que toutes ces propriétés sont stables par automorphisme du complexe des courbes d'après la proposition 3.6 (car, en particulier, $g(L^*(a, b)) = L^*(g(a), g(b))$) pour tout automorphisme g , le résultat est bien prouvé dans le cas où a et b sont les classes d'isotopie de courbes non séparantes.

Supposons maintenant que a et b soient séparantes. Soit b_a (resp. a_b) l'image de b dans $C(S_\alpha)$ (resp. l'image de a dans $C(S_\beta)$), et soit S'_β (resp. S'_α) la composante connexe de S_β (resp. S_α) contenant α (resp. β). On note $L_{S'_\alpha}(b_a)$ (resp. $L_{S'_\beta}(a_b)$) le lien de b_a (resp. a_b) dans $C(S'_\alpha)$ (resp. $C(S'_\beta)$).

Affirmation : a et b délimitent un anneau épointé si, et seulement si, l'une des trois situations (mutuellement exclusives) est vérifiée :

1. soit $L^*(a)$ et $L^*(b)$ sont non connexes et $L_{S'_\alpha}(b_a)$ (resp. $L_{S'_\beta}(a_b)$) est connexe ;
2. soit $L^*(a)$ est connexe, $L^*(b)$ est non connexe et $L_{S'_\alpha}(b_a)$ est connexe ;
3. soit $L^*(b)$ est connexe, $L^*(a)$ est non connexe et $L_{S'_\beta}(a_b)$ est connexe.

Supposons que a et b délimitent un anneau épointé. On montre tout d'abord que nous sommes dans l'une des trois configurations suivantes :

- ni a ni b ne délimitent de disques avec deux points marqués ;
- a délimite un disque avec deux points marqués et b ne délimite pas de disque avec deux points marqués ;
- b délimite un disque avec deux points marqués et a ne délimite pas de disque avec deux points marqués.

En effet, si a délimite un disque avec deux points marqués, notons P et Q les points marqués dans le disque délimité par a . Montrons que b ne peut pas délimiter un disque avec deux points marqués dans S . Si tel était le cas, S_β aurait une composante connexe homéomorphe à $S_{0,1,2}$ et une autre homéomorphe à $S_{g,1,n-2}$. Comme un disque avec deux points marqués a un complexe des courbes vide et que a_b est une classe d'isotopie de courbes essentielle car $a \neq b$ et a est essentielle, un représentant α_β de a_b se trouve dans la composante connexe S' homéomorphe à $S_{g,1,n-2}$. Comme a et b délimitent un anneau épointé dans S , α_β délimite aussi un anneau épointé dans S' . Mais étant donné que $a \neq b$ et que $i(a, b) = 0$, b ne délimite pas un disque avec deux points marqués dont l'un ou les points marqués intérieurs sont P ou Q . Donc, les images P_b et Q_b des points marqués P et Q dans S_β sont dans S' . Ainsi les points marqués dans le disque délimité par a' sont P_b et Q_b . De fait, α_β délimite dans S' un disque avec deux points marqués et un anneau épointé, ce qui n'est pas possible car le genre de S' est plus grand que 2. De ce fait, nous sommes bien dans l'une des trois configurations énoncées.

Nous examinons désormais chacun des trois cas.

Si ni a ni b ne délimitent de disque avec deux points marqués, par la proposition 3.5, $L^*(a)$ (resp. $L^*(b)$) n'est pas connexe. De plus, dans ce cas, si a et b délimitent un anneau épointé, a_b (resp. b_a) délimite un anneau épointé dans S_β (resp. S_α). De ce fait, comme les composantes connexes de $L_{S'_\beta}(a_b)$ (resp. $L_{S'_\alpha}(b_a)$) sont en correspondance avec les complexes des courbes des composantes connexes de $(S'_\beta)_\alpha$ (resp. $(S'_\alpha)_\beta$), et que le complexe des courbes d'un anneau épointé est vide, $L_{S'_\alpha}(b_a)$ et $L_{S'_\beta}(a_b)$ sont connexes.

Pour les deux autres situations, supposons que a et b délimitent un anneau épointé et que a délimite un disque avec deux points marqués (le cas où b délimite un disque avec deux points marqués est complètement similaire). On a donc bien que $L^*(a)$ est connexe et $L^*(b)$ est non connexe par la proposition 3.5. De plus, le fait que a et b délimitent un anneau épointé prouve, comme précédemment, que $L_{S'_\alpha}(b_a)$ est connexe.

Réciproquement, si $L^*(a)$ et $L^*(b)$ sont non connexes et $L_{S'_\alpha}(b_a)$ (resp. $L_{S'_\beta}(a_b)$) est connexe, alors soit b_a est non séparante, soit b_a délimite un pantalon, soit b_a délimite un disque avec deux points marqués. Le premier cas n'est pas possible car sinon b serait une classe d'isotopie de courbes non séparante dans S . Effectivement, b_a serait dans l'orbite des classes d'isotopie de courbes non séparantes sous l'action de $\text{Mod}(S_\alpha)$. Mais comme tout homéomorphisme de S_α peut s'étendre en un homéomorphisme de S , on obtiendrait qu'il existe un élément de $\text{Mod}(S)$ envoyant une classe d'isotopie de courbes séparante sur une classe d'isotopie de courbes non séparante, une contradiction. Le deuxième cas est de même exclu car chaque composante connexe de S_α a un unique bord. Donc on a bien que a et b délimitent un anneau épointé.

Supposons maintenant que $L^*(a)$ est connexe, $L^*(b)$ est non connexe et $L_{S'_\alpha}(b_a)$ est connexe (le troisième cas est complètement similaire). Comme $L^*(a)$ est connexe et que a est séparante, a délimite un disque avec deux points marqués dans S . Comme $L_{S'_\alpha}(b_a)$ est connexe, soit b_a est séparante et délimite un disque avec deux points marqués ou un anneau épointé ou un pantalon dans S_α , soit b_a est non séparante dans S_α . Ce dernier cas est exclu comme précédemment car b est séparante dans S . Donc b_a est séparante

dans S_α . De même, comme a est séparante, chaque composante connexe de S_α contient au plus un bord, donc b_a ne délimite pas un pantalon dans S_α . Enfin, le fait que b ne délimite pas de disque avec deux points marqués dans S implique que b_a ne délimite pas de disque avec deux points marqués dans S_α .

En conclusion b_a délimite un anneau épointé dans S_α et donc a et b délimitent un anneau épointé. L'équivalence est donc prouvée.

Ainsi, étant donné que toutes les propriétés de l'équivalence sont stables par automorphisme du complexe des courbes, le résultat s'en déduit dans le cas où a et b sont les classes d'isotopie de courbes séparantes. □

3.3. Propriétés de $\text{Aut } A(S)$

Dans cette partie, nous supposons que la surface S est homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $n > 0$. Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.11. *Deux automorphismes f et g du complexe des arcs ayant même valeur sur un simplexe de codimension 0 sont égaux.*

Ceci nous sera utile pour la preuve de la surjectivité du théorème 3.1 car nous allons construire une application $\text{Aut } C(S) \rightarrow \text{Aut } A(S)$.

Pour prouver cette proposition, nous avons besoin au préalable d'étudier les propriétés des simplexes de $A(S)$. Nous montrons en effet la proposition suivante :

Proposition 3.12. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$. Si $A(S) \neq \emptyset$, alors pour toute paire $(\Delta, \tilde{\Delta})$ de simplexes maximaux de $A(S)$, Δ et $\tilde{\Delta}$ sont connectés par un chemin de simplexes maximaux tel que deux simplexes consécutifs du chemin partagent une face de codimension 1.*

Pour cela, on montre cette propriété dans un contexte plus général sur les complexes simpliciaux :

Lemme 3.13. *Soit X un complexe simplicial de dimension d vérifiant :*

1. X est connexe ;
2. X est un complexe drapeau ;
3. tout simplexe est contenu dans un d -simplexe;
4. si Δ est un k -simplexe, $k \leq d - 2$, alors $L(\Delta)$ est connexe.

Si Δ et Δ' sont deux d -simplexes dans X , alors il existe une suite de d -simplexes $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n = \Delta'$ telle que, pour tout i , $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ est un $(d - 1)$ -simplexe.

Preuve. Comme X est connexe, et comme tout simplexe est contenu dans un d -simplexe par hypothèse, il existe une suite de d -simplexes deux à deux distincts $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n = \Delta'$ telle que, pour tout i , $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ est non vide. On sait de plus que l'intersection de deux simplexes est un simplexe par définition d'un complexe simplicial.

Montrons maintenant que si $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ est un k -simplexe avec $k < d - 1$, alors il existe une suite $\Delta_i = \Delta_{i_1}, \Delta_{i_2}, \dots, \Delta_{i_m} = \Delta_{i+1}$ de d -simplexes telle que, pour tout j , $\Delta_{i_j} \cap \Delta_{i_{j+1}}$ est un $(k + 1)$ -simplexe. Par récurrence, ceci permettra de conclure.

Soit $\tilde{\Delta} := \Delta_i \cap \Delta_{i+1} \neq \emptyset$. Si la dimension de $\tilde{\Delta}$ est inférieure à $d - 2$, considérons $L(\tilde{\Delta})$. Par l'hypothèse 4, $L(\tilde{\Delta})$ est connexe. De plus, $\Delta_i \cap L(\tilde{\Delta}) \neq \emptyset$ et $\Delta_{i+1} \cap L(\tilde{\Delta}) \neq \emptyset$ car $\Delta_i \neq \Delta_{i+1}$. Enfin, par l'hypothèse 2, si deux sommets $v, w \in L(\tilde{\Delta})$ sont reliés par une arête, alors $\{v, w, \tilde{\Delta}\}$ est un simplexe et l'hypothèse 3 donne que $\{v, w, \tilde{\Delta}\}$ est contenu dans un d -simplexe.

Soit v_1, \dots, v_k un chemin contenu dans $L(\tilde{\Delta})$ avec $v_1 \in \Delta_i$ et $v_k \in \Delta_{i+1}$ (ce qui est possible par l'hypothèse 4). On pose $\Delta_{i_1} = \Delta_i$ et Δ_{i_j} un d -simplexe contenant $\{v_{j-1}, v_j, \tilde{\Delta}\}$. Ceci donne une chaîne de d -simplexes entre Δ_i et Δ_{i+1} où $\Delta_{i_j} \cap \Delta_{i_{j+1}}$ contient le $(k + 1)$ -simplexe $\{v_j, \tilde{\Delta}\}$. □

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 3.12 :

Preuve. Il suffit de montrer que $A(S)$ vérifie les conditions du lemme 3.13 :

1. $A(S)$ est connexe car contractile d'après le théorème 2.54;
2. $A(S)$ est un complexe drapeau par définition;
3. Soit Δ un simplexe avec $\dim(\Delta) \leq 6g - 8 + 3n$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des arcs représentant les classes d'isotopie des sommets de Δ . Alors $S_{\cup \alpha_i}$ est une surface (potentiellement non connexe) dont les composantes connexes ne sont pas toutes des triangles dont les arêtes proviennent des arcs et les sommets des points marqués de S (c.f. proposition 2.52). On peut donc trouver de nouveaux arcs disjoints $\{\beta_j\}$ dans $S_{\cup \alpha_i}$ tels que $S_{\cup \alpha_i} \cup \cup \beta_j$ soit une collection de triangles. Par la proposition 2.52, $\dim\{\Delta, \{\beta_j\}\} = 6g - 7 + 3n$.
4. Soit Δ un simplexe avec $\dim(\Delta) \leq 6g - 9 + 3n$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des arcs représentant les classes d'isotopie des sommets de Δ . Par le même raisonnement que précédemment pour le complexe des courbes, $L(\Delta) \simeq A(S_{\cup \alpha_i})$. Comme $\dim(\Delta) \leq 6g - 9 + 3n$, $A(S_{\cup \alpha_i}) \neq \emptyset$, et par le théorème 2.54, $A(S_{\cup \alpha_i})$ est contractile. D'où $L(\Delta)$ est connexe.

Ainsi $A(S)$ vérifie les conditions du lemme 3.13, d'où le résultat. □

Proposition 3.14. *Si d est la dimension d'un simplexe maximal de $A(S)$, alors tout $(d - 1)$ -simplexe Δ de $A(S)$ est une face d'au plus 2 simplexes de dimension d .*

Preuve. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ des arcs représentant les classes d'isotopie des sommets de Δ . Examinons les composantes connexes possibles de $S_{\cup\alpha_i}$. Aucune composante connexe ne peut avoir de genre $g \geq 1$ car la dimension du complexe des arcs d'une telle composante connexe serait supérieure à $6 - 7 + 3 = 2$. De même, aucune composante connexe ne peut avoir un nombre de points marqués plus grand que 3 car la dimension du complexe des arcs serait supérieure à $-7 + 9 = 2$.

Donc les composantes connexes de $S_{\cup\alpha_i}$ sont des disques, des disques contenant un point marqué et des anneaux. Dans le cas d'un anneau, chaque composante de bord peut être vue comme un polygone dont les sommets sont les points marqués et les arêtes des arcs dans $\{\alpha_i\}_{i \leq d-1}$. Or, chaque bord ayant au moins un sommet, il existe dans l'anneau deux arcs disjoints et non isotopes, à savoir un arc γ reliant les sommets de chaque bord et le même arc auquel on a appliqué un twist de Dehn. Donc les composantes connexes de $S_{\cup\alpha_i}$ ne peuvent pas être des anneaux.

Dans le cas d'un disque avec un point marqué, soit P le point marqué. On considère toujours le bord du disque comme étant un polygone. Ce dernier ne peut avoir qu'un seul sommet car sinon soient Q_1 et Q_2 les deux sommets du bord. Il existerait deux arcs essentiels disjoints des α_i dans le disque, à savoir l'arc reliant P et Q_1 et l'arc reliant P et Q_2 . Donc la seule possibilité pour qu'un disque épointé soit une composante connexe de $S_{\cup\alpha_i}$ est qu'un des arcs α_{i_0} parte d'un point marqué Q et fasse le tour d'un autre point marqué P avant de revenir à Q . Dans ce cas, il n'y a qu'un seul arc essentiel dans le disque épointé, à savoir celui reliant P et Q .

Dans le cas d'un disque, le polygone correspondant au bord ne peut pas être composé de plus de cinq sommets de S . En effet, il existerait alors deux arcs essentiels disjoints dans le disque. De même le cas où il n'y a que deux sommets est exclu car les α_i ne sont pas isotopes et celui avec un sommet également car tous les α_i sont essentiels. Ainsi les possibilités restantes sont les polygones avec trois ou quatre sommets. Dans le premier cas il n'y a pas d'arc essentiel et dans le second il y a deux arcs essentiels et non isotopes qui s'intersectent. Enfin, le cas du disque épointé et celui du disque avec quatre sommets ne peuvent pas arriver en même temps car sinon on aurait deux arcs essentiels et disjoints dans $S_{\cup\alpha_i}$.

En combinant tous les cas, on voit bien que tout $(d-1)$ -simplexe Δ de $A(S)$ est la face d'au plus 2 d -simplexes. \square

Nous prouvons à présent la proposition 3.11 :

Preuve. Comme tout simplexe de $A(S)$ est contenu dans un simplexe de dimension maximale, il suffit de montrer que f et g ont même valeur en restriction à tout simplexe maximal. Soit Δ le simplexe de codimension 0 tel que $f(\Delta) = g(\Delta)$. Soit Δ' un autre simplexe de codimension 0. D'après le lemme 3.13, il existe une suite de d -simplexes $\Delta = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n = \Delta'$ telle que $\Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ est un $(d-1)$ -simplexe. Montrons par un raisonnement de proche en proche que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(\Delta_i) = g(\Delta_i)$. Par hypothèse, le résultat est vrai pour Δ_1 . Supposons que $f(\Delta_{i-1}) = g(\Delta_{i-1})$. Alors dans Δ_i f et g ont même valeur sur une face F de codimension 1. Comme toute face de codimension 1 est contenu dans au plus deux simplexes de codimension 0 par la

proposition 3.14, et que $f(\Delta_{i-1}) = g(\Delta_{i-1})$, alors nécessairement f et g ont même image sur l'autre simplexe contenant F . D'où le résultat. \square

3.4. De $\text{Aut } C(S)$ vers $\text{Aut } A(S)$

Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $g \geq 2$ et $n \geq 1$.

Comme nous l'avons vu précédemment, l'étude d'un automorphisme de $A(S)$ est plus aisée que l'étude d'un automorphisme de $C(S)$: il suffit d'étudier ce qu'il fait sur un unique simplexe maximal pour connaître son comportement global (cf. proposition 3.11). De fait, la stratégie que nous allons adopter est d'associer à chaque automorphisme du complexe des courbes un automorphisme du complexe des arcs. Nous construisons en fait une injection $\text{Aut } C(S) \hookrightarrow \text{Aut } A(S)$.

Pour ce faire, nous montrons tout d'abord que les automorphismes du complexe des courbes définissent une action sur l'ensemble des points marqués de la surface. Puis, nous associerons à chaque arc de S une collection de courbes de S afin de définir l'application $\text{Aut } C(S) \hookrightarrow \text{Aut } A(S)$ voulue. Dans cette sous-section, nous nous inspirons de [Kor].

Lemme 3.15. *L'application F qui à un arc α reliant deux points marqués distincts associe le bord d'un voisinage régulier $\alpha \times [-1, 1]$ de α induit une bijection f entre les classes d'isotopie d'arcs reliant deux points marqués différents et les classes d'isotopie de courbes délimitant un disque avec deux points marqués.*

Preuve. On construit un inverse de l'application f , ce qui permettra de conclure. Soit b une classe d'isotopie de courbes fermées simples délimitant un disque avec deux points marqués, et β un représentant de b . Soient P_1 et P_2 les points marqués intérieurs du disque délimité par β . Alors il existe un unique arc γ défini à isotopie près reliant P et Q et n'intersectant pas β par la proposition 2.22. On associe alors à b la classe d'isotopie de γ . Les deux constructions ci-dessus sont bien inverses l'une de l'autre, ce qui permet de conclure. \square

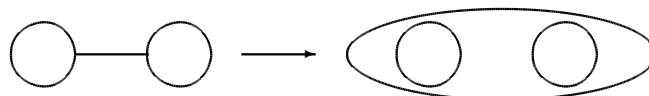


Figure 10: La correspondance décrite dans le lemme 3.15.

Lemme 3.16. *Soit A_{es} l'ensemble des arcs reliant un unique point marqué et tels que les bords d'un voisinage régulier sont des courbes fermées simples essentielles. L'application F qui à un élément α de A_{es} associe les bords d'un voisinage régulier $\alpha \times [-1, 1]$ de α induit une bijection f entre :*

- les classes d'isotopie d'arcs reliant un unique point marqué et tel que les bords d'un voisinage régulier de l'union de l'arc et du point marqué qu'elle relie sont des courbes essentielles ; et

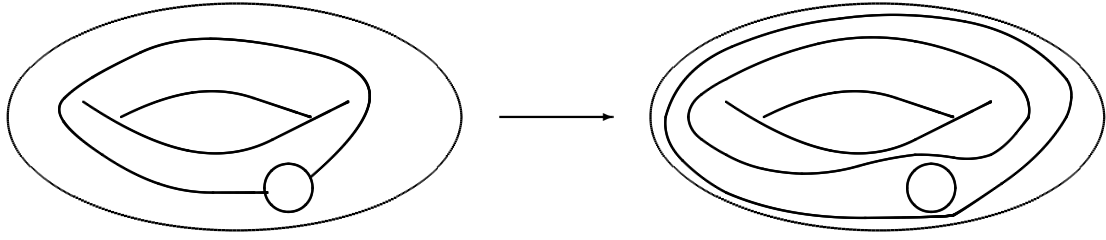


Figure 11: Illustration de la correspondance du lemme 3.16.

- les paires de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles dont l'union délimite un anneau épointé.

Preuve. Construisons un inverse pour f . Soient α et β des représentants de deux classes d'isotopie de courbes a et b dont l'union délimite un anneau épointé homéomorphe à $S_{0,2,1}$. Dans cet anneau, il existe un unique point marqué P' . De plus, dans cet anneau, il existe, à isotopie près, un unique arc γ dont les deux extrémités sont P' par la proposition 2.22. Soit g l'application qui envoie (a, b) sur $[\gamma]$.

Les applications f et g sont bien inverses l'une de l'autre, ce qui permet de conclure. \square

Les lemmes précédents traduisent l'importance des courbes (et union de courbes) délimitant des surfaces de genre 0 avec 3 composantes périphériques. Nous complétons ces lemmes par une proposition sur la stabilité de l'intersection d'une courbe fermée simple essentielle et d'une courbe délimitant un disque avec deux points marqués par automorphisme.

Proposition 3.17. *Soit $a \in V(C(S))$ la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non séparante, b la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple séparante délimitant un disque avec deux points marqués et $f \in \text{Aut } C(S)$. Si $i(a, b) = 2$, alors $i(f(a), f(b)) = 2$.*

Preuve. Soient α_1, β des représentants de a et b respectivement en position minimale.

Affirmation : $i(a, b) = 2$ si, et seulement si, il existe des courbes $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ dont les classes d'isotopie sont deux à deux distinctes et telles que :

1. α_{n+1} est séparante et délimite un tore avec une composante de bord et n points marqués tel que toutes les autres courbes sont à l'intérieur de ce tore ;
2. $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont non séparantes ;
3. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, α_i et α_{i+1} délimitent un anneau épointé ;
4. α_1 et α_n délimitent un pantalon ;
5. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $i([\alpha_0], [\alpha_i]) = 1$;
6. $i([\alpha_1], [\beta]) \neq 0$;

7. toutes les autres intersections sont nulles.

En effet, l'implication découle du principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.19) et de la figure 12.

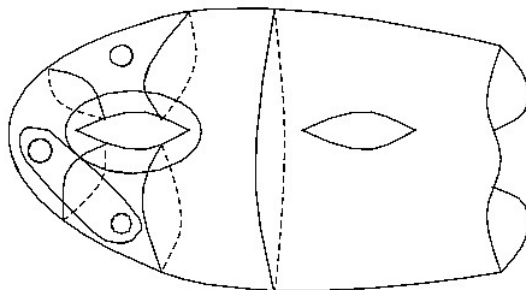


Figure 12: Courbes de la proposition 3.17.

Pour la réciproque, on considère la surface $S_{\alpha_{n+1}}$. D'après la première hypothèse, une des composantes connexes de $S_{\alpha_{n+1}}$ est un tore avec une composante de bord T . Par ailleurs, toutes les autres courbes considérées sont à l'intérieur de T .

On considère maintenant la surface $T_{\cup_{i \neq 1} \alpha_i}$. Toutes les composantes connexes de $T_{\cup_{i \neq 1} \alpha_i}$ sont alors des anneaux épointés, sauf deux, une étant un pantalon et l'autre, notée S' , est homéomorphe à $S_{0,2,2}$. Les deux bords de S' proviennent de α_2 et α_n car α_1 et α_2 délimitent un anneau épointé et α_1 et α_n délimitent un pantalon. Comme, pour tout $i \neq 1$, α_1 et β sont d'intersection nulle avec α_i , alors α et β sont dans S' (car les complexes des courbes d'un pantalon et d'un anneau épointé sont triviaux). Maintenant, comme, pour tout $1 \leq i \leq n$, $i(\alpha_0, \alpha_i) = 1$, α_0 définit un arc γ dans S' intersectant une fois α_2 et une fois α_n . S'_γ est alors un disque avec deux points marqués D . Comme $i(\alpha_0, \beta) = 0$, β est dans D et est donc isotope au bord ∂D . Soient P_1 et P_2 les points marqués de D . Comme $i(\alpha_0, \alpha_1) = 1$, α_1 définit un arc essentiel joignant le bord de D à lui-même. Donc, par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), on en déduit que $i(a, b) = 2$.

Par les propriétés des automorphismes du complexe des courbes vu précédemment (c.f. propositions 3.6, 3.8, 3.10 et 3.17), tous les points de l'équivalence sont stables par automorphisme. En particulier, $i(f(a), f(b)) = 2$. □

Définition 3.18. Soient α et β deux courbes séparantes délimitant des disques avec deux points marqués. Soient α' et β' les arcs correspondant. Les courbes α et β (ou α' et β') forment une *paire simple* si α' et β' ne s'intersectent pas et possèdent une unique extrémité commune.

Cette propriété est stable par isotopie et on peut donc parler de classes d'isotopie formant des paires simples. On remarque en particulier que si a et b sont deux courbes formant une paire simple, $i(a, b) = 2$. On a alors la propriété suivante.

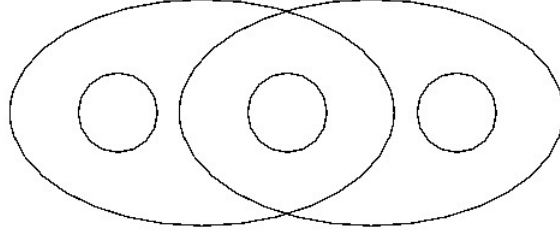


Figure 13: Une paire simple.

Proposition 3.19. *Soient a et b deux classes d'isotopie de courbes fermées simples délimitant un disque avec deux points marqués, et $f \in \text{Aut } C(S)$. Si a et b forment une paire simple, alors $f(a)$ et $f(b)$ également.*

Preuve. Soient α et β des représentants de a et b en position minimale.

Affirmation : a et b forment une paire simple si, et seulement si, il existe des courbes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ dont les classes d'isotopie sont deux à deux distinctes et telles que :

1. α_{n+1} est séparante et délimite un tore avec une composante de bord et n points marqués telle que toutes les autres courbes sont à l'intérieur de ce tore ;
2. $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont non séparantes ;
3. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, α_i et α_{i+1} délimitent un anneau épointé ;
4. α_1, α_n et α_{n+1} délimitent un pantalon ;
5. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $i([\alpha_0], [\alpha_i]) = 1$;
6. $i([\alpha_2], [\alpha]) = 2$, $i([\alpha_3], [\beta]) = 2$;
7. toutes les autres intersections sont nulles.

En effet, l'implication découle du principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.19) et du dessin suivant :

Pour la réciproque, on considère la surface $S_{\alpha_{n+1}}$. Une des composantes connexes de $S_{\alpha_{n+1}}$ est un tore avec une composante de bord T . Par ailleurs, toutes les autres courbes considérées sont dans $\text{int}(T)$. Étant donné que $i(\alpha_2, \alpha) = i(\alpha_3, \beta) = 2$, on voit qu'une des composantes connexes de la surface $T_{\alpha_2 \cup \alpha_3}$ est un anneau épointé A . Par ailleurs, α (resp. β) définit un arc δ dans A allant du bord induit par α_2 vers lui-même (resp. un arc γ du bord induit par α_3 vers lui-même). Par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), on voit que $i(\delta, \gamma) = 2$.

De plus, α et β ne peuvent pas s'intersecter en dehors de A . En effet, dans $T - \text{int}(A)$, α (resp. β) définit un arc δ' du bord induit par α_2 vers lui-même (resp. un arc γ' du

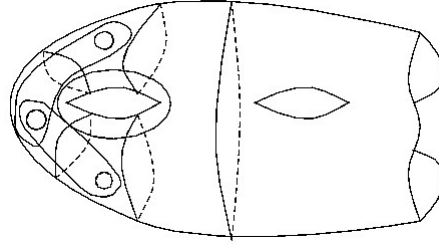


Figure 14: Courbes de la proposition 3.19.

bord induit par α_3 vers lui-même). On considère la surface $(T - \text{int}(A))_{\alpha_4}$. Puisque $i(\alpha, \alpha_4) = i(\beta, \alpha_4) = 0$, quitte à réaliser une isotopie, δ' et γ' sont dans $(T - \text{int}(A))_{\alpha_4}$. Mais alors, δ' et γ' sont dans deux composantes connexes différentes. En effet, γ' est contenu dans l'anneau épointé délimité par les bords induits par α_3 et α_4 , alors que δ' , n'intersectant ni α_3 ni α_4 , est nécessairement dans l'autre composante connexe de $(T - \text{int}(A))_{\alpha_4}$.

En définitive, α et β s'intersectent deux fois et $S_{\alpha \cup \beta}$ possède trois composantes connexes homéomorphes à un disque épointé. En rappelant que α et β délimitent tous deux des disques avec deux points marqués, on obtient également qu'ils forment une paire simple.

Comme toutes ces propriétés sont préservées par automorphisme (c.f. propositions 3.6, 3.8 et 3.10), $f(a)$ et $f(b)$ forment une paire simple. □

Proposition 3.20. *Soit $a \in V(C(S))$ la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple séparante α , b la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple séparante β délimitant un disque avec deux points marqués et $f \in \text{Aut } C(S)$. Si $i(a, b) = 2$, alors $i(f(a), f(b)) = 2$.*

Preuve. On suppose dans la suite de la preuve que α et β sont en position minimale. Il y a plusieurs cas à distinguer, selon le genre g' de la courbe α .

Supposons que $g' \geq 2$ et que l'une des composantes connexes de S_α a k points marqués et l'autre $n - k$ points marqués. Nous notons dans ce cas $\alpha = \alpha_k$ et $\beta = \beta_k$.

Affirmation : $i(a, b) = 2$ si et seulement si, il existe des courbes $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{n+7}$ et des courbes $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \dots, \beta_{n-1}$ deux à deux distinctes, deux à deux en position minimale et telles que :

1. la courbe α_{n+7} est séparante et délimite une surface S' homéomorphe à $S_{g'+1,1,n}$. De plus, toutes les autres courbes considérées sont contenues dans $\text{int}(S')$;
2. la courbe α_{n+6} est séparante et délimite une surface S'' homéomorphe à $S_{g-(g'-1),1,n}$. De plus, toutes les autres courbes considérées sont contenues dans $\text{int}(S'')$;
3. les courbes $\alpha_{n+4}, \alpha_{n+5}$ sont non séparantes et délimitent un pantalon avec α_{n+7} ;

4. les courbes $\alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}$ sont non séparantes et délimitent un pantalon avec α_{n+6} ;
5. la courbe α_{n+1} est séparante et délimite un pantalon avec α_{n+4} et α_{n+5} ;
6. la courbe α_n est séparante et délimite un pantalon avec α_{n+2} et α_{n+3} ;
7. les courbes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont séparantes ;
8. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$, α_i et α_{i+1} délimitent un anneau épouté ;
9. α_1 et α_{n+1} délimitent un anneau épouté ;
10. $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ sont séparantes, et délimitent des disques avec deux points marqués ;
11. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-2$, β_i et β_{i+1} forment des paires simples ;
12. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$, $i([\alpha_i], [\beta_i]) \neq 0$;
13. les autres intersections sont nulles.

Pour l'implication, par principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.19) on se ramène à la figure 15.

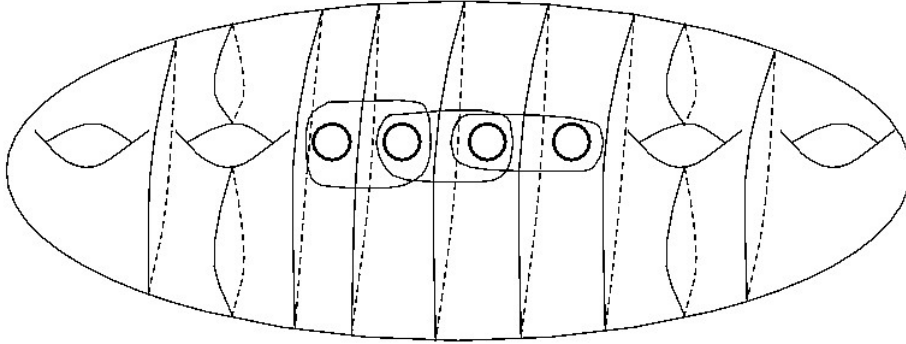


Figure 15: Courbes de la proposition 3.20 dans le cas où $g' \geq 2$.

Pour la réciproque, pour tout i , soit $\alpha_i \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de α_i . On considère la surface $S_{\alpha_{n+6} \cup \alpha_{n+7}}$. L'une des composantes connexes de cette surface, notée R , contient toutes les autres courbes. Quitte à réaliser des isotopies pour que, pour tout i, j , $\alpha_i \cap \alpha_j \times [-1, 1] = \emptyset$, on peut considérer la surface $R_{\cup_{i \neq k} \alpha_i}$. D'après les hypothèses, toutes les composantes connexes de $R_{\cup_{i \neq k} \alpha_i}$ sont alors des pantalons ou des anneaux époutés, sauf une, notée Q , qui est une surface homéomorphe à $S_{0,2,2}$. Les deux bords de Q sont alors induits par une composante de bord α'_{k-1} de $\alpha_{k-1} \times [-1, 1]$ et une composante de bord α'_{k+1} de $\alpha_{k+1} \times [-1, 1]$.

Comme les courbes α_k, β_k n'intersectent aucun des α_i , ces dernières sont contenues dans $\text{int}(Q)$ (car le complexe des courbes des autres surfaces est vide). Maintenant, β_{k-1}

intersecte α_{k-1} et non α_{k+1} . Donc, dans Q , β_{k-1} définit un arc γ_1 reliant α'_{k-1} à lui-même. De même, β_{k+1} définit un arc γ_2 reliant α'_{k+1} à lui-même. Comme $i(\beta_{k-1}, \beta_{k+1}) = 0$, γ_0 et γ_1 ne s'intersectent pas.

De plus, les paires γ_1 et α_{k-1} et γ_2 et α_{k+1} délimitent deux disques épointés disjoints dans Q . Pour voir cela, on sait par hypothèse que β_{k-1} et β_{k+1} délimitent des disques et avec deux points marqués D et D' dans S . Par ailleurs, nous savons également que β_{k-1} (resp. β_{k+1}) intersecte α'_{k-1} (resp. α'_{k+1}). Soit δ (resp. δ') un arc induit par α'_{k-1} dans D (resp. un arc induit par α'_{k+1} dans D'). Par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), D_δ est homéomorphe à deux disques épointés (resp. $D_{\delta'}$ est homéomorphe à deux disques épointés). Ainsi on a bien que les paires γ_1 et α'_{k-1} et γ_2 et α'_{k+1} délimitent deux disques épointés disjoints dans Q .

De ce fait, l'une des composantes connexes de $Q_{\gamma_1 \cup \gamma_2}$ est un anneau A . Or, $i(\alpha_k, \beta_{k-1}) = i(\alpha_k, \beta_{k+1}) = 0$. Donc α_k est l'unique courbe à isotopie près de l'anneau A . De plus, β_{k-1} et β_k ainsi que β_k et β_{k+1} forment des paires simples. De ce fait, $i(\beta_k, \beta_{k-1}) = i(\beta_k, \beta_{k+1}) = 2$ et β_k définit exactement deux arcs dans A chaque arc allant d'un bord à l'autre. Donc $i(\alpha_k, \beta_k) = 2$. Par ailleurs, puisque $i(a, b) \neq 0$, par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), $i(a, b) = 2$.

Toutes ces propriétés étant stables par automorphisme d'après les propositions précédentes (c.f. propositions 3.5, 3.8, 3.10 et 3.19), on a bien que $i(f(a), f(b)) = 2$.

Le cas où $g' = 1$ est complètement similaire en remplaçant les courbes $\alpha_{n+6}, \alpha_{n+2}$ et α_{n+3} par une unique courbe non séparante α_{n+2} délimitant un pantalon avec α_n .

Pour le cas $g' = 0$, si α délimite une surface de genre 0 avec k points marqués, on a nécessairement $2 \leq k \leq n - 1$ car autrement, ou bien α est isotope à un point marqué, ou bien α délimite une surface contenant tous les points marqués de S et dans ce cas, l'intersection avec un tel β serait soit nulle soit plus grande que 4.

On peut donc supposer que $2 \leq k \leq n - 1$.

Nous étudions dans un premier temps le cas où $2 \leq k \leq n - 2$. Affirmation : $i(a, b) = 2$ si, et seulement si, il existe des courbes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+3}$, et des courbes $\beta_1, \dots, \beta_{n-2}$ deux à deux disjointes, deux à deux en position minimale et telles que :

1. la courbe α_{n+3} est séparante et délimite un tore avec une composante de bord T et n points marqués. Par ailleurs, toutes les autres courbes considérées sont dans $\text{int}(T)$;
2. les courbes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}$ sont non séparantes ;
3. pour tout i tel que $2 \leq i \leq n + 2$, $i([\alpha_1], [\alpha_i]) = 1$;
4. les courbes α_2, α_{n+2} et α_{n+3} délimitent un pantalon ;
5. pour tout i tels que $2 \leq i \leq n + 1$, les courbes α_i et α_{i+1} délimitent un anneau épointé ;

6. pour tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$, les courbes β_i et β_{i+1} forment des paires simples ;
7. les courbes β et β_1 forment une paire simple ;
8. $i([\beta], [\alpha_3]) = i([\beta_1], [\alpha_4]) = \dots = i([\beta_{n-2}], [\alpha_{n+1}]) = 2$;
9. $i([\alpha], [\beta]) \neq 0$, et, si $k \leq n-2$, $i([\alpha], [\beta_k]) \neq 0$;
10. pour tout i tel que $4 \leq i \leq k-1$, $i([\alpha], [\alpha_i]) \neq 0$;
11. toutes les autres intersections sont nulles.

L'implication provient du principe de changement de coordonnées et de la figure 16.

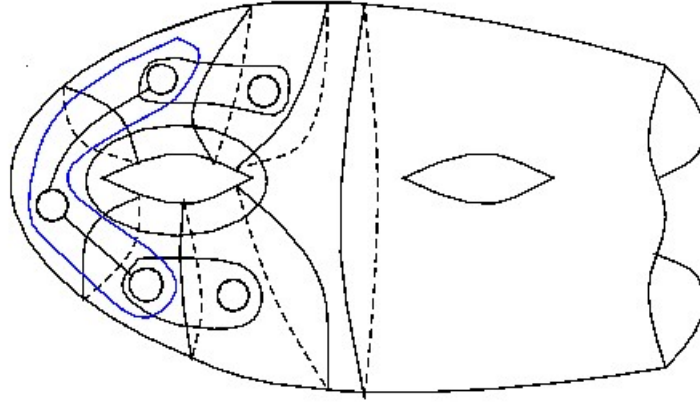


Figure 16: Courbes de la proposition 3.20 dans le cas où $g' = 0$. (en bleu la courbe β)

Pour la réciproque, pour tout $i \in \{1, \dots, n+3\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n-2\}$, soient $\alpha_i \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de α_i et $\beta_j \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de β_j . On considère la surface $S_{\alpha_{n+3}}$. L'une des composantes connexes de cette surface est un tore avec une composante de bord et n points marqués T . Par ailleurs, toutes les autres courbes sont contenues dans $\text{int}(T)$.

On considère alors la surface T_{α_1} . Cette dernière est homéomorphe à $S_{0,3,n}$. Pour tout $i \neq 1$, α_i définit un arc γ_i dans T_{α_1} . Soit alors la surface $(T_{\alpha_1})_{\gamma_2 \cup \gamma_3 \cup_{i \geq k} \gamma_i}$. D'après les hypothèses faites sur les courbes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}$, toutes les composantes connexes de cette surface sont des anneaux époutés et des pantalons, sauf une, notée Q , qui est homéomorphe à $S_{0,1,k}$.

D'après les conditions sur les intersections, quitte à réaliser une isotopie, on peut supposer que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\} \cup \{k, \dots, n+2\}$, et pour tout $j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$, $\alpha \cap \alpha_i \times [-1, 1] = \emptyset$ et $\beta_j \cap \alpha_i \times [-1, 1] = \emptyset$. Maintenant, comme les complexes des courbes d'un pantalon et d'un anneau épouté sont vides, α est dans Q . De plus, étant donné que, dans S , α délimite une surface de genre 0 avec k points marqués, on voit que α est isotope au bord de Q .

Par ailleurs, par le même raisonnement, pour tout $i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$, $\beta_i \in Q$. Comme β_i et β_{i+1} forment des paires simples, une des composantes connexes de la surface $Q_{\cup_{1 \leq i \leq k-1} \beta_i}$ est un anneau A , et les autres composantes connexes sont des disques époinés. De plus, par les conditions sur les intersections, quitte encore une fois à réaliser une isotopie, on peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$, $\alpha \cap \beta_i \times [-1, 1] = \emptyset$. De ce fait, comme le complexe des courbes d'un disque époiné est vide, α est contenue dans A . Ainsi, α est l'unique classe d'isotopie de courbes fermées simples de A . La seule courbe contenue dans Q avec laquelle β forme une paire simple étant β_1 , β définit exactement deux arcs dans A , d'où $i(\alpha, \beta) = 2$. De ce fait, puisque $i(a, b) \neq 0$, par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), $i(a, b) = 2$.

Toutes les conditions étant stables par automorphisme du complexe des courbes (c.f. propositions 3.5, 3.8, 3.10 et 3.19), on obtient le résultat voulu.

Le cas où $k = n - 1$ est identique en supprimant les courbes β_n et α_{n+2} . Ceci conclut la preuve. \square

Afin de définir une injection de $\text{Aut } C(S)$ dans $\text{Aut } A(S)$, nous allons définir une action de $\text{Aut } C(S)$ sur les points marqués de S . En effet, nous voulons montrer que deux arcs partageant les mêmes points marqués comme extrémités sont envoyés par tout automorphisme du complexe des courbes sur deux arcs partageant les mêmes points marqués. Nous définissons ainsi une action sur les points marqués de S de la manière suivante, en distinguant selon le nombre de points marqués n de S .

Soit $f \in \text{Aut } C(S)$ et P un point marqué de S . Si $n \geq 3$, alors il existe deux autres points marqués Q et R et deux arcs propres, simples, essentiels et disjoints γ et δ reliant respectivement Q et P et R et P . Ainsi, ces deux arcs forment une paire simple et les courbes correspondantes γ' et δ' sont envoyées par f vers une paire simple $(f([\gamma']), f([\delta']))$. Les classes d'isotopie d'arcs correspondantes données par le lemme 3.15 possèdent alors une unique extrémité en commun, qui sera l'image de P par f , notée $f(P)$.

Dans le cas où $n = 2$, soit α un arc propre, simple et essentiel dont les deux extrémités sont le même point marqué. On choisit par ailleurs α tel qu'aucun des bords de $\alpha \times [-1, 1]$ ne soit isotope à un point marqué de S . Soit $\alpha \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de α . Alors les bords α_1 et α_2 de ce voisinage régulier définissent des sommets a et a' de $C(S)$. Comme α_1 et α_2 délimitent un anneau époiné, des représentants de $f(a)$ et $f(a')$ délimitent aussi un anneau époiné par la proposition 3.10. Le point marqué de S contenu dans cet anneau est alors $f(P)$.

Remarque 3.21. *Dans la suite du mémoire, on effectuera un léger abus de notation en notant, pour une courbe fermée simple essentielle α , $f(\alpha)$ un représentant de $f([\alpha])$ qui sera en position minimale avec les courbes considérées dans les propositions.*

Lemme 3.22. *Ce procédé définit une action de $\text{Aut } C(S)$ sur les points marqués de P .*

Preuve. Dans les deux cas, il faut montrer que l'action sur les points marqués ne dépend pas de l'arc choisi.

Commençons par le cas où $n \geq 3$. Tout d'abord, montrons, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour toute paire simple d'arcs (α, β) (de courbes correspondantes (α', β')) ayant P comme extrémité commune, et pour tout arc γ (de courbe correspondante γ') reliant P et un autre point marqué de S distinct de P , et tel que $i = i([\alpha], [\gamma]) + i([\beta], [\gamma]) = k$, la classe d'isotopie d'arcs déterminée par $f([\gamma'])$ admet comme extrémité le point marqué commun des classes d'isotopie d'arcs déterminés par la paire simple $(f([\alpha]), f([\beta]))$.

Pour l'initialisation, on suppose que $i([\gamma], [\alpha]) = i([\gamma], [\beta]) = 0$, et que α, β et γ soient deux à deux en position minimale. Il faut distinguer différents cas selon le nombre de points marqués de S et selon les extrémités de γ .

1. Supposons que $n \geq 5$ et que γ n'a que P comme extrémité commune avec α et avec β . De ce fait, toutes les paires d'arcs considérées forment des paires simples. Comme $n \geq 5$, Il existe alors un autre arc propre, simple et essentiel δ (de courbe correspondante δ') reliant P et un cinquième point marqué de S . En appliquant l'automorphisme, toutes les courbes forment des paires simples, et, nécessairement, ont toutes un seul point marqué en commun.
2. Supposons que $n = 4$ et que γ n'a que P comme extrémité commune avec α et avec β . On considère la surface S_γ . Cette dernière est homéomorphe à $S_{g,1,2}$.

Soit $\alpha'_0, \dots, \alpha'_4$ des courbes fermées simples essentielles et deux à deux disjointes de S_γ telles que :

- (a) α'_4 est séparante et délimite un tore avec une composante de bord telle que toutes les autres courbes sont à l'intérieur de ce tore ;
- (b) $\alpha'_0, \dots, \alpha'_3$ sont non séparantes ;
- (c) α'_1 et α'_2 délimitent un anneau épointé ;
- (d) α'_2 et α'_3 délimitent un pantalon ;
- (e) α'_1, α'_3 et α'_4 délimitent un pantalon ;
- (f) pour tout i tel que $1 \leq i \leq 3$, $i([\alpha'_0], [\alpha'_i]) = 1$;
- (g) $i([\alpha'_1], [\alpha']) = 2$, $i([\alpha'_2], [\beta']) = 2$;
- (h) toutes les autres intersections sont nulles.

Ces courbes existent par la proposition 3.19. Soit $\gamma \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de γ . Une des composantes connexes de $(S_\gamma)_{\alpha'_0 \cup \alpha'_2 \cup \alpha'_3}$ est un anneau A , dont l'un des bords est $\partial(\gamma \times [-1, 1])$.

Les courbes $\alpha'_0, \dots, \alpha'_4$ se relèvent en des courbes $\alpha''_0, \dots, \alpha''_4$ dans S . De fait, γ est contenu dans le disque D avec deux points marqués délimité par α''_0, α''_2 et α''_3 . Ainsi, γ' est isotope à ∂D .

Par la proposition 3.17, $i(f(\alpha'), f(\partial D)) = i(f(\beta'), f(\partial D)) = 2$. Par ailleurs, les hypothèses sur les intersections montrent que l'on peut supposer que $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ s'intersectent dans le disque avec deux points marqués D' délimité par $f(\partial D)$. En

effet, quitte à réaliser des isotopies, au vue des hypothèses sur les intersections des courbes, $f(\alpha')$ et $f(\beta')$ définissent dans la surface $(S - \text{int}(D'))_{f(\alpha'_4) \cup f(\alpha'_3)}$ des arcs dans des composantes connexes différentes. De ce fait, on peut supposer que $f(\alpha')$ et $f(\beta')$ s'intersectent dans D' .

Puisque $f([\alpha'])$ et $f([\beta'])$ forment une paire simple par la proposition 3.19, on voit que les classes d'isotopie d'arcs correspondant à $f([\gamma'])$, $f([\alpha'])$ et $f([\beta'])$ partagent un unique point marqué en commun qui est contenu dans D' .

3. Supposons que $n \geq 4$ et γ a mêmes extrémités que α ou β . On peut supposer que γ a les mêmes extrémités que α . Étant donné que $n \geq 4$, il existe alors un autre arc δ (de courbe correspondante δ') disjoint de α , β et γ et reliant P et un autre point marqué différent de toutes les extrémités de α , β et γ . Alors le triplet α , β et δ et le triplet δ , β et γ sont dans la configuration des cas précédents. On peut donc conclure.
4. $n = 3$. Dans ce cas, γ a les mêmes extrémités que α ou β . On peut supposer que γ a les mêmes extrémités que α . Alors (β, γ) est aussi une paire simple et (α, γ) n'en est pas une. Être une paire simple étant préservé par automorphisme par la proposition 3.19, on voit que les classes d'isotopie d'arcs correspondant à $f([\gamma'])$, $f([\alpha'])$ et $f([\beta'])$ partagent une unique extrémité commune (sinon $f([\gamma'])$ et $f([\alpha'])$ formeraient une paire simple).

Pour le pas de récurrence, on suppose $i > 0$. Soient P_1 l'extrémité de α différente de P , P_2 celle de β et P_3 celle de γ (P_3 peut coïncider avec P_1 ou P_2). On oriente α , β et γ de P vers P_i . Soit X le premier point d'intersection entre γ et $\alpha \cup \beta$. On peut supposer que X est un point de α . Soit δ l'arc (de courbe correspondante δ') consistant en le segment de γ allant de P à X puis le segment de α allant de X à P_1 . On observe que $i([\alpha], [\delta]) + i([\beta], [\delta]) = 0$, que (β, δ) est une paire simple et que $i([\delta], [\gamma]) + i([\beta], [\gamma]) < i([\alpha], [\gamma]) + i([\beta], [\gamma])$.

Par l'hypothèse de récurrence, une des extrémités de la classe d'isotopie d'arcs correspondant à $f([\gamma'])$ est l'extrémité commune des classes d'isotopie d'arcs correspondant à la paire simple $(f([\delta']), f([\beta']))$. Or, comme, $i([\alpha], [\delta]) + i([\beta], [\delta]) = 0$, on peut aussi appliquer l'hypothèse de récurrence à δ . Donc, l'une des extrémités de la classe d'isotopie d'arcs correspondant à $f([\delta'])$ est l'extrémité commune des arcs correspondant à la paire simple $(f([\alpha']), f([\beta']))$. En combinant les deux derniers points, on obtient le résultat voulu.

Maintenant, soient (α, β) et (γ, δ) deux paires simples ayant chacune P comme extrémité commune. Nous appliquons le résultat précédent à γ et la paire simple (α, β) ainsi qu'à δ et la paire simple (α, β) . De ce fait, $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ et $f(\delta)$ ont une extrémité commune. Par ailleurs, $(f([\alpha']), f([\beta']))$ et $(f([\gamma']), f([\delta']))$ forment des paires simples par la proposition 3.19. Ainsi, les classes d'isotopie d'arcs correspondant aux paires simples $(f([\alpha']), f([\beta']))$ et $(f([\gamma']), f([\delta']))$ ont une unique extrémité commune, comme voulu.

Dans le cas où $n = 2$, soit Q l'autre point marqué de la surface. On montre par récurrence que pour tout entier $k \geq 2$, pour toute paire de courbes α_1 et α_2 essentielles délimitant un anneau époinché de point marqué P , pour tout arc propre, simple et essentiel β d'extrémités dans P , tel que les bords β_1 et β_2 d'un voisinage régulier $\beta \times [-1, 1]$ de β sont essentiels, et tel que $i := \max\{i(\alpha_1, \beta_1) + i(\alpha_2, \beta_1), i(\alpha_1, \beta_2) + i(\alpha_2, \beta_2)\} = k$, $f([\beta_1])$ et $f([\beta_2])$ délimitent un anneau époinché dont le point marqué est le même que celui de l'anneau époinché délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$.

Pour l'initialisation, supposons que $i = 2$. Il y a deux cas à distinguer, selon l'intersection de β_1 et β_2 avec α_1 et α_2 . On suppose, quitte à renuméroter, que le maximum est atteint pour β_1 .

Supposons que $i([\alpha_1], [\beta_1]) = i([\alpha_2], [\beta_1]) = 1$. Alors α_1 et α_2 sont des courbes non séparantes. Donc $S_{\alpha_1 \cup \alpha_2}$ a deux composantes connexes, l'une homéomorphe à un anneau époinché, et l'autre, notée T , homéomorphe à $S_{g-1,2,1}$.

Par hypothèse, dans T , β induit un arc, noté β' , reliant les deux bords de T . Ainsi $T_{\beta'}$ est homéomorphe à $S_{g-1,1,1}$. Puisque $g \geq 2$, son complexe des arcs est de dimension $\dim A(T_{\beta'}) \geq 6 - 7 + 6 = 5$ par la proposition 2.52. Il existe donc dans $T_{\beta'}$ un arc γ' dont les deux extrémités sont Q . γ' se relève dans S en un arc γ n'intersectant ni β , ni α_1 , ni α_2 .

Soient γ_1 et γ_2 les bords d'un voisinage régulier $\gamma \times [-1, 1]$ de γ . Quitte à réaliser des isotopies, nous pouvons supposer que, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $i([\beta_i], [\gamma_j]) = 0$. D'où $i(f([\beta_i]), f([\gamma_j])) = 0$ et donc le point marqué de l'anneau époinché délimité par $f([\beta_1])$ et $f([\beta_2])$ est différent du point marqué de l'anneau époinché délimité par $f([\gamma_1])$ et $f([\gamma_2])$. Par ailleurs, γ est construit de telle sorte que, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $i([\alpha_i], [\gamma_j]) = 0$. De ce fait, nous avons de même que le point marqué contenu dans l'anneau époinché délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$ est différent de celui contenu dans l'anneau époinché délimité par $f([\gamma_1])$ et $f([\gamma_2])$.

Puisqu'il n'y a que deux points marqués dans la surface, on a nécessairement que le point marqué contenu dans l'anneau époinché délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$ est le même que celui contenu dans l'anneau époinché délimité par $f([\beta_1])$ et $f([\beta_2])$.

Supposons maintenant que $i([\alpha_1], [\beta_1]) = 2$ et $i([\alpha_2], [\beta_1]) = 0$. Nous remarquons tout d'abord que, ni α_1 , ni α_2 ne peuvent être séparantes et de genre égal à 0. En effet, sinon, puisque α_1 et α_2 délimitent un anneau époinché, α_1 et α_2 seraient tous les deux de genre égal à 0. Mais alors, cela voudrait dire que soit α_1 soit α_2 serait inessentiel puisqu'il n'y a que 2 points marqués. D'où une contradiction. Donc, si α_1 et α_2 sont séparantes, alors ils sont de genre plus grand que 1.

Maintenant, soit T la composante connexe de $S_{\alpha_1 \cup \alpha_2}$ contenant l'arc β' induit par β . T est homéomorphe à $S_{t,2,1}$ ou $S_{t,2,0}$ ou $S_{t,1,1}$ ou $S_{t,1,0}$, avec $1 \leq t \leq g-1$. L'arc β' a ses deux extrémités dans le bord de T induit par un bord de $\alpha_1 \times [-1, 1]$. L'objectif est de construire un arc γ dans S , d'extrémités dans Q disjoint de β , de α_1 et de α_2 afin de pouvoir conclure comme dans le cas précédent. Pour cela, nous distinguons les cas selon le nombre de points marqués de T .

Supposons que T n'ait pas de point marqué. Il existe alors une autre composante connexe de $S_{\alpha_1 \cup \alpha_2}$, notée R , homéomorphe à $S_{g',1,1}$. De plus, $g' \geq 1$ car le genre de

α_1 et α_2 est plus grand que 1. De ce fait, par la proposition 2.52, il existe dans R un arc propre, simple et essentiel γ' à extrémités dans Q , que l'on relève dans S en un arc propre, simple et essentiel γ n'intersectant ni β , ni α_1 , ni α_2 .

Supposons que T contient un point marqué et que β' soit un arc non-séparant dans T . Alors $T_{\beta'}$ contient au moins 2 bords et 1 point marqué. De ce fait, $T_{\beta'}$ a un complexe des arcs dont la dimension est supérieure à $-7 + 3 + 6 = 2$ par la proposition 2.52. Il existe donc dans $T_{\beta'}$ un arc γ' dont les deux extrémités sont Q . γ' se relève dans S en un arc γ n'intersectant ni β , ni α_1 , ni α_2 .

Supposons que T contient un point marqué et que β' est un arc séparant dans T . Alors comme $i([\alpha_1], [\beta_1]) = 2$ et $i([\alpha_2], [\beta_1]) = 0$ et comme β_1 et β_2 sont des courbes essentielles dans S , β' ne délimite pas un disque épointé dans T . En particulier, puisqu'il n'y a qu'un seul point marqué Q , dans T , la composante connexe de $T_{\beta'}$ contenant Q est de genre plus grand que 1. En particulier, la dimension du complexe des arcs de la composante connexe contenant Q est positive. Il existe donc dans $T_{\beta'}$ un arc γ' dont les deux extrémités sont Q . γ' se relève dans S en un arc γ n'intersectant ni β , ni α_1 , ni α_2 .

Avec l'arc γ trouvé, on peut appliquer le raisonnement du cas $i([\alpha_1], [\beta_1]) = i([\alpha_2], [\beta]) = 1$. Ainsi, le point marqué contenu dans l'anneau épointé délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$ est le même que celui contenu dans l'anneau épointé délimité par $f([\beta_1])$ et $f([\beta_2])$.

Supposons maintenant que $i \geq 3$. Alors, dans les composantes connexes de $S_{\alpha_1 \cup \alpha_2}$ différentes de l'anneau épointé, β induit une collection d'arcs $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, $k \geq 2$. Ces arcs sont numérotés selon une orientation de β . Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, soit $\gamma_i \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de γ_i .

Affirmation : Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, soit les deux composantes de bords de $\gamma_i \times [-1, 1]$ sont essentielles, soit les deux composantes de bords de $\gamma_{i+1} \times [-1, 1]$ sont essentielles.

En effet, on remarque d'une part qu'il n'y a que deux points marqués dans S . De ce fait, si $i \in \{1, \dots, k\}$ est tel que le bord γ'_i de $\gamma_i \times [-1, 1]$ délimite un disque épointé D , alors D contient Q comme point marqué. Maintenant, supposons que, pour $i \in \{1, \dots, k\}$, le bord γ'_i (resp. γ'_{i+1}) de $\gamma_i \times [-1, 1]$ (resp. $\gamma_{i+1} \times [-1, 1]$) délimite un disque épointé contenant Q . Comme β est un arc simple, γ_i et γ_{i+1} ne s'intersecte pas. Ainsi, quitte à réaliser une isotopie afin que $\gamma_{i+1} \cap \gamma_i \times [-1, 1] = \emptyset$, on peut supposer que γ_{i+1} est contenu dans la composante connexe D de $S_{\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \gamma_i}$ contenant Q . Puisque γ'_i délimite un disque épointé Q , D est un anneau épointé. Mais alors β ne serait pas simple : l'intersection serait réalisée dans l'anneau épointé délimité par α_1 et α_2 . D'où une contradiction. Ainsi, en particulier, il existe i tel qu'aucun des bords de $\gamma_i \times [-1, 1]$ ne délimite de disque épointé.

On construit alors dans S l'arc δ défini en reliant le point marqué P et l'arc γ_i par deux arcs dans l'anneau épointé A délimité par α_1 et α_2 tel que ces deux arcs soient en position minimale avec tous les arcs de $\beta|_A$. Par construction, on voit que $i([\delta], [\alpha_1]) + i([\delta], [\alpha_2]) = 2$. De plus, les bords δ_1 et δ_2 d'un voisinage régulier de $\delta \cup \{P\}$ vérifient $i([\delta_1], [\beta]) + i([\delta_2], [\beta]) < i([\alpha_1], [\beta]) + i([\alpha_2], [\beta])$. En effet, les intersections entre δ_1 et β (resp. δ_2 et β) sont réalisées dans A . En examinant les différents cas de figure selon les bords aux extrémités de l'arc γ_1 (qui sont en nombre fini), on obtient le résultat.

La figure ci-dessous traite les différents cas possibles. On observe immédiatement que l'intersection entre β et les δ_i est plus petite que celle entre les α_i et β .

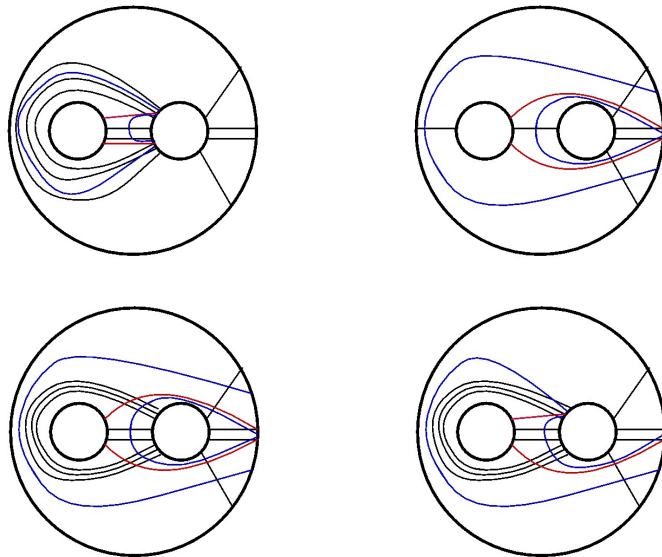


Figure 17: Cas possibles dans la récurrence du cas $n = 2$. L'arc δ est en rouge et les bords d'un voisinage régulier en bleu.

Par l'hypothèse de récurrence, le point marqué de S dans l'anneau épointé délimité par $f([\delta_1])$ et $f([\delta_2])$ est le même que celui contenu dans l'anneau épointé délimité par $f([\beta_1])$ et $f([\beta_2])$. Or, comme $i([\delta], [\alpha_1]) + i([\delta], [\alpha_2]) = 2$, le point marqué de S contenu dans l'anneau épointé délimité par $f([\delta_1])$ et $f([\delta_2])$ est le même que celui contenu dans l'anneau épointé délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$. Par transitivité, le point marqué de S contenu dans l'anneau épointé délimité par $f([\beta_1])$ et $f([\beta_2])$ est le même que celui contenu de l'anneau épointé délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$.

Ainsi, la procédure décrite est indépendante de l'arc choisi. Il s'agit bien d'une action sur l'ensemble des points marqués car tout élément de $\text{Aut } C(S)$ admet un inverse. \square

On notera $f(P)$ l'image par un élément $f \in \text{Aut } C(S)$ d'un point marqué P de S .

Par ailleurs, on remarque que la preuve montre que si α est un arc reliant deux points marqués différents P et Q , alors tout représentant de $f([\alpha])$ reliera $f(P)$ et $f(Q)$. On étend maintenant ce résultat aux autres types d'arcs et à certaines courbes de la surface.

Lemme 3.23. *Soit $n \geq 3$ et S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$. Soit α un arc ayant un unique point marqué P comme extrémité, α_1 et α_2 les bords d'un voisinage régulier $\alpha \times [-1, 1]$ de α . Soit $f \in \text{Aut } C(S)$. Si α_1 et α_2 sont des courbes fermées simples essentielles, alors $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$ délimitent un anneau épointé contenant $f(P)$.*

Preuve. Soient (β, γ) deux arcs formant une paire simple d'extrémité commune P . Soient β' et γ' les courbes correspondantes.

Supposons que α soit non-séparant ou que α soit séparant et que les deux composantes connexes de S_α contiennent un nombre de points marqués strictement positif.

Puisque, pour toute paire simple d'extrémité commune P , l'image par f de cette paire simple a pour extrémités $f(P)$, on peut supposer que β et γ sont tels que $i([\beta'], [\alpha_1]) = 2$, $i([\beta'], [\alpha_2]) = 0$, $i([\gamma'], [\alpha_2]) = 2$ et $i([\gamma'], [\alpha_1]) = 0$ (ceci est possible par les hypothèses faites sur α). Donc $i(f([\beta']), f([\alpha_1])) = 2$, $i(f([\gamma']), f([\alpha_2])) = 2$ d'après les propositions 3.17 et 3.20 et $i(f([\beta']), f([\alpha_2])) = 0$, $i(f([\gamma']), f([\alpha_1])) = 0$ car f est un automorphisme.

De ce fait, dans l'anneau épointé A délimité par $f(\alpha_1)$ et $f(\alpha_2)$, $f(\beta')$ (resp. $f(\gamma')$) définit un arc essentiel η_0 allant du bord induit par $f(\alpha_1)$ à lui-même (resp. un arc η'_0 du bord induit par $f(\alpha_2)$ à lui-même). Comme il n'y a qu'un seul tel arc à isotopie près pour chacun de ces arcs par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), on voit que $i([\eta_0], [\eta'_0]) = 2$. Or, $f(\beta')$ et $f(\gamma')$ forment une paire simple. De ce fait, $i(f([\beta']), f([\gamma'])) = 2$ et $f(\beta')$ et $f(\gamma')$ délimitent un disque épointé D dont le point marqué est $f(P)$ et dont le bord est une union d'un arc de $f(\beta')$ et d'un arc de $f(\gamma')$. Ainsi, comme nous pouvons réaliser une isotopie telle que D est contenu dans A , et puisque le genre de S est plus grand que 2, nous avons nécessairement que A contient $f(P)$.

Supposons que α soit séparant et qu'une des deux composantes connexes de S_α ne contienne pas de point marqué. Soient Q_1, \dots, Q_{n-1} les points marqués de S différents de P . Soient $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ des arcs propres, simples et essentiels tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, β_i et β_{i+1} forment une paire simple d'extrémité commune Q_{i+1} . On suppose de plus que β_1 et β_{n-1} forment une paire simple d'extrémité commune Q_1 . Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, soit β'_i la courbe fermée simple correspondant à β_i . On peut supposer que pour tout i , $i([\beta'_i], [\alpha_1]) = i([\beta'_i], [\alpha_2]) = 0$ (il suffit de construire les arcs dans la composante connexe de S_α contenant tous les points marqués de S).

Comme f est un automorphisme, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, et pour tout $j \in \{1, 2\}$, $i(f([\beta'_i]), f([\alpha_j])) = 0$. De ce fait, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, l'anneau délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$ ne contient pas le point marqué $f(Q_i)$ car autrement il existerait $j \in \{1, 2\}$ tel que $i(f([\alpha_j]), f([\beta_i])) + i(f([\alpha_j]), f([\beta_{i+1}])) \neq 0$, d'où une contradiction. Donc l'anneau délimité par $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$ contient $f(P)$. \square

Lemme 3.24. *Soit $k \geq 2$, et α une courbe fermée simple essentielle et séparante dans S délimitant une surface S' de genre 0 avec k points marqués. Soient P_1, \dots, P_k les points marqués contenus dans S' . Soit $f \in \text{Aut } C(S)$. Alors $f([\alpha])$ délimite une surface S'' de genre 0 avec k points marqués, et les points marqués de S contenus dans S'' sont $f(P_1), \dots, f(P_k)$.*

Preuve. On remarque tout de suite que la proposition est immédiate si $k = n$. On peut donc supposer que $k \leq n-1$, et aussi que $n \geq 3$. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ des arcs disjoints tels que, pour tout i , l'arc γ_i relie P_i et P_{i+1} sans intersecter α . On note γ'_i la courbe correspondant à γ_i donnée par le lemme 3.15. Soient Q_1, \dots, Q_{n-k} les autres points marqués de S . On distingue différents cas, selon la valeur de k .

Supposons tout d'abord que $k \leq n-2$. On définit des arcs disjoints $\delta_1, \dots, \delta_{n-k-1}$ tels que, pour tout i , δ_i relie Q_i et Q_{i+1} sans intersecter α . Soit δ'_i la courbe correspondant à δ_i donnée par le lemme 3.15. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, et pour tout $j \in \{1, \dots, n-k-1\}$,

$$i(f([\alpha]), f([\gamma'_i])) = i(f([\alpha]), f([\delta'_j])) = 0.$$

Donc, comme $f(\alpha)$ délimite une surface S'' de genre 0 avec k points marqués, S'' ne peut contenir à la fois un point marqué P_i et un point marqué Q_j . En effet, sinon, il existerait $l \in \{1, \dots, k-1\}$ tel que $i(f([\alpha]), f([\gamma'_l])) \neq 0$.

De ce fait, soit S'' contient tous les points marqués $f(P_i)$, soit S'' contient un sous ensemble $\{f(Q_{i_0}), \dots, f(Q_{i_k})\}$ des points marqués $\{f(Q_1), \dots, f(Q_{n-k})\}$. Dans le deuxième cas, puisque, pour tout $j \in \{1, \dots, n-k-1\}$, $i(f([\alpha]), f([\delta'_j])) = 0$, nécessairement, $\{f(Q_{i_0}), \dots, f(Q_{i_k})\} = \{f(Q_1), \dots, f(Q_{n-k})\}$. De ce fait, $n-k = k = \frac{n}{2}$.

Ainsi, si $k \neq \frac{n}{2}$, la preuve est terminée. Si $k = \frac{n}{2}$, soit α' une courbe séparante telle que α' délimite une surface S^* de genre 0 avec $k+1$ points marqués et telle que cette surface contienne S' ainsi que le point marqué Q_1 . On suppose par ailleurs que $i([\alpha], [\alpha']) = 0$. D'après ce qui a été fait précédemment, puisque $k+1 \neq \frac{n}{2}$, $f(\alpha')$ délimite une surface de genre 0 contenant les $k+1$ points marqués $f(P_1), \dots, f(P_k)$ et $f(Q_1)$.

Par ailleurs, $i([\alpha], [\alpha']) = 0$ et donc $[\alpha] \in L([\alpha'])$. De plus, le sommet correspondant à $[\alpha]$ est dans la composante connexe de $L^*([\alpha'])$ correspondant à S^* . Les composantes connexes de $L^*([\alpha'])$ étant préservée par automorphisme, on en déduit que $f(\alpha)$ est contenu dans la surface de genre 0 avec $k+1$ points marqués délimitée par $f(\alpha')$.

De ce fait, soit $f(\alpha)$ délimite une surface contenant les points marqués $f(P_1), \dots, f(P_k)$, soit la surface délimitée par $f(\alpha)$ contient $f(Q_1)$ et ne contient pas un des $f(P_i)$. Mais ce dernier cas n'est pas possible car cela contredirait le fait que, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $i(f([\alpha]), f([\gamma'_i])) = 0$. Donc le résultat est prouvé pour $k \leq n-2$.

Enfin, dans le cas où $k = n-1$, on a, en appliquant le même raisonnement que pour $k = \frac{n}{2}$, que $f([\alpha])$ ne peut pas délimiter une surface de genre 0 contenant comme point marqué $f(Q_1)$ car cela contredirait le fait que, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$ $i(f([\alpha]), f([\gamma'_i])) = 0$.

□

Nous sommes maintenant en mesure de décrire un morphisme $\text{Aut } C(S) \rightarrow \text{Aut } A(S)$. Soit $f \in \text{Aut } C(S)$, soit $a \in A(S)$. On note α un représentant de a . On veut définir $\tilde{f} \in \text{Aut } A(S)$. Il y a plusieurs cas à distinguer, selon les points marqués aux extrémités de α . Si α a comme extrémités deux points marqués distincts, alors, en notant $[C]$ la classe d'isotopie de courbes fermées simples délimitant un disque avec deux points marqués correspondant à $[\alpha]$ et garantie par le lemme 3.15, on définit $\tilde{f}(a)$ comme étant la classe d'isotopie d'arcs correspondant à $f([C])$.

Supposons que α a comme extrémité un unique point marqué P , et que les deux composantes de bord α_1 et α_2 d'un voisinage régulier $\alpha \times [-1, 1]$ de α sont essentielles. Alors α_1 et α_2 délimitent un anneau époiné et sont donc envoyés par f sur deux courbes délimitant un anneau époiné par la proposition 3.10. De plus le point marqué contenu

dans cet anneau est $f(P)$ d'après le lemme 3.23. Dans cet anneau, il existe, à isotopie près, un unique arc γ reliant $f(P)$ à lui-même d'après la proposition 2.22. On pose alors $\tilde{f}(a) = [\gamma]$.

Enfin, Supposons que α a comme extrémité un unique point marqué P et que l'une des composantes de bord de $\alpha \times [-1, 1]$, notée α_1 , est isotope à un point marqué. Dans ce cas, étant donné que α est essentiel, α_2 délimite un disque avec deux points marqués. De plus, l'un des points marqués contenu dans ce disque est P . Le lemme 3.24 donne alors que $f([\alpha_2])$ délimite un disque avec deux points marqués D dont l'un des points marqués est $f(P)$. Soit γ l'unique courbe à isotopie près dans D dont les extrémités sont contenues dans $f(P)$ (c.f. proposition 2.22). On pose alors $\tilde{f}(a) = [\gamma]$.

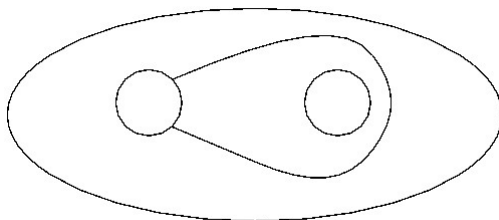


Figure 18: Exemple d'un arc dont l'un des bords d'un voisinage régulier n'est pas essentiel.

Proposition 3.25. *Soit $f \in \text{Aut } C(S)$. L'application \tilde{f} est un automorphisme de $A(S)$.*

Preuve. On prouve tout d'abord que \tilde{f} induit une bijection sur les sommets de $A(S)$. Il convient par la construction de \tilde{f} que f préserve les trois types d'arcs présentés lors de la construction de \tilde{f} . Il suffit donc de montrer que \tilde{f} restreint aux sommets correspondant à chacun des trois types d'arcs est une bijection.

Nous traitons d'abord le cas des classes d'isotopie d'arcs reliant deux points marqués distincts. Le lemme 3.15 montre qu'il suffit de prouver que f est une bijection sur les classes d'isotopie de courbes délimitant un disque avec deux points marqués. Ce résultat se déduit par le fait que f est une bijection et par le corollaire 3.8.

On considère à présent les classes d'isotopie d'arcs propres, simples et essentiels tels que les deux bords de voisinages réguliers de ces arcs soient essentiels. Par le lemme 3.16, il suffit de montrer que f est une bijection sur les paires de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles délimitant un anneau épointé.

Comme f est une bijection sur les sommets, et que f envoie paire de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles délimitant un anneau épointé sur paire de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles délimitant un anneau épointé par la proposition 3.10, on obtient bien que \tilde{f} est une bijection sur les classes d'isotopie de ces types de courbes.

Enfin, considérons le cas des classes d'isotopie d'arcs propres, simples et essentiels reliant un unique point marqué et tel que l'un des bords d'un voisinage régulier n'est pas essentiel. Comme les arcs considérés sont essentiels, l'autre bord délimite un disque avec deux points marqués, donc est envoyé par f sur la classe d'isotopie d'une courbe délimitant un disque avec deux points marqués par le corollaire 3.8. Le fait que \tilde{f} soit une bijection sur ce type d'arcs provient alors du fait qu'il existe à isotopie près un unique arc dans un disque avec deux points marqués reliant un point marqué à lui-même par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22).

Montrons maintenant que si α et β sont des arcs simples essentiels de S tels que $i([\alpha], [\beta]) = 0$, alors $i(\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\beta])) = 0$, ce qui prouvera que \tilde{f} est un automorphisme de $A(S)$. Il y a plusieurs cas à distinguer, selon le type d'arcs que sont α et β et le nombre d'extrémités en commun qu'ont α et β . Dans tout ce qui suit, on suppose α et β en position minimale. On pose de plus $\alpha \times [-1, 1]$ et $\beta \times [-1, 1]$ des voisinages réguliers de α et β .

1. Les arcs α et β n'ont aucune extrémité en commun.

Alors les voisinages réguliers de tels arcs ne s'intersectent pas, donc les sommets de $C(S)$ correspondant aux classes d'isotopie du bord (ou des bords) de ces voisinages sont reliés par une arête dans $C(S)$. L'application f étant un automorphisme de $C(S)$, les images par f de ces sommets sont reliés par une arête. Donc $\tilde{f}([\alpha])$ et $\tilde{f}([\beta])$ sont reliés par une arête.

2. Les arcs α et β forment une paire simple.

Alors le résultat découle de la proposition 3.19.

3. L'arc α relie deux points marqués distincts P et Q et la courbe β est un arc dont les deux extrémités sont dans P et dont les deux bords d'un voisinage régulier sont essentiels.

Soient α_1 la composante de bord de $\alpha \times [-1, 1]$ et β_1 et β_2 les composantes de bord de $\beta \times [-1, 1]$. On peut par ailleurs supposer, quitte à renuméroter, que $i([\alpha_1], [\beta_1]) = 2$ et $i([\alpha_1], [\beta_2]) = 0$. En effet, s'il existait i tel que $i([\alpha_1], [\beta_i]) > 2$, alors $i([\alpha], [\beta]) \neq 0$. Par ailleurs si, pour tout i , $i([\alpha_1], [\beta_i]) \neq 0$, alors les extrémités de α seraient toutes deux P , ce qui contredirait $P \neq Q$. Donc on peut supposer que $i([\alpha_1], [\beta_1]) = 2$ et $i([\alpha_1], [\beta_2]) = 0$.

Par les propositions 3.17 et 3.20, $i(f([\alpha_1]), f([\beta_1])) = 2$ et $i(f([\alpha_1]), f([\beta_2])) = 0$. De ce fait, $f(\alpha_1)$ induit un unique arc dans l'anneau épointé A délimité par $f(\beta_1)$ et $f(\beta_2)$, et cet arc a pour extrémités le bord de $f(\beta_1) \times [-1, 1]$. Donc $\tilde{f}(\alpha)$ induit un unique arc dans A , reliant $f(P)$ à $f(\beta_1)$. Par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), cet arc est unique à isotopie près. Par ailleurs $\tilde{f}(\beta)$ est l'unique arc à isotopie près contenu dans A et reliant $f(P)$ à lui-même. Comme $\tilde{f}(\alpha)$ et $\tilde{f}(\beta)$ sont d'intersection nulle dans le pantalon (toujours par la classification des arcs du pantalon), on a bien que $i(\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\beta])) = 0$.

4. L'arc α relie deux points marqués P et Q et la courbe β est un arc dont les deux extrémités sont P et un des deux bords d'un voisinage régulier est isotope à un point marqué.

On reprend les notations du cas précédent en supposant de plus que β_1 n'est pas essentiel. Alors soit $i([\alpha_1], [\beta_2]) = 2$, soit $i([\alpha_1], [\beta_2]) = 0$. Si $i([\alpha_1], [\beta_2]) = 2$, on reprend à l'identique la preuve du cas précédent. Sinon, β_2 délimite un disque avec deux points marqués contenant les points marqués P et Q . De plus, $[\beta_2] = [\alpha_1]$. De ce fait, $f(\beta_2)$ délimite un disque avec deux points marqués, noté D , contenant $f(P)$ et $f(Q)$ et $\tilde{f}(\alpha)$ est l'unique arc (à isotopie près) contenu dans D et reliant $f(P)$ et $f(Q)$. Aussi $\tilde{f}(\beta)$ est l'unique arc à isotopie près contenu dans D et reliant $f(P)$ à lui-même. Par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), on conclut que $i(\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\beta])) = 0$.

5. Les arcs α et β relient les mêmes points marqués P et Q et le nombre de points marqués dans S est plus grand que trois.

Soit R un troisième point marqué de S . Soit γ un arc simple essentiel reliant P et R sans intersecter $\alpha \cup \beta$. On pose également δ un arc simple essentiel disjoint de toutes ces courbes et isotope à $\beta \cup \gamma \cup \{P\}$. On considère enfin ϵ le bord d'un voisinage régulier de $\beta \cup \gamma \cup \{P, Q, R\}$. On constate ainsi que ϵ est une courbe délimitant une surface homéomorphe à $S_{0,1,3}$ contenant $\beta \cup \gamma \cup \delta$. De plus, tout couple d'éléments de $\{\beta, \gamma, \delta\}$ est une paire simple, tout comme tout couple d'éléments de $\{\alpha, \gamma, \delta\}$. Donc tout couple d'éléments de $\{\tilde{f}([\beta]), \tilde{f}([\gamma]), \tilde{f}([\delta])\}$ forme une paire simple par la proposition 3.19. Par ailleurs $f(\epsilon)$ délimite une surface homéomorphe à $S_{0,1,3}$ contenant $\tilde{f}(\beta)$, $\tilde{f}(\gamma)$, et $\tilde{f}(\delta)$. Or, dans $S_{0,1,3}$, une telle configuration implique que si un arc de $S_{0,1,3}$ n'intersecte pas $\tilde{f}(\gamma) \cup \tilde{f}(\delta)$, alors il n'intersecte pas $\tilde{f}(\beta)$. Comme $\tilde{f}(\alpha)$ remplit cette condition (car $\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\gamma])$ et $\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\delta])$ sont des paires simples), le résultat s'ensuit.

6. Les arcs α et β relient deux points marqués P et Q et le nombre de points marqués dans S est égal à deux.

On considère la surface $S_{\alpha \cup \beta}$. Si $\alpha \cup \beta$ est séparante, alors $S_{\alpha \cup \beta}$ a deux composantes connexes S' et S'' , chacune ayant un bord. On considère alors dans S' et S'' les chaînes C' et C'' d'arcs et de courbes présentées sur la figure ci-dessous (on s'y ramène par principe de changement de coordonnées, c.f. proposition 2.19).

Ces chaînes se relèvent en des chaînes C_1 et C_2 de S tels que les arcs de départ ont pour extrémités P et tels qu'aucun des arcs ni courbes de ces chaînes n'intersectent ni α ni β . Alors par les cas précédents, il existe des représentants \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 des images des classes d'isotopie des arcs des chaînes par \tilde{f} et des représentants C'_1 et C'_2 des images des classes d'isotopie des courbes de la chaîne par f tels qu'aucun de ces représentants n'intersecte $\tilde{f}(\alpha)$ et $\tilde{f}(\beta)$. Une des composantes connexes de $S_{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C'_1, C'_2}$ est un disque épointé D . Le point marqué contenu par D est Q . Par ailleurs, le bord du disque peut être assimilé à un polygone dont les sommets sont induits par P . De plus, ce disque épointé contient $\tilde{f}(\alpha)$ et $\tilde{f}(\beta)$. Étant donné que,

dans D , tout couple d'arc γ_1 et γ_2 reliant deux points marqués distincts et ayant comme unique extrémité commune Q ont une intersection géométrique nulle, on obtient bien le résultat.

Si $\alpha \cup \beta$ est non séparante, alors on applique exactement le même raisonnement avec cette fois une seule chaîne C pour obtenir le résultat.

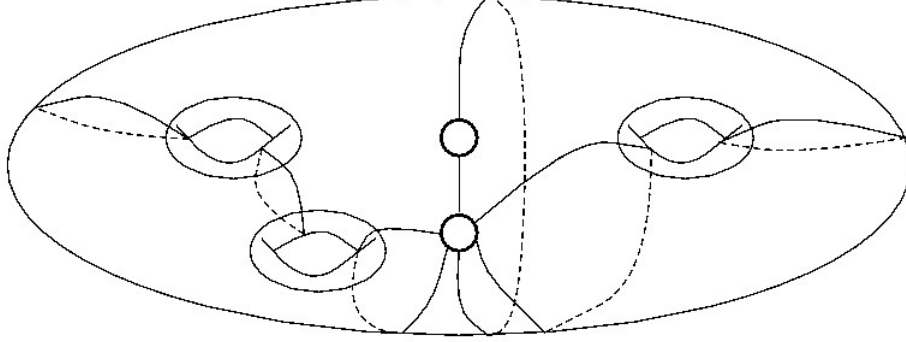


Figure 19: Chaîne de courbes dans la preuve de 6 (en rouge les arcs α et β).

7. Les arcs α et β relient un unique point marqué P et les bords de $\alpha \times [-1, 1]$ intersectent β une fois.

On note α_1 et α_2 les composantes de bord de $\alpha \times [-1, 1]$, et β_1 et β_2 les composantes de bord de $\beta \times [-1, 1]$. Par hypothèse, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $i([\alpha_i], [\beta_j]) = 1$. Ainsi, d'après la proposition 3.6, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $i(f([\alpha_i]), f([\beta_j])) = 1$. En particulier, une composante connexe de $S_{f(\alpha_1) \cup f(\alpha_2) \cup f(\beta_1) \cup f(\beta_2)}$ est un disque épointé D . Le point marqué contenu dans D est $f(P)$. Le bord de D est quant à lui assimilable à un quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection entre $f(\alpha_1) \cup f(\alpha_2)$ et $f(\beta_1) \cup f(\beta_2)$ et les arêtes sont des arcs des courbes $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2)$, $f(\beta_1)$ et $f(\beta_2)$. Ainsi, dans D , $\tilde{f}(\alpha)$ induit deux arcs, l'un reliant $f(P)$ et l'arc contenu dans $f(\beta_1)$ et l'autre reliant $f(P)$ et l'arc contenu dans $f(\beta_2)$. De même, $\tilde{f}(\beta)$ induit dans D deux arcs, l'un reliant $f(P)$ et l'arc contenu dans $f(\alpha_1)$ et l'autre reliant $f(P)$ et l'arc contenu dans $f(\alpha_2)$. Ces arcs sont unique à isotopie près, et il existe des représentants de ces classes d'isotopie qui sont deux à deux disjoints. De ce fait, on obtient bien que $\tilde{f}(\alpha)$ et $\tilde{f}(\beta)$ sont disjoints dans D . Par ailleurs, ils ne s'intersectent pas dans $S - \text{int}(D)$ car autrement, il existerait i et j tel que $i([\alpha_i], [\beta_j]) > 1$.

Remarque 3.26. Cette configuration arrive lorsque, en orientant le bord C d'un voisinage régulier de P , on obtient que C rencontre successivement une extrémité de α puis une extrémité de β . De tels arcs sont donc aisés à construire.

8. Les arcs α et β relient un unique point marqué P et l'un des arcs est séparant et délimite une surface S' de genre 0 avec k points marqués, $k \leq n$.

Supposons que ce soit α qui délimite la surface S' . Soient P_1, \dots, P_k les points marqués contenus dans S' . On construit alors $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ des arcs propres et simples de S contenus dans S' deux à deux disjoints et tels que γ_1 relie P à P_1 et, pour tout $i \geq 2$, γ_i relie P_{i-1} et P_i .

Par les cas 1 et 2, pour tout $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i(\tilde{f}([\gamma_i]), \tilde{f}([\gamma_j])) = 0$. De même par les cas 1, 3 et 4, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $i(\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\gamma_i])) = i(\tilde{f}([\beta]), \tilde{f}([\gamma_i])) = 0$.

D'après le lemme 3.24, les $f(P_i)$ sont dans la surface S'' de genre 0 avec k points marqués délimitée par $\tilde{f}(\alpha)$. De plus, $f(\gamma_1)$ relie $f(P)$ et $f(P_1)$ et, pour tout i , $\tilde{f}(\gamma_i)$ relie $f(P_{i-1})$ et $f(P_i)$ sans intersecter $f(\alpha)$. De ce fait, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\tilde{f}(\gamma_i)$ est contenu dans S'' . Ainsi, si d est une classe d'isotopie d'arcs telle que $i(d, \tilde{f}([\alpha])) \neq 0$, alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $i(d, \tilde{f}([\gamma_i])) \neq 0$. Donc $\tilde{f}(\beta)$ n'intersecte pas $\tilde{f}(\alpha)$ et on obtient le résultat.

9. Les arcs α et β relient un unique point marqué P avec α un arc séparant et β un arc non séparant.

Soient α_1 et α_2 les composantes de bord de $\alpha \times [-1, 1]$, β_1 et β_2 les composantes de bord de $\beta \times [-1, 1]$. On peut supposer, par le cas 7, que pour tout $i \in \{1, 2\}$, $i([\alpha_2], [\beta_i]) = 0$. Par le cas 8, on peut de plus supposer que les deux composantes connexes S' et S'' de S_α sont de genre au moins égal à 1. Quitte à échanger S' et S'' , β est un arc contenu dans S' . Ainsi, α_1 est isotope à un bord de S' et α_2 est isotope à un bord de S'' . De même, quitte à échanger β_1 et β_2 , on peut supposer que β_1 est contenu dans S' .

On considère η'_1, \dots, η'_k et $\eta''_1, \dots, \eta''_k$ des chaînes de courbes de S contenues dans S' et S'' respectivement tels que $S_{\cup_{i=1}^k \eta'_i \cup_{j=1}^k \eta''_j}$ est une collection d'anneaux époinés.

On choisit par ailleurs les η'_i tels que η'_1 est isotope à β_1 (voir figure 20). On suppose par ailleurs que l'un des anneaux époinés de $S_{\cup_{i=1}^k \eta'_i \cup_{j=1}^k \eta''_j}$ est l'anneau époiné A' délimité par α_1 et α_2 .

On construit alors un arc γ non-séparant dont les deux extrémités sont P , disjoint de β et intersectant α exactement une fois. Un tel arc existe par principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.19) en se ramenant aux courbes de la figure 20. On construit γ de telle manière que les bords γ_1 et γ_2 d'un voisinage régulier $\gamma \times [-1, 1]$ de γ sont tels que, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $i([\beta_i], [\gamma_j]) = 1$. Enfin, γ est tel que $i(\gamma_i, \eta'_1) = i(\gamma_i, \eta''_1) = 1$, et, pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \geq 2$, $i(\gamma_i, \eta'_j) = i(\gamma_i, \eta''_j) = 0$.

Par le cas 7, $i(\tilde{f}([\gamma]), \tilde{f}([\beta])) = 0$. Montrons que, dans l'anneau époiné A délimité par $f(\alpha_1)$ et $f(\alpha_2)$ (garanti par la proposition 3.10), $\tilde{f}(\gamma)$ définit un arc entre $f(\alpha_2)$ et $f(P)$, ce qui conclura. En effet, supposons qu'un tel arc existe et notons le ϵ . Dans A , $\tilde{f}(\beta)$ induit une collection d'arcs de $f(P)$ vers $f(\alpha_1)$ et de $f(\alpha_1)$ vers lui-même. Mais, si δ est un arc induit par $\tilde{f}(\beta)$ reliant $f(\alpha_1)$ à lui-même, par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), il intersecterait ϵ , ce qui contredirait $i(\tilde{f}(\gamma), \tilde{f}(\beta)) = 0$.

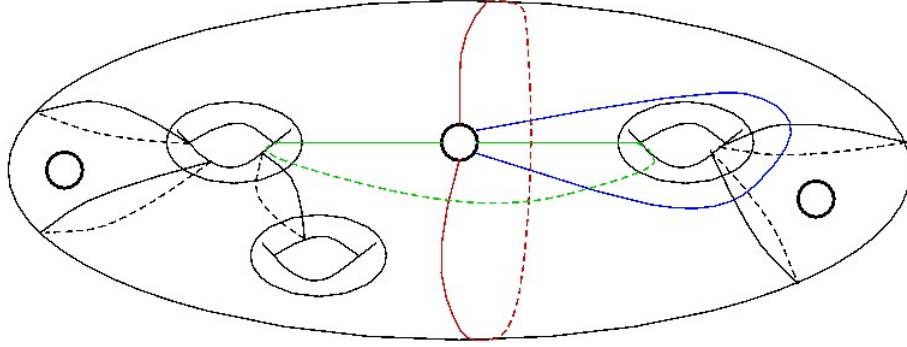


Figure 20: Une chaîne de courbes telle que considérée dans 9 (en rouge l'arc α , en bleu l'arc β et en vert l'arc γ).

Montrons maintenant qu'un tel arc ϵ existe. Par les conditions sur γ ainsi que sur les $\{\eta'_i\}_{1 \leq i \leq k}$ et $\{\eta''_j\}_{1 \leq j \leq l}$, on voit que les courbes $f(\eta'_1), \dots, f(\eta'_k), f(\gamma_1), f(\eta''_1), \dots, f(\eta''_l)$ forment une chaîne C telle que l'une des composantes connexes de S_C est un disque épointé D de point marqué P . De plus, le bord ∂D de D contient un arc ν'_1 induit par la courbe $f(\eta'_1)$ et un arc ν''_1 induit par la courbe $f(\eta''_1)$. Par ailleurs, puisque $i(f([\eta'_1]), f([\gamma_1])) = i(f([\eta''_1]), f([\gamma_1])) = 1$ par la proposition 3.6, $\tilde{f}(\gamma)$ définit dans D deux arcs, l'un reliant P à ν'_1 et l'autre reliant P à ν''_1 .

Soit $\tilde{f}(\alpha) \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de $\tilde{f}(\alpha)$. Quitte à réaliser une isotopie pour que $f(\eta''_1) \cap \tilde{f}(\alpha) \times [-1, 1] = \emptyset$, $f(\eta''_1)$ est contenu dans la composante connexe de $S_{f(\alpha_1) \cup f(\alpha_2)}$ ayant $f(\alpha_2)$ comme bord. Ainsi, $\tilde{f}(\gamma)$ induit un arc de $f(P)$ à $f(\alpha_2)$. Comme tous les arcs et toutes les courbes considérées sont en position minimale, on a ainsi construit l'arc ϵ voulu.

10. Les arcs α et β relient un unique point marqué P avec α et β deux arcs non séparants et β est non séparant dans S_α .

Par principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.19), on se ramène au-cas de la figure 21.

Il existe alors un arc propre et simple γ , disjoint de α et β , et dont les extrémités sont dans P et tel que S_γ possède deux composantes connexes S' et S'' . Par ailleurs, γ est construit de telle sorte que α induise dans S' et β induise un arc dans S'' . Par le cas précédent, $i(\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\gamma])) = i(\tilde{f}([\beta]), \tilde{f}([\gamma])) = 0$. De plus, $\tilde{f}(\alpha)$ et $\tilde{f}(\beta)$ induisent des arcs dans deux composantes connexes différentes de $S_{\tilde{f}(\gamma)}$. On a donc bien $i(\tilde{f}([\alpha]), \tilde{f}([\beta])) = 0$.

11. Les arcs α et β relient un unique point marqué P avec α et β deux arcs non-séparants et β est séparant dans S_α .

Soient alors S_1 et S_2 les deux composantes connexes de $S_{\alpha \cup \beta}$. Soit $i \in \{1, 2\}$.

Si S_i est de genre plus grand que 1, on construit alors dans S un arc γ^i dont les

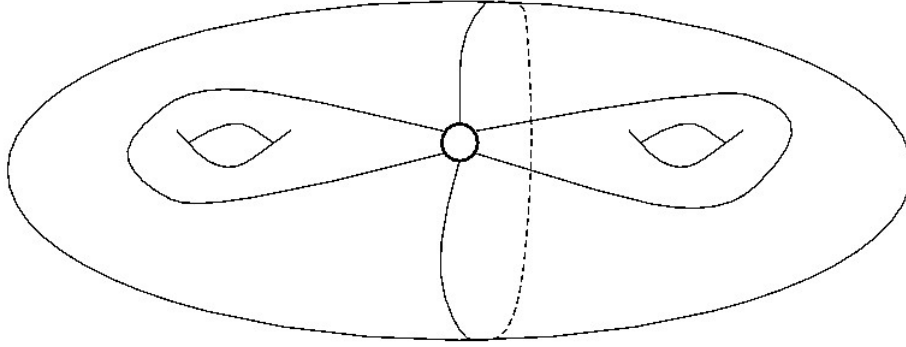


Figure 21: Courbes du cas 10.

extrémités sont dans P et tel que γ^i soit non-séparant dans S . On suppose par ailleurs que $S_i \cap \gamma^i \neq \emptyset$ et que $\xi_2 \cap \gamma^i = \emptyset$. On construit ensuite une chaîne de courbes non séparante $\gamma_1^i, \dots, \gamma_{k_i}^i$, telle que :

- γ_1^i intersecte γ^i une fois et, pour $j \neq 1$, γ_j^i n'intersecte pas γ^i ;
- pour tout j, m , $i(\gamma_j^i, \gamma_m^i) \leq 1$;
- la surface $(S_i)_{\cup_{j=1}^{k_i} \gamma_j^i}$ est homéomorphe à un anneau.

Si le genre de S_i est égal à 0, on construit de même un arc γ^i reliant P et un des points marqués contenus dans S_i . On construit ensuite des arcs $\gamma_1^i, \dots, \gamma_{k_i}^i$ dans S_i tels que :

- pour toute paire d'arcs (ϵ, ϵ') dans $\{\gamma^i, \gamma_1^i, \dots, \gamma_{k_i}^i\}^2$, $i(\epsilon, \epsilon') = 0$;
- γ^i et γ_1^i forment une paire simple, et pour tout $j \neq 1$, γ^i et γ_j^i ne forment pas de paire simple ;
- pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, γ_j^i et γ_{j+1}^i forment une paire simple et pour tous entiers s, t tels que $|s - t| > 1$, γ_s^i et γ_t^i ne forment pas une paire simple ;
- la surface $(S_i)_{\cup_{j=1}^{k_i} \gamma_j^i}$ est homéomorphe à un anneau.

Ainsi, si l'on relève tous les courbes et arcs considérés dans S , on obtient une collection d'arcs et de courbes qui n'intersectent ni α ni β et tels que $S_{\cup_{i=1}^2 \cup_{j=1}^{k_i} \gamma_j^i}$ un tore avec deux bords. Par ailleurs, les arcs γ^1 et γ^2 relient P et les deux bords du tore.

On peut supposer, par le cas 7, que, pour tout $i \in \{1, 2\}$, $i([\alpha_2], [\beta_i]) = 0$. Par ailleurs, soit γ^1 , soit γ^2 intersecte α_2 par le fait que γ^1 et γ^2 relie les deux bords du tore. Supposons qu'il s'agisse de γ^1 . Alors, dans l'anneau délimité par $f(\alpha_1)$ et $f(\alpha_2)$, $f(\beta)$ définit des arcs allant de $f(P)$ à $f(\alpha_1)$ et de $f(\alpha_1)$ vers $f(\alpha_1)$. Cependant, par les cas 3 et 10, $f(\beta)$ ne définit pas d'arcs de $f(\alpha_1)$ vers $f(\alpha_1)$, car

sinon il intersecterait $f(\gamma^1)$. Donc, comme dans les cas précédents, ceci permet de conclure.

12. Les arcs α et β relient un unique point marqué P avec α et β deux arcs séparants.

On peut supposer par le cas 8 que α et β sont tous deux de genre plus grand que 1. On note α_1 et α_2 les composantes de bord d'un voisinage régulier de α et β_1 et β_2 les composantes de bord de $\beta \times [-1, 1]$. On peut supposer, par le cas 7, que pour tout $i \in \{1, 2\}$, $i([\alpha_2], [\beta_i]) = 0$.

Soit γ un arc non-séparant dont les extrémités sont dans P tels que $i(\alpha, \gamma) = i(\beta, \gamma) = 0$ et qui intersecte α_2 sans intersecter α_1 . Un tel arc existe car nous avons supposé que α était de genre plus grand que 1. Alors cette configuration est préservée d'après le cas 9. De plus $\tilde{f}(\gamma)$ définit un arc ϵ dans l'anneau épointé A délimité par $f(\alpha_1)$ et $f(\alpha_2)$. ϵ relie $f(P)$ et $f(\alpha_2)$. Or, $\tilde{f}(\beta)$ définit dans A des arcs allant de $f(P)$ à $f(\alpha_1)$ et des arcs allant de $f(\alpha_1)$ à lui-même. Comme $\tilde{f}(\beta)$ n'intersecte pas ϵ , $\tilde{f}(\beta)$ définit uniquement deux arcs allant de $f(P)$ à $f(\alpha_1)$. De fait, $\tilde{f}(\alpha)$ et $\tilde{f}(\beta)$ ne s'intersectent pas.

Dans tous les cas, on voit que \tilde{f} préserve les sommets reliés par une arête. Ainsi, \tilde{f} est un automorphisme. \square

Proposition 3.27. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $g \geq 2$ et $n > 0$. L'application*

$$\begin{aligned} \text{Aut } C(S) &\rightarrow \text{Aut } A(S) \\ f &\mapsto \tilde{f} \end{aligned}$$

est un homomorphisme injectif.

Preuve. Montrons tout d'abord que l'application est un homomorphisme. Soient $f, g \in \text{Aut } C(S)$, a un sommet de $A(S)$ et α un représentant de a .

Si α relie deux points marqués distincts, alors soit C la classe d'isotopie de la courbe délimitant un pantalon correspondante garantie par le lemme 3.15. Comme la classe d'isotopie de courbes correspondant à $\tilde{f}(a)$ est $f(C)$, on a bien que $\widetilde{g \circ f}(a) = \tilde{g} \circ \tilde{f}(a)$.

Si α relie un seul point marqué $\{P\}$ et que les deux bords α_1 et α_2 d'un voisinage régulier de α sont essentiels, alors les classes d'isotopie des bords de l'anneau épointé correspondant à $\tilde{f}(a)$ sont $f([\alpha_1])$ et $f([\alpha_2])$. Donc on a aussi $\widetilde{g \circ f}(a) = \tilde{g} \circ \tilde{f}(a)$.

Enfin, si α_1 est isotope à un point marqué, soit Q l'autre point marqué de S contenu dans le disque avec deux points marqués délimité par α_2 . La classe d'isotopie $\widetilde{g \circ f}(a)$ est la classe d'isotopie de l'arc, unique à isotopie près, contenu dans $g \circ f(\alpha_2)$, et dont les deux extrémités sont $g \circ f(P)$. Or, comme $g \circ f \cdot P = g \cdot f(P)$, on voit que $\widetilde{g \circ f}(a) = \tilde{g} \circ \tilde{f}(a)$. Donc l'application est bien un homomorphisme.

Montrons maintenant que l'application est injective. Soit $f \in \text{Aut } C(S)$ tel que $\tilde{f} = \text{id}$. Par le lemme 3.15, f est l'identité sur les courbes fermées simples séparantes

délimitant un disque à deux points marqués. Soit maintenant $[\alpha]$ la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle qui ne délimite pas un disque avec deux points marqués. Alors il existe une classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle $[\beta]$ telle que $[\alpha]$ et $[\beta]$ délimitent un anneau épointé. On suppose que α et β sont en position minimale. Soit a la classe d'isotopie de l'arc correspondant garantie par le lemme 3.16. Cette classe d'isotopie étant fixée par \tilde{f} , on voit que $f(\{[\alpha], [\beta]\}) = \{[\alpha], [\beta]\}$. Donc soit $f([\alpha]) = [\alpha]$, soit $f([\alpha]) = [\beta]$. Si le nombre de points marqués de S est plus grand que deux, le deuxième cas n'est pas possible car on peut toujours trouver une courbe γ délimitant un disque à deux points marqués intersectant α et non β . La classe d'isotopie de γ étant fixe par f , et comme $i(f([\alpha]), f([\gamma])) \neq 0$, on a nécessairement $f([\alpha]) = [\alpha]$.

Supposons que le nombre de points marqués de S soit égal à un.

Affirmation : il existe deux courbes α' et β' telles que α' et β' délimitent un anneau épointé et telles que $i(\alpha, \alpha') = i(\alpha, \beta') = i(\beta, \alpha') = 0$ et $i(\beta, \beta') = 2$.

En effet, puisque S est homéomorphe à $S_{g,1}$ avec $g \geq 2$, hormis l'anneau épointé délimité par α et β , toutes autres les composantes connexes de $S_{\alpha \cup \beta}$ sont de genre plus grand que 1. On choisit donc α' comme étant un relevé d'une courbe fermée simple essentielle non séparante de $S_{\alpha \cup \beta}$. β' est quant à lui une courbe fermée simple essentielle délimitant un anneau épointé avec α' et intersectant β sans intersecter α . Le même raisonnement que précédemment montre que $f(\{[\alpha'], [\beta']\}) = \{[\alpha'], [\beta']\}$. Les conditions sur les intersections imposent alors $f([\alpha]) = [\alpha]$.

Dans tous les cas, $f = \text{id}$ et on obtient le résultat voulu. \square

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 3.1 :

Preuve. Soit $G \in \text{Aut } C(S)$. Nous prouvons tout d'abord le théorème dans le cas où le nombre de points marqués n de S est plus grand que deux. On considère alors la chaîne de courbes C représentée sur la figure 22 (le dessin a été fait pour $n = 2$ mais il suffit de prendre davantage de courbes pour former une chaîne qui remplit la surface).

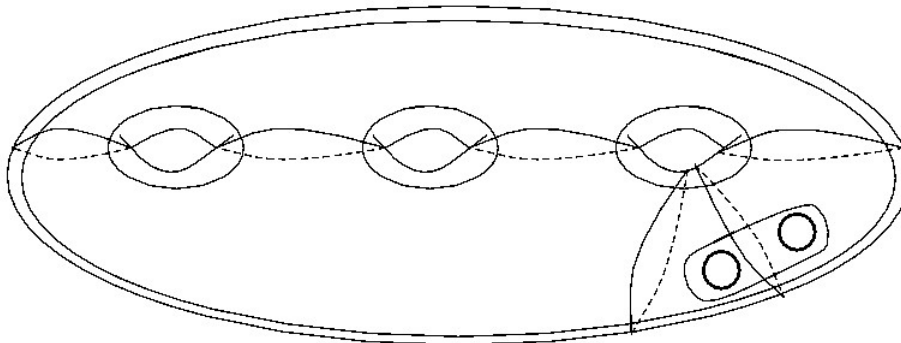


Figure 22: Chaîne de courbes utilisée dans la preuve de 3.1 (cas $g = 3$ et $n = 2$).

Par la proposition 3.6, G envoie les classes d'isotopie de courbes de C vers des classes d'isotopie de courbes formant une chaîne. Or, par le principe de changement

de coordonnées (c.f. proposition 2.19), il existe $g \in \text{Mod}^*(S)$ tel que G coïncide avec g sur les classes d'isotopie des courbes de C . Donc, quitte à considérer $g^{-1} \circ G$, on peut supposer que, pour toute courbe $c \in C$, $G([c]) = [c]$.

On considère alors les arcs de $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ de la figure 23.

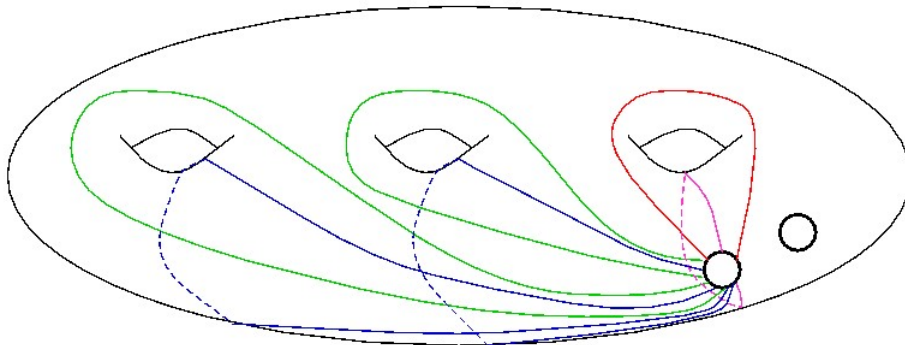


Figure 23: Arcs utilisés dans la preuve du théorème 3.1.

Montrons que \tilde{G} fixe la classe d'isotopie de tous ces arcs. En effet, les bords d'un voisinage régulier de l'arc rose sont isotopes à des courbes de C . De ce fait, la classe d'isotopie de l'arc rose est fixe par \tilde{G} . En particulier, $G(P) = P$.

Dans le cas des arcs bleus, on nomme B l'arc bleu considéré. Soient c_1, \dots, c_k les courbes de C qui n'intersectent pas B . On considère la surface $S_{\cup_{i=1}^k c_i}$. Une des composantes connexes de $S_{\cup_{i=1}^k c_i}$ est homéomorphe à $S_{0,2,1}$. Notons S' cette composante connexe. Par ailleurs, un représentant de $\tilde{G}([B])$ est contenu dans S' . Par la classification des arcs du pantalon (c.f. proposition 2.22), il existe une unique classe d'isotopie d'arcs contenu dans le pantalon et reliant P à lui-même. Comme B appartient à cette classe d'isotopie, on conclut que $\tilde{G}([B]) = [B]$.

Soit maintenant V un arc vert de la figure, c_1, \dots, c_k les courbes de C n'intersectant pas V et B_1, \dots, B_l les arcs bleus n'intersectant pas V . On considère la surface $S_{\cup_{i=1}^k c_i \cup_{j=1}^l B_j}$. Cette dernière est homéomorphe à $S_{0,2,1}$ et un raisonnement identique à ce qui a été fait précédemment montre le résultat.

Soit enfin, R l'arc rouge de la figure, c_1, \dots, c_k les courbes de C n'intersectant pas R et B_1, \dots, B_l les arcs bleus n'intersectant pas R et V_1, \dots, V_m les arcs verts n'intersectant pas R . En considérant la surface $S_{\cup_{i=1}^k c_i \cup_{j=1}^l B_j \cup_{s=1}^m V_s}$, et par le même raisonnement que précédemment, le résultat se déduit. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, $\tilde{G}([\alpha_i]) = [\alpha_i]$.

Afin d'appliquer la proposition 3.11, nous devons compléter ce simplexe de $A(S)$ fixé par \tilde{G} en un simplexe maximal. Pour cela, on considère la surface $S_{\cup_{i=1}^t \alpha_i}$. Une des composantes connexes de $S_{\cup_{i=1}^t \alpha_i}$ est un disque épointé dont le point marqué est Q . On obtient alors un polygone H (dont les sommets proviennent de P et les arêtes des arcs découpés) avec un point marqué à l'intérieur dénoté Q . Ce polygone a $4g$ sommets provenant du point marqué P . On construit alors $4g$ arcs, deux à deux disjoints, chacun

reliant Q à un des $4g$ sommets considérés. Ces $4g$ arcs se relèvent en arcs de S disjoints de chaque élément de $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$. Par ailleurs, comme, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, $\tilde{G}([\alpha_i]) = ([\alpha_i])$, $\tilde{G}(\alpha_i) = \alpha_i$. De ce fait, une des composantes connexes de $S_{\cup_{i=1}^t \tilde{G}(\alpha_i)}$ est le polygone H . Ainsi, \tilde{G} fixe les classes d'isotopie des $4g$ arcs construits.

Ainsi, \tilde{G} fixe un simplexe maximal dans $A(S)$. Par la proposition 3.11, $\tilde{G} = \text{id}$. Puis, par la proposition 3.27, $G = \text{id}$. Donc le théorème est prouvé pour les surfaces ayant au moins deux points marqués.

Montrons maintenant le résultat dans le cas des surfaces ayant au plus un point marqué. Pour cela, nous allons nous ramener au cas des surfaces avec au moins deux points marqués en considérant la surface S_α pour α une courbe fermée simple non séparante.

En effet, nous savons que G envoie classe d'isotopie de courbes non séparantes sur classe d'isotopie de courbes non séparantes par le corollaire 3.8. Par ailleurs, l'action de $\text{Mod}^*(S)$ sur les classes d'isotopie de courbes non séparantes est transitive par la proposition 2.18. Ainsi, on peut supposer, quitte à composer par un élément de $\text{Mod}^*(S)$, que G fixe a , la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non séparante α . G induit alors un automorphisme G' de $L(a)$ qui est isomorphe à $C(S_\alpha)$. On considère alors la surface S_α . C'est une surface de genre $g - 1$ avec n points marqués et 2 bords. Soient α_1 et α_2 les bords de S_α induits par α .

On souhaite alors appliquer le raisonnement pour les surfaces de genre $g \geq 2$ avec plus de 2 points marqués. Le premier problème est que la surface S_α contient des bords et non uniquement des points marqués. Pour résoudre ce problème, on considère des disques épointés D_1 et D_2 de points marqués p_1 et p_2 respectivement. Pour $k, l \in \{1, 2\}$, soient $i_k: S^1 \rightarrow S_\alpha$ une paramétrisation de α_k et $j_l: S^1 \rightarrow D_l$ une paramétrisation de ∂D_l . Soit $(S_\alpha)'$ la surface :

$$(S_\alpha)' := (S_\alpha \amalg D_1 \amalg D_2) / \sim ;$$

où $x, y \in S_\alpha \amalg D_1 \amalg D_2$ sont équivalents s'il existe $k \in \{1, 2\}$, $t \in S^1$ tels que $x = i_k(t)$ et $y = j_k(t)$. $(S_\alpha)'$ est homéomorphe à $S_{g-1,0,n+2}$. Par ailleurs, l'application qui à une courbe fermée simple essentielle $c \subseteq S_\alpha$ associe son image dans $(S_\alpha)'$ induit un isomorphisme $C(S_\alpha) \simeq C((S_\alpha)')$.

Puisque G' est un élément de $\text{Aut } C(S_\alpha)$, et que $C(S_\alpha) \simeq C((S_\alpha)'),$ G' induit un élément de G'' de $(S_\alpha)'$.

Il se peut également que $(S_\alpha)'$ soit de genre égal à 1. Néanmoins, étant donné que G'' est induit par un automorphisme G de $C(S)$, et que par la proposition 3.6, G préserve l'intersection géométrique égale à 1, G'' préserve également l'intersection géométrique égale à 1. On peut alors appliquer tous les raisonnements faits jusqu'à présent à G'' pour obtenir que G'' est induit par un élément $f'' \in \text{Mod}^*((S_\alpha)').$ Nous avons par ailleurs la suite exacte suivante (c.f. [FM, Proposition 3.19]) :

$$1 \rightarrow \langle T_{a_1}, T_{a_2} \rangle \rightarrow \text{Mod}(S_\alpha) \rightarrow \text{Mod}((S_\alpha)', p_1, p_2) \rightarrow 1.$$

Donc il existe $f_a \in \text{Mod}^*(S_\alpha)$ tel que pour tout $v \in C(S_\alpha)$, $f_a(v) = G'(v)$. On étend ensuite f_a en un élément $f \in \text{Mod}^*(S)$. On a donc $G|_{L(a)} = f|_{L(a)}$ et $f(a) = a$.

Pour étendre ce résultat à tout le complexe des courbes et non uniquement à $L(a)$, on va considérer toutes les classes d'isotopie de courbes non séparantes. En effet,

Affirmation : tout sommet c de $C(S)$ appartient au lien de b où b est la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non séparante.

Pour voir ce résultat, soit c la classe d'isotopie d'une courbe séparante essentielle γ . Alors c est de genre plus grand que 1 étant donné qu'il y a au plus un point marqué dans S et que γ est essentielle. En choisissant une courbe non séparante η dans une des deux composantes connexes de S_γ et en la relevant à S , on a bien que $c \in L([\eta])$. Si c est la classe d'isotopie d'une courbe non séparante γ , alors, comme le genre de S est plus grand que deux, S_γ est de genre plus grand que 1. Donc il existe une courbe fermée simple non séparante η contenue dans S_γ , et η se relève dans S en une courbe fermée simple non séparante η' telle que $i([\gamma], [\eta']) = 0$. De ce fait, $c \in L([\eta])$.

Ainsi, il suffit de montrer que, pour toute classe d'isotopie b de courbe non séparante, $G|_{L(b)} = f|_{L(b)}$. Ceci conclura la preuve.

On commence par le cas où b est une classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non séparante β telle que $i(a, b) = 0$ et telle que β soit non séparante dans S_α . En particulier $S_{\alpha \cup \beta}$ est connexe et a au moins quatre composantes de bord. On a, en appliquant le raisonnement du paragraphe précédent, qu'il existe $g_b \in \text{Mod}^*(S)$ tel que $G|_{L(b)} = g_b|_{L(b)}$ avec $g_b(b) = G(b)$. Ainsi,

$$g_b|_{L(a,b)} = f|_{L(a,b)}.$$

Or $L(a, b) \simeq C(S_{\alpha \cup \beta})$. De plus, $S_{\alpha \cup \beta}$ a au moins quatre composantes de bord, donc le théorème 2.39 s'applique pour $S_{\alpha \cup \beta}$. Ainsi, l'injectivité du théorème 3.1 est vérifiée (c.f. section 3.1) et, de ce fait, $g_b|_{S_{\alpha \cup \beta}} = f|_{S_{\alpha \cup \beta}}$. Par le corollaire 2.34, $f = g_b \circ T_b^{k_b} \circ T_a^{n_b}$ où T_a est un twist de Dehn autour de a et k_b et n_b des entiers dépendants *a priori* de b . Comme $g_b|_{L(b)} = g_b \circ T_b^{k_b}|_{L(b)}$, on peut remplacer g_b par $g_b \circ T_b^{k_b}$ et obtenir

$$f = g_b \circ T_a^{n_b}.$$

Ainsi, pour obtenir un élément de $\text{Mod}^*(S)$ égal à G , nous allons montrer que l'entier n_b ne dépend pas de b . Pour cela, soient c une autre classe d'isotopie d'une courbe fermée simple non séparante γ telle que $i(a, c) = 0$ et telle que γ soit non séparante dans S_α . γ est supposée de plus en position minimale avec α et β . On distingue plusieurs cas.

S'il existe une courbe δ de classe d'isotopie d intersectant α non trivialement sans intersecter $\beta \cup \gamma$, alors $g_c(d) = G(d) = g_b(d)$. De plus, par les propriétés des twists de Dehn (c.f. proposition 2.37),

$$f(d) = g_b \circ T_a^{n_b}(d) = T_a^{n_b} \circ G(d) = T_a^{n_c} \circ G(d).$$

Donc,

$$i(G(d), T_a^{n_b} \circ G(d)) = |n_b| i(G(d), a)^2 = |n_c| i(G(d), a)^2.$$

Donc, comme $i(G(d), a) \neq 0$, $|n_b| = |n_c|$. Par ailleurs, puisque $T_a^{n_b}(G(d)) \neq T_a^{-n_b}(G(d))$ (c.f. proposition 2.37), on a bien $n_b = n_c$.

Par ailleurs, ce cas intervient dès que $i(b, c) = 1$ car alors $S_{\beta \cup \gamma}$ est de genre au moins un.

Donc si b et c ne remplissent pas les conditions du cas précédent,

Affirmation : il existe une chaîne de classes d'isotopie de courbes non séparantes c_1, \dots, c_k vérifiant :

- $i(b, c_1) = i(c_1, c_2) = \dots = i(c_k, c) = 1$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $i(a, c_i) = 0$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, c_i est une courbe non-séparante dans S_α .

En effet, par le deuxième point de la proposition 2.50 (S_α est de genre plus grand que 1 car $g \geq 2$), il existent des classes d'isotopie de courbes fermées simples non séparantes c'_1, \dots, c'_k dans S_α tels que $i(b, c'_1) = 1$, $i(c'_k, c) = 1$ et, pour tout i , $i(c'_i, c'_{i+1}) = 1$. On relève ensuite ces classes d'isotopie en des classes d'isotopie c_1, \dots, c_k dans S . De ce fait, pour tout i , $i(a, c_i) = 0$. Donc, une telle chaîne existe. Par le cas précédent, $n_b = n_{c_1} = \dots = n_{c_k} = n_c$.

Ainsi, il existe un entier b tel que, pour toute classe d'isotopie b d'une courbe non séparante β vérifiant $i(a, b) = 0$ et telle β soit non séparante dans S_α , on a :

$$f = g_b \circ T_a^n.$$

Donc, en remplaçant f par $f \circ T_a^{-n}$, ce qui ne change pas le fait que $f(a) = a$ et $G|_{L(a)} = f|_{L(a)}$, on obtient bien que pour toutes les classes d'isotopie b de courbes vérifiant les conditions précédemment citées, $f = g_b$.

Dans le cas où b est la classe d'isotopie d'une courbe non séparante β telle que $i(a, b) = 0$ et β est séparante dans S_α , alors les genres g_1 et g_2 des composantes connexes de $S_{\alpha \cup \beta}$ sont tels que $g_1 + g_2 = g - 1$. Mais alors, comme S est une surface de genre plus grand que 2, il existe une courbe non séparante γ dans $S_{\alpha \cup \beta}$. On choisit un relevé γ' dans S et l'on note c sa classe d'isotopie. Alors c est telle que $i(a, c) = i(b, c) = 0$ et γ' est non séparante dans S_α et S_β . Donc, par le paragraphe précédent, $f = g_c = g_b$.

Enfin, dans le cas général où b est une classe d'isotopie d'une courbe non séparante β , comme le complexe des courbes non séparantes est connexe pour les surfaces de genre plus grand que deux par la proposition 2.50, il existe dans S une chaîne de classes d'isotopie c_1, \dots, c_k de courbes non séparantes $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ vérifiant $i(a, c_1) = i(c_1, c_2) = \dots = i(c_{k-1}, c_k) = i(c_k, b) = 0$. Par un raisonnement de proche en proche, on obtient bien $g_b = f$.

Donc on a bien $G|_{L(b)} = f|_{L(b)}$ pour toute classe d'isotopie b de courbes non séparantes. Ceci conclut la preuve par ce qui a été dit précédemment. □

4. Le commensurateur abstrait de $\text{Mod}(S)$

Nous commençons cette partie par la définition de l'objet qui nous intéressera durant toute la suite du mémoire, à savoir le commensurateur abstrait d'un groupe.

Définition 4.1. Soit G un groupe. Le commensurateur abstrait de G , noté, $\text{Comm}(G)$, est le groupe dont les éléments sont les classes d'équivalence d'isomorphisme $f: H_1 \rightarrow H_2$, où H_1 et H_2 sont des sous-groupes d'indice fini de G . Ici, f est équivalent à $f': H'_1 \rightarrow H'_2$ si f est égal à f' sur un sous-groupe d'indice fini H de leurs ensembles de définition. L'élément neutre de $\text{Comm}(G)$ est la classe d'équivalence de l'application identité de G , et la composition $[f] \cdot [f']$ est obtenue par restriction à un sous-groupe d'indice fini H tel que $f \circ f'$ soit bien défini.

Remarque 4.2. Par les définitions on voit immédiatement que si H est un sous-groupe d'indice fini de G alors l'application $\text{Comm}(G) \rightarrow \text{Comm}(H)$ obtenu en restreignant l'ensemble de définition est un isomorphisme.

Nous souhaitons ainsi étudier $\text{Comm}(\text{Mod}(S))$. Par la remarque ci-dessus, nous pouvons étudier indifféremment $\text{Comm}(\text{Mod}^*(S))$ ou $\text{Comm}(\text{Mod}(S))$. Nous connaissons déjà une application naturelle

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(S) & \rightarrow & \text{Comm}(\text{Mod}(S)) \\ f & \mapsto & \text{ad}_f \end{array}$$

où ad_f est la conjugaison dans $\text{Mod}(S)$ par f .

L'objectif de cette section est de montrer le résultat de rigidité suivant, dû à Ivanov [Iva1] :

Théorème 4.3. Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$, avec $g \geq 2$ et $(g, n) \neq (2, 0)$. L'application naturelle $\text{Mod}(S) \rightarrow \text{Comm}(\text{Mod}(S))$ est un isomorphisme.

Dans le cas où $(g, n) = (2, 0)$, alors l'application $\text{Mod}(S) \rightarrow \text{Comm}(\text{Mod}(S))$ est surjective, de noyau isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La preuve de ce théorème repose sur le théorème 3.1 ainsi que sur une caractérisation algébrique des stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles. En effet, nous allons montrer que tout isomorphisme entre sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$ envoie stabilisateur de classes d'isotopie de courbes sur stabilisateur de classes d'isotopie de courbes. Pour cela, nous restreignons l'étude de $\text{Comm}(\text{Mod}(S))$ à un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$, à savoir le groupe

$$\Gamma_S(m) := \ker\{\text{Mod}^*(S) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\}.$$

Les propriétés de $\Gamma_S(m)$ sont telles que nous avons les propositions suivantes :

Proposition 4.66. Soit H un sous-groupe de $\Gamma_S(m)$. H est un sous-groupe non virtuellement abélien contenant un sous-groupe normal cyclique maximal pour cette propriété si, et seulement si, il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles a telle que $H = \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(a)$.

Proposition 4.67. *Soit H un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$. Soient a et b des classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles. Alors $i(a, b) = 0$ si, et seulement si, il n'existe pas de sous-groupe $A \leq \text{Mod}(S)$ isomorphe à \mathbb{F}_2 tel que $H \cap \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \subseteq C_H(A \cap H)$.*

En admettant, pour le moment, ces résultats, nous allons prouver le théorème 4.3. Pour cela, nous montrons auparavant un lemme :

Lemme 4.4. *Soient a et b deux classes d'isotopie distinctes de courbes fermées simples essentielles. Soit H un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$. Alors :*

$$\text{Stab}_H(a) \neq \text{Stab}_H(b).$$

Preuve. Comme $a \neq b$, par la remarque 2.38, il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles c telle que $i(a, c) = 0$ et $i(b, c) \neq 0$. Puisque H est d'indice fini dans $\text{Mod}(S)$, il existe un entier k tel que $T_c^k \in H$. Or, par la proposition 2.37, $T_c^k \in \text{Stab}_H(a)$ et $T_c^k \notin \text{Stab}_H(b)$. Donc $\text{Stab}_H(a) \neq \text{Stab}_H(b)$. \square

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 4.3 :

Preuve. Soit $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$ un isomorphisme entre deux sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}(S)$. On considère alors le sous-groupe $\Phi^{-1}(G_2 \cap \Gamma_S(m)) \cap \Gamma_S(m)$ qui est d'indice fini dans G_1 car $\Gamma_S(m)$ est d'indice fini dans $\text{Mod}(S)$. On note alors Γ_1 un sous-groupe d'indice fini de $\Phi^{-1}(G_2 \cap \Gamma_S(m)) \cap \Gamma_S(m)$ et $\Gamma_2 = \Phi(\Gamma_1)$.

Comme G_1 , G_2 et $\Gamma_S(m)$ sont des sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}^*(S)$ et que Φ est un isomorphisme, Γ_1 et Γ_2 sont des sous-groupes d'indice fini de $\text{Mod}^*(S)$.

Puisque Φ est un automorphisme, si H est un sous-groupe de Γ_1 non virtuellement abélien, contenant un sous-groupe normal cyclique et maximal pour cette propriété, alors $\Phi(H)$ est un sous-groupe de Γ_2 non virtuellement abélien, contenant un sous-groupe normal cyclique maximal pour cette propriété. De ce fait, puisque Γ_1 et Γ_2 sont des sous-groupes d'indice fini de $\Gamma_S(m)$, par la proposition 4.66, pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles a , il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles $\phi(a)$ telle que :

$$\Phi(\Gamma_1 \cap \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(a)) = \text{Stab}_{\Gamma_2}(\phi(a)).$$

Par ailleurs, $\phi(a)$ est unique par le lemme 4.4. Donc ϕ définit une application $\phi: V(C(S)) \rightarrow V(C(S))$. Montrons que ϕ est un automorphisme. Montrons tout d'abord que ϕ est une bijection. Soit Φ^{-1} l'inverse de Φ . Par le même raisonnement, Φ^{-1} induit une application

$$\psi: C(S) \rightarrow C(S).$$

De ce fait,

$$\Gamma_1 \cap \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(a) = \Phi^{-1} \circ \Phi(\Gamma_1 \cap \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(a)) = \Phi^{-1}(\Gamma_2 \cap \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(\phi(a))) = \Gamma_1 \cap \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(\psi \circ \phi(a)).$$

Or, $\psi \circ \phi(a) = a$ par le lemme 4.4. De même, $\phi \circ \psi(a) = a$ et ϕ est bien une bijection. Enfin, puisque Φ est un automorphisme, pour tout sous-groupe A de Γ_1 isomorphe à \mathbb{F}_2 , $\Phi(A) \simeq \mathbb{F}_2$ et $\Phi(C_{\Gamma_1}(A)) = C_{\Gamma_2}(\Phi(A))$. Donc, la proposition 4.67 donne que, pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles a et b ,

$$i(a, b) = 0 \Leftrightarrow i(\phi(a), \phi(b)) = 0.$$

Donc ϕ est bien un automorphisme. Par le théorème 3.1, il existe $f \in \text{Mod}^*(S)$ tel que, pour tout $a \in \mathcal{S}$, $\phi(a) = f(a)$.

Montrons maintenant que $\Phi = \text{ad}_f$. Pour cela, on montre tout d'abord que Φ envoie toute puissance d'un twist de Dehn contenue dans Γ_1 sur une puissance d'un twist de Dehn contenue dans Γ_2 .

Soit a une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles, α un représentant de a et N tel que $T_a^N \in \Gamma_1$. Alors pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles b telle que $i(a, b) = 0$, $T_a^N \in \Gamma_1 \cap \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(b)$. Donc, par la proposition 4.67, pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles b telle que $i(a, b) = 0$, $\Phi(T_a^N) \in \Gamma_2 \cap \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(f(b))$. Notons $f(\alpha)$ un représentant de $f(a)$ et $\rho: \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(f(a)) \rightarrow \text{Mod}(S_{f(\alpha)})$ le morphisme canonique.

Par la proposition 2.37, pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles b telle que $i(a, b) = 0$, $\Phi(T_a^N)(f(b)) = f(b)$. Donc, puisque f est un automorphisme, on voit que

$$\rho(\Phi(T_a^N)) \in \ker\{\text{Mod}(S_{f(\alpha)}) \rightarrow \text{Aut } C(S_{f(\alpha)})\}.$$

Ce noyau contient comme sous-groupe d'indice fini le groupe engendré par les twists de Dehn autour des bords $f(\alpha)_1$ et $f(\alpha)_2$ de $S_{f(\alpha)}$ induits par $f(\alpha)$. Donc il existe un entier k tel que :

$$\rho(\Phi(T_a^N))^k = \rho(\Phi(T_a^{kN})) \in \langle T_{[f(\alpha)_1]}, T_{[f(\alpha)_2]} \rangle.$$

Donc, puisque $\rho^{-1}(\langle T_{[f(\alpha)_1]}, T_{[f(\alpha)_2]} \rangle) \subseteq \langle T_{f(a)} \rangle$, il existe M tel que $\Phi(T_a^{kN}) = T_{f(a)}^M$.

Montrons alors que $\Phi = \text{ad}_f$. Soit donc $g \in G_1$. Soit $a \in V(C(S))$, N tel que $T_a^N \in \Gamma_1$. On a, par ce qui a été fait dans le paragraphe précédent et par la proposition 2.37 qu'il existe des entiers k et M tels que :

$$\Phi(gT_a^{kN}g^{-1}) = \Phi(g)T_{f(a)}^M\Phi(g)^{-1} = T_{\Phi(g)(a)}^{\pm M}.$$

Par ailleurs, toujours par la proposition 2.37,

$$\Phi(gT_a^{kN}g^{-1}) = \Phi(T_{g(a)}^{\pm kN}) = T_{f(g(a))}^K.$$

Donc, pour tout $a \in \mathcal{S}$,

$$\Phi(g)(f(a)) = f(g(a)).$$

De ce fait, $(fg)^{-1}\Phi(g)f$ est dans le noyau de l'application $\text{Mod}^*(S) \rightarrow \text{Aut } C(S)$ qui est trivial si $(g, n) \neq (2, 0)$ et égal au groupe engendré par l'involution hyperelliptique si $(g, n) = (2, 0)$. De ce fait, le résultat est prouvé. \square

Dans le reste du mémoire, nous prouvons les propositions 4.66 et 4.67. Pour ce faire, nous allons étudier les propriétés du groupe $\Gamma_S(m)$. L'utilité d'un tel sous-groupe d'indice fini est qu'il est constitué d'éléments de $\text{Mod}(S)$ qui ont des propriétés particulières : ce sont des éléments dits *purs*.

Pour définir un élément pur de $\text{Mod}(S)$, nous devons au préalable présenter une classification des éléments du groupe modulaire. Cette classification sera présentée dans la sous-section 4.1. Puis, nous pourrons définir les éléments purs, montrer des propriétés de ces derniers, et enfin montrer que le groupe $\Gamma_S(m)$ est constitué d'éléments purs. Ceci constituera la sous-section 4.2. Enfin, les propriétés des éléments purs permettront de prouver le théorème suivant :

Théorème 4.64. *Soit Γ un sous-groupe irréductible de $\Gamma_S(m)$ non trivial. Alors Γ est soit cyclique engendré par un pseudo-Anosov, soit il contient deux pseudo-Anosov f et g tels que les points fixes de f et g pour l'action de $\text{Mod}(S)$ sur la compactification de l'espace de Teichmüller sont tels que $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) = \emptyset$.*

Une fois ce théorème prouvé, le résultat sur les stabilisateurs s'en déduira aisément.

4.1. Espace de Teichmüller et classification de Nielsen-Thurston

Nous présentons dans cette sous-partie une classification des éléments du groupe modulaire, appelée *classification de Nielsen-Thurston*. Cette classification nous sera utile dans l'étude du groupe $\Gamma_S(m)$. Cette classification est prouvée à partir de l'étude de l'action du groupe modulaire sur deux espaces, à savoir *l'espace de Teichmüller* et *l'espace des feuilletages singuliers mesurés*. Nous présentons dans un premier temps ces deux espaces.

4.1.1. Espace de Teichmüller

Nous définissons ici l'espace de Teichmüller ainsi que l'action du groupe modulaire sur cet espace. On pourra consulter [FM] pour davantage d'informations.

Définition 4.5. Une surface admet une métrique hyperbolique s'il existe une métrique riemannienne complète, d'aire finie, de courbure sectionnelle constante égale à -1 et tels que les éventuels bords de S soient totalement géodésiques. Une surface munie d'une métrique hyperbolique fixée est une *surface hyperbolique*.

Théorème 4.6. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,b,n}$. Si $\chi(S) < 0$, alors S admet une métrique hyperbolique.*

Un des intérêts des surfaces hyperboliques provient du fait qu'il existe un représentant remarquable des classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles :

Proposition 4.7. [FM, Proposition 1.3, Corollaire 1.9] Soit S une surface hyperbolique. Il existe dans chaque classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles un unique représentant géodésique. Par ailleurs, si α et β sont les représentants géodésiques respectifs de a et b , alors α et β sont en position minimale.

Par ailleurs, par la proposition suivante, nous avons des représentants remarquables d'une classe d'isotopie de $\text{Mod}(S)$:

Proposition 4.8. [FM, Theorem 1.13] Soit S une surface compacte. Tout homéomorphisme de S est isotope à un difféomorphisme de S .

Nous présentons maintenant l'objet d'étude de cette section, à savoir l'espace de Teichmüller.

Définition 4.9. 1. Soit S une surface homéomorphe à S_g admettant une métrique hyperbolique. Une *structure hyperbolique* sur S est un difféomorphisme $\phi: S \rightarrow X$ où X est une surface munie d'une métrique hyperbolique complète, d'aire finie ayant des bords totalement géodésiques. Le couple (X, ϕ) est alors une *surface hyperbolique marquée*.

2. Deux structures hyperboliques $\phi_1: S \rightarrow X_1$ et $\phi_2: S \rightarrow X_2$ sur S sont homotopes s'il existe une isométrie $I: X_1 \rightarrow X_2$ telle que $I \circ \phi_1: S \rightarrow X_2$ et $\phi_2: S \rightarrow X_2$ soient homotopes (ici on ne suppose pas que les homotopies fixent le bord).

Autrement dit, le diagramme suivant commute modulo homotopie :

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \phi_1 \swarrow & & \searrow \phi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{I} & X_2 \end{array}$$

3. L'espace de Teichmüller de S , noté $\text{Teich}(S)$, est l'ensemble des structures hyperboliques de S modulo homotopie :

$$\text{Teich}(S) = \{\text{structures hyperboliques de } S\} / \text{homotopie}.$$

Remarque 4.10. Une autre définition de $\text{Teich}(S)$ existe, qui a l'avantage de ne pas utiliser de surface auxiliaire. En effet, toute structure hyperbolique $\phi: S \rightarrow X$ induit une métrique hyperbolique sur S par tiré en arrière de la métrique hyperbolique de X . Nous pouvons ainsi définir $\text{Teich}(S)$ comme étant l'ensemble des classes d'isotopie de métriques hyperboliques sur S :

$$\text{Teich}(S) = \text{HypMet}(S) / \text{Diff}_0(S)$$

où l'action de $\text{Diff}_0(S)$ (la composante neutre du groupe des difféomorphismes de S) se fait par tiré en arrière.

Soit $\mathcal{X} \in \text{Teich}(S)$, et (X, ϕ) un représentant de \mathcal{X} . Soit \mathcal{S} l'ensemble des classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles de S . Nous définissons une fonction longueur

$$\ell_{\mathcal{X}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui à \mathcal{X} associe la longueur de l'unique géodésique dans X dans la classe d'isotopie de $\phi(c)$ garantie par la proposition 4.7. Cela ne dépend pas du représentant de \mathcal{X} choisi car tous les couples (X_1, ϕ_1) et (X_2, ϕ_2) dans la classe d'équivalence \mathcal{X} sont tels que X_1 et X_2 sont isométriques. Ainsi, les longueurs des géodésiques sont conservées. Nous définissons ainsi une fonction longueur

$$\begin{aligned} \ell: \text{Teich}(S) &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}} \\ \mathcal{X} &\mapsto \ell_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Théorème 4.11. [FM, Theorem 10.6] *La fonction $\ell: \text{Teich}(S) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ est une injection.*

En munissant $\text{Teich}(S)$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$, l'image de $\text{Teich}(S)$ par ℓ est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} .

Le groupe modulaire $\text{Mod}(S)$ agit naturellement sur $\text{Teich}(S)$ par pré-composition : Si $\mathcal{X} \in \text{Teich}(S)$ est la classe d'équivalence de (X, ϕ) et si $f \in \text{Mod}(S)$ est la classe d'équivalence de $\psi \in \text{Diff}^+(S)$ (un tel représentant est garanti par la proposition 4.8), alors l'action de f sur \mathcal{X} est donnée par :

$$f \cdot \mathcal{X} = [(X, \phi \circ \psi^{-1})].$$

L'élément $[(X, \phi \circ \psi^{-1})]$ est bien défini car des structures hyperboliques isotopes définissent le même point de $\text{Teich}(S)$. En effet, si ψ' est un difféomorphisme isotope à ψ , alors, comme $\text{id}: X \rightarrow X$ est une isométrie, on voit que $\phi \circ \psi^{-1}$ est homotope à $\phi \circ \psi'^{-1}$. Donc $(X, \phi \circ \psi^{-1})$ et $(X, \phi \circ \psi'^{-1})$ sont équivalents.

Le théorème suivant nous montre que l'espace de Teichmüller est un espace privilégié dans l'étude de $\text{Mod}(S)$:

Théorème 4.12. [FM, Proposition 11.17, Theorem 11.19] *Teich(S) admet une distance, dont la topologie est compatible avec celle décrite précédemment, faisant de Teich(S) un espace métrique géodésique (i.e. tel que tout couple de points peut être relié par une géodésique) et telle que l'action de Mod(S) sur Teich(S) se fasse par isométrie.*

Une distance vérifiant les hypothèses du théorème est la *distance de Teichmüller* (voir [FM, section 11.8]).

Nous avons par ailleurs le théorème suivant, dû à Thurston ([FLP]) :

Théorème 4.13. [FLP, Proposition 7.12] *Soit $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ le projectivisé de $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$. L'application $\text{Teich}(S) \rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ est un plongement topologique d'image compacte.*

Ceci donne une compactification de $\text{Teich}(S)$ appelée compactification de Thurston, dont nous décrivons maintenant le bord.

4.1.2. Feuilletages singuliers mesurés

Définition 4.14. Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,b,n}$, avec $g \geq 0$. Un *feuilletage singulier* \mathcal{F} sur S est une décomposition de S en une union disjointe de sous-ensembles de S , appelées *les feuilles* de \mathcal{F} , et une union finie de points, appelés les points singuliers de \mathcal{F} , tels que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout point $p \in S \setminus \partial S$ qui n'est pas singulier, il existe une carte locale C^∞ d'un voisinage de p vers \mathbb{R}^2 qui envoie les feuilles sur les segments horizontaux. De plus, les fonctions de transition sont de la forme $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y))$. Ainsi, les fonctions de transition envoient lignes horizontales sur lignes horizontales.
2. si $b > 0$ et si $p \in \partial S$ n'est pas un point singulier, il existe une carte locale C^∞ d'un voisinage V de p qui envoie $\partial S \cap V$ soit sur un segment vertical, soit sur un segment horizontal.
3. Pour chaque point singulier $p \in S$, il existe une carte locale C^∞ d'un voisinage de p vers \mathbb{R}^2 qui envoie les feuilles sur les ensembles niveau d'un point selle avec k branches, $k \geq 3$.
4. Si $n > 0$, alors tout point marqué de S est un point singulier du feuilletage. On suppose de plus qu'un point marqué est un point selle avec k branches, $k = 1$ ou $k \geq 3$.
5. Si $b > 0$, et si $p \in \partial S$ est un point singulier, il existe une carte locale C^∞ d'un voisinage de p vers \mathbb{R}^2 qui envoie les feuilles sur les ensembles niveau d'un point selle avec k branches, où $k \geq 3$ si la composante de bord contenant p est une feuille, et où $k \geq 2$ si la composante de bord contenant p n'en est pas une.

Remarque 4.15. *S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous parlerons de feuilletage pour évoquer un feuilletage singulier.*



Figure 24: Un feuilletage avec un point singulier à 3 branches (à gauche) et un feuilletage avec un point singulier avec 4 branches (à droite).

Définition 4.16. 1. Soit \mathcal{F} un feuilletage singulier sur S . Un arc α est dit *transverse* à \mathcal{F} si α ne rencontre pas les points singuliers de \mathcal{F} et si, pour tout point $x \in S$

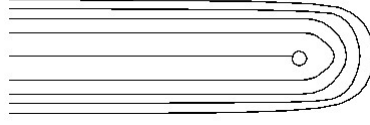


Figure 25: Une singularité avec une branche au niveau d'un point singulier.

contenu dans α , pour toute feuille L de \mathcal{F} contenant x , α et L s'intersectent au point x de manière transverse. Ici les arcs ne sont plus supposés avoir leurs extrémités dans le bord ou les points marqués de S .

2. Soient $\alpha: [0, 1] \rightarrow S$ et $\beta: [0, 1] \rightarrow S$ deux arcs de S transverse à \mathcal{F} . Une isotopie préservant les feuilles entre α et β est une application continue $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$ telle que
 - $H([0, 1] \times \{0\}) = \alpha$ et $H([0, 1] \times \{1\}) = \beta$;
 - pour tout $t \in [0, 1]$, $H([0, 1] \times \{t\})$ est transverse à \mathcal{F} ;
 - pour tout $s \in [0, 1]$, $H(\{s\} \times [0, 1])$ est contenu dans une unique feuille.
3. Une *mesure transverse* μ d'un feuilletage singulier \mathcal{F} est une fonction associant à chaque arc transverse à \mathcal{F} un nombre réel positif tel que μ soit invariant par isotopie préservant les feuilles et soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.
4. Un *feuilletage singulier mesuré* (ou feuilletage mesuré) (\mathcal{F}, μ) sur une surface S est un feuilletage singulier \mathcal{F} muni d'une mesure transverse μ .
5. Deux feuilletages mesurés sont transverses s'ils ont les mêmes singularités et si leurs feuilles sont transverses.

Le groupe $\text{Homeo}(S)$ agit naturellement sur l'ensemble des feuilletages mesurés. En effet, soit $\phi \in \text{Homeo}(S)$ et (\mathcal{F}, μ) un feuilletage mesuré sur S . Alors l'action de ϕ sur (\mathcal{F}, μ) est donnée par :

$$\phi \cdot (\mathcal{F}, \mu) = (\phi(\mathcal{F}), \phi_*(\mu)),$$

où $\phi_*(\mu)(\gamma) = \mu(\phi^{-1}(\gamma))$ avec γ un arc transverse à \mathcal{F} .

Définition 4.17. 1. Deux feuilletages mesurés (\mathcal{F}, μ) et (\mathcal{F}', μ') sont isotopes s'il existe une isotopie $H: [0, 1] \rightarrow \text{Homeo}^+(S)$ entre l'identité et un homéomorphisme de S telle que :

$$H(1) \cdot (\mathcal{F}, \mu) = (\mathcal{F}', \mu').$$

2. L'ensemble des feuilletages mesurés $\mathcal{MF}(S)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de feuilletages mesurés, où la relation d'équivalence est engendrée par les isotopies de feuilletages mesurés et par les opérations de Whitehead (voir figure 26).



Figure 26: Une opération de Whitehead (en rouge des feuilles partant de singularités du feuilletage).

Remarque 4.18. Si (\mathcal{F}, μ) est un feuilletage mesuré, on notera $[(\mathcal{F}, \mu)]$ sa classe d'équivalence dans $\mathcal{MF}(S)$.

Nous obtenons ainsi une action naturelle de $\text{Mod}(S)$ sur $\mathcal{MF}(S)$: si $f \in \text{Mod}(S)$ ayant pour représentant $\phi \in \text{Homeo}^+(S)$, et $[(\mathcal{F}, \mu)] \in \mathcal{MF}(S)$, alors l'action de f sur $[(\mathcal{F}, \mu)]$ est donnée par :

$$f \cdot [(\mathcal{F}, \mu)] = [(\phi(\mathcal{F}), \phi_*(\mu))].$$

Comme dans le cas de l'espace de Teichmüller, nous construisons une application $\mathcal{MF}(S) \rightarrow \mathbb{R}^S$.

Soit $[\alpha]$ la classe d'isotopie d'une courbe fermée simple essentielle et $[(\mathcal{F}, \mu)]$ un élément de $\mathcal{MF}(S)$. On pose $\mu(\alpha) = \sup(\sum \mu(\alpha_i))$, où les α_i sont une collection finie d'arcs de α disjoints et transverses à \mathcal{F} et le suprémum se calcule sur toutes les sommes de ce type. On pose alors :

$$I(\mathcal{F}, \mu ; [\alpha]) = \inf_{\delta \in [\alpha]} \mu(\delta).$$

Cette formule est clairement invariante par isotopie mais également par équivalence de Whitehead. En effet, si (\mathcal{F}, μ) et (\mathcal{F}', μ') se déduisent l'un de l'autre par une opération de Whitehead, alors pour toute courbe fermée simple γ et pour tout ϵ , il existe une courbe γ' isotope à γ vérifiant $|\mu(\gamma) - \mu'(\gamma')| < \epsilon$ (voir figure 27).

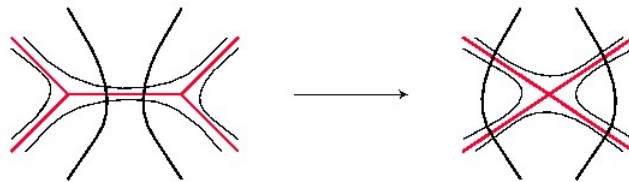


Figure 27: Deux courbes dans la même classe d'isotopie dont les mesures sont les mêmes pour les feuilletages qui diffèrent par des opérations de Whitehead.

Nous obtenons ainsi une application

$$I_* : \mathcal{MF}(S) \rightarrow \mathbb{R}_+^S \\ (\mathcal{F}, \mu) \mapsto I(\mathcal{F}, \mu ; \cdot).$$

Proposition 4.19. [FLP, Proposition 6.15] L'application $I_*: \mathcal{MF}(S) \rightarrow \mathbb{R}_+^S$ est une injection. De plus, en donnant à $\mathcal{MF}(S)$ la topologie induite par \mathbb{R}^S , $\mathcal{MF}(S) \cup \{0\}$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} .

Ainsi, si l'on note $\mathcal{PMF}(S)$ le projectivisé de $\mathcal{MF}(S)$, alors $\mathcal{PMF}(S)$ est homéomorphe à S^{6g-7} . Cette proposition rend également compte qu'un élément de $\mathcal{MF}(S)$ est entièrement déterminé par la mesure des classes d'isotopie de courbes fermées simples. Ceci justifie le fait que nous noterons parfois les éléments de $\mathcal{MF}(S)$ uniquement par une mesure transverse μ . Nous avons le théorème suivant, qui combine l'espace de Teichmüller et $\mathcal{PMF}(S)$:

Théorème 4.20. [FLP, Theorem 8.7] Les images de $\text{Teich}(S)$ et $\mathcal{PMF}(S)$ dans $\mathbb{P}\mathbb{R}^S$ sont disjointes. De plus, si S est homéomorphe à S_g avec $g \geq 2$, $\text{Teich}(S) \cup \mathcal{PMF}(S)$ est homéomorphe à une boule fermée de dimension $6g - 6$.

Nous donnons à présent une description des feuilletages mesurés en termes de feuilletage de sous-surfaces de S . Nous expliquons tout d'abord comment obtenir un feuilletage mesuré de S à partir d'un feuilletage d'une sous-surface.

Soit S_0 une sous-variété de dimension 2 de S avec un éventuel bord telle que $S - S_0$ n'ait aucune composante contractile. Soit Σ une épine de $\overline{S - S_0}$, c'est-à-dire un complexe simplicial de dimension 1 contenu dans $\overline{S - S_0}$ sur lequel $\overline{S - S_0}$ se rétracte par déformation. On suppose de plus que Σ n'a pas de sommet de valence 1 (on admettra qu'on peut toujours se ramener à ce cas).

Il existe alors une application surjective $j: S_0 \rightarrow S$ telle que :

- j est une immersion C^∞ par morceaux ;
- $j|_{\text{int}(S_0)}$ est un difféomorphisme vers $S - \Sigma$;
- $j(\partial S_0 - \partial S) = \Sigma$;
- j est égal à l'identité en-dehors d'un voisinage régulier de $\partial S_0 - \partial S$.

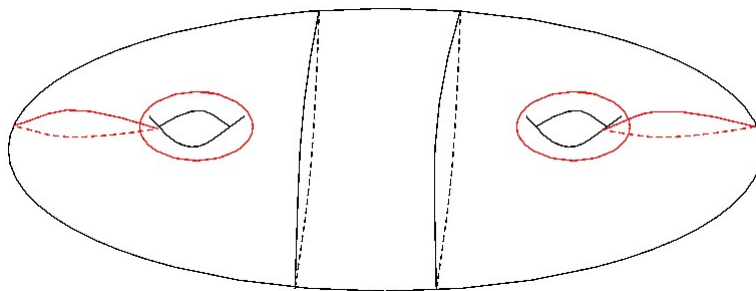


Figure 28: Un exemple d'épine (en rouge) pour une surface S_0 dans $S_{2,0}$.

Soit (\mathcal{F}_0, μ_0) un feuilletage mesuré sur S_0 tel que toutes les composantes de $\partial S_0 - \partial S$ soient des feuilles fermées ou une union de singularités et de feuilles reliant les singularités (on dit que $\partial S_0 - \partial S$ est un *ensemble invariant* de \mathcal{F}_0). On pose $(\mathcal{F}, \mu) = j_*(\mathcal{F}_0, \mu_0)$. On admettra que ceci définit un feuilletage sur S tel que Σ est un ensemble invariant de \mathcal{F} . Une telle opération ne dépend, à isotopie et opération de Whitehead près, ni de j ni de l'épine choisie ([FLP, Théorème B.1]), ce qui définit une application

$$\mathcal{MF}(S_0) \rightarrow \mathcal{MF}(S).$$

Cette application est une opération *d'élargissement* de (\mathcal{F}_0, μ_0) .

Lemme 4.21. [FLP, Lemme 5.10] Soit $[(\mathcal{F}_0, \mu_0)]$ un feuilletage mesuré d'une sous-surface S_0 de S , et $(\mathcal{F}, \mu) = j_*(\mathcal{F}_0, \mu_0)$. Soit γ une courbe fermée simple essentielle de S . Alors

$$I(\mathcal{F}, \mu ; \gamma) = \inf_{\gamma' \in [\gamma]} \mu_0(\gamma' \cap S_0).$$

Nous donnons à présent un cas particulier important de feuilletages mesurés sur des sous-surfaces, à savoir celui où S_0 est un anneau. On peut voir un anneau comme étant le voisinage régulier d'une courbe fermée simple essentielle α . Soit a sa classe d'isotopie. L'anneau est feuilleté par des courbes parallèles à α et on choisit la mesure transverse de telle manière que l'épaisseur de l'anneau soit λ . Ce feuilletage est unique à isotopie près. On note λa la classe d'équivalence d'un tel feuilletage mesuré.

Proposition 4.22. Soit β une courbe fermée simple de S de classe d'isotopie b . Alors

$$I(\lambda a ; b) = \lambda i(a, b).$$

Preuve. Soit β_1 un arc de $S_0 \cap \beta$. Si β_1 relie les deux bords de S_0 , alors la mesure d'un tel arc est supérieure à λ . Si β_1 a ses deux extrémités dans un même bord, alors, par le critère du bigone, on peut réaliser une isotopie de β de manière à supprimer l'arc β_1 . Par le lemme 4.21, on obtient l'inégalité :

$$I(\lambda a ; b) \geq \lambda i(a, b).$$

L'autre inégalité s'obtient en considérant une courbe isotope à β , transverse au feuilletage et d'intersection minimale avec α . \square

La proposition précédente donne alors la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{MF}(S) \\ & \nearrow & \downarrow I_* \\ \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} & & \mathbb{R}_+^S \\ & \searrow i_* & \\ & & \mathbb{R}_+^S \end{array}$$

où i_* est l'application

$$i_*: \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \\ (\lambda, a) \mapsto (b \mapsto \lambda i(a, b)).$$

Or, i_* est injective car, d'après la remarque 2.38, pour toute classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles distinctes a et b , il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles c telle que $i(a, c) = 0$ et $i(b, c) \neq 0$. Ainsi, l'application $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{MF}(S)$ est injective. En particulier, nous pouvons identifier \mathcal{S} avec l'image de $\{1\} \times \mathcal{S}$ dans $\mathcal{MF}(S)$. Nous avons par ailleurs le résultat suivant :

Proposition 4.23. [FLP, Proposition 6.18] $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{MF}(S)$.

Définition 4.24. Soit C une union disjointe de courbes fermées simples essentielles. Soient α_i les composantes connexes de C et $\alpha_i \times [-1, 1]$ un voisinage régulier de α_i . On pose $R = S - \cup(\alpha_i \times (-1, 1))$. Soit S_0 une sous-surface de S et (\mathcal{F}_0, μ_0) un feuilletage mesuré sur S_0 . On dit que (\mathcal{F}_0, μ_0) est en forme normale par rapport à C si les conditions suivantes sont satisfaites :

- Toute composante de ∂S_0 est un ensemble invariant de \mathcal{F}_0 ;
- Pour chaque composante Q de R , soit $S_0 \cap Q = \emptyset$, soit $S_0 \cap Q = Q$. Dans le dernier cas, aucun des bords de Q n'est une feuille fermée de \mathcal{F}_0 ;
- Pour chaque α_i , soit $\alpha_i \times [-1, 1] \cap S_0 = \alpha_i \times [-1, 1]$, soit $\alpha_i \times]-1, 1[\cap S_0 = \alpha_i \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, soit $\alpha_i \times]-1, 1[\cap S_0 = \emptyset$. Dans le premier cas, les courbes $\alpha \times \{t\}$ avec $t \in [-1, 1]$ sont transversales aux feuilles. Dans le second cas, les courbes $\alpha \times \{t\}$ avec $t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sont des feuilles.

Enfin, si $\mu \in \mathcal{MF}(S)$, on dit que $\mu_0 \in \mathcal{MF}(S_0)$ est une forme normale pour μ si μ_0 est en forme normale et μ est obtenu par élargissement de μ_0 .

Proposition 4.25. [FLP, Proposition 6.9] Pour tout $\mu \in \mathcal{MF}(S)$, pour tout système de courbes fermées simples essentielles C , il existe une unique sous-surface S_0 et un unique $\mu_0 \in \mathcal{MF}(S_0)$ tels que μ_0 est en forme normale pour μ .

La proposition repose sur le fait que, pour toute courbe fermée simple $\alpha \in C$, si (\mathcal{F}, μ) est un représentant de μ et si $I(\mathcal{F}, \mu ; [\alpha]) \neq 0$, alors il existe un feuilletage mesuré (\mathcal{F}', μ') isotope à (\mathcal{F}, μ) tel que α soit transversal à \mathcal{F}' . De même, si $I(\mathcal{F}, \mu ; [\alpha]) = 0$, alors il existe un feuilletage (\mathcal{F}', μ') équivalent à (\mathcal{F}, μ) tel que α soit une feuille dans ce feuilletage. En coupant selon des anneaux autour de ces courbes, on se ramène à des surfaces de complexité plus petite, ce qui permet de conclure.

Nous définissons à présent les *feuilletages mesurés sommes*. Soit C une union disjointe de courbes fermées simples essentielles.

On définit un feuilletage mesuré somme

$$\sum_P (\mathcal{F}_P, \mu_P) + \sum_K a_k [K]$$

avec P est une composante connexe de S_C , (\mathcal{F}_P, μ_P) la classe d'équivalence d'un feuilletage mesuré sur P , K une composante connexe de C et a_k un réel positif.

Ce feuilletage est défini comme suit. Soit P une composante connexe de S_C et (\mathcal{F}_P, μ_P) la classe d'équivalence d'un feuilletage mesuré sur P . Soit $K \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ un voisinage régulier d'une composante connexe K de C . On construit un feuilletage mesuré sur $K \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tel que pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $K \times \{t\}$ est une feuille. La mesure transverse de ce feuilletage est telle que l'épaisseur de $K \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est égale à a_K .

L'union de S_C et des anneaux forme une sous-surface S_0 et l'union des feuilletages un feuilletage mesuré sur S_0 dont le feuilletage mesuré correspondant dans S est la somme décrite.

Proposition 4.26. [Iva3, Lemma 2.5] *L'application*

$$\begin{aligned} \prod_P \mathcal{MF}(P) \cup \{0\} \times \prod_K \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathcal{MF}(S) \cup \{0\} \\ ((\mathcal{F}_P, \mu_P), a_K) &\mapsto \sum_P (\mathcal{F}_P, \mu_P) + \sum_K a_k [K] \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur son image.

L'écriture de tels feuilletages en tant que somme se justifie par la propriété suivante, qui généralise l'intersection géométrique entre classes d'isotopie de courbes fermées simples :

Proposition 4.27. [Ree, Corollary 1.11] *Il existe une unique application continue*

$$i: \mathcal{MF}(S) \cup \{0\} \times \mathcal{MF}(S) \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. i est symétrique ;
2. elle coïncide avec l'intersection géométrique dans le cas des classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles ;
3. pour tous réels positifs a et b , pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{MF}(S)$,

$$i(a\mu, b\nu) = abi(\mu, \nu).$$

4. Pour tous $\mu, \nu \in \mathcal{MF}(S)$ tels que $i(\mu, \nu) = 0$, pour tout μ' (resp. ν') dont l'image dans $\mathcal{PMF}(S)$ est égale à l'image de μ (resp. ν),

$$i(\mu', \nu') = 0.$$

5. si $\mu \in \mathcal{MF}(S)$, C une collection de courbes fermées simples essentielles et disjointes, et $\nu_P \in \mathcal{MF}(P)$ où P est une composante connexe de S_C , alors :

$$i(\mu, \sum_P \nu_P) = \sum_P i(\mu, \nu_P).$$

Nous remarquons que, par unicité de i , dans le cas où $[(\mathcal{F}, \mu)] \in \mathcal{MF}(S)$ et a un classe d'isotopie de courbes fermées simples, alors $i(\mu, a) = I(\mathcal{F}, \mu ; a)$. On déduit ainsi la proposition suivante :

Proposition 4.28. *Soit $a = [\alpha]$ une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles et $\mu \in \mathcal{MF}(S)$. Soit (\mathcal{F}, μ') un représentant de μ tel que $i(\mu, a) = \mu'(\alpha)$. Alors $i(\mu, a) = 0$ si, et seulement si, μ peut s'écrire comme une somme de feuilletages*

$$\mu = \sum_P \mu_P + \lambda a$$

où P sont les composantes connexes de S_α , $\mu_P \in \mathcal{MF}(P)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. Si μ s'écrit comme une telle somme, alors

$$\begin{aligned} i(\mu, a) &= i(\sum_P \mu_P + \lambda a, a) \\ &= \sum_P i(\mu_P, a) + i(\lambda a, a) \\ &= 0 \text{ par le lemme 4.21 et la proposition 4.22.} \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, supposons que $i(\mu, a) = 0$. Soit μ_0 une forme normale pour μ par rapport au système de courbe $C = \alpha$ (un tel μ_0 existe par la proposition 4.25). Soit S_0 la sous-surface de S telle que $\mu_0 \in \mathcal{MF}(S_0)$. Le fait que $i(\mu, a) = 0$ implique que $S_0 \cap \alpha \times]-1, 1[= \alpha \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ou que $S_0 \cap \alpha \times]-1, 1[= \emptyset$. En effet, $S_0 \cap \alpha \times [-1, 1] = \alpha \times [-1, 1]$ n'est pas possible car autrement α serait transverse à \mathcal{F} , ce qui contredirait $i(\mu, a) = 0$. De ce fait, l'élargissement de μ_0 est bien de la forme :

$$j_*(\mu_0) = \mu = \sum_P \mu_P + \lambda a$$

où P sont les composantes connexes de S_α , $\mu_P \in \mathcal{MF}(P)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. □

4.1.3. Classification de Nielsen-Thurston

Nous avons désormais assez d'outils pour donner une classification des éléments de $\text{Mod}(S)$. Nous donnons les définitions des classes d'éléments de $\text{Mod}(S)$ que nous étudierons :

- Définition 4.29.**
1. Un élément f de $\text{Mod}(S)$ est dit *périodique* s'il est d'ordre fini.
 2. Un élément f de $\text{Mod}(S)$ est dit *réductible* s'il existe un simplexe non vide $\sigma \subseteq C(S)$ tel que $f(\sigma) = \sigma$. Il est dit *irréductible* sinon. Une collection de représentants de σ deux à deux disjoints est appelée un système de réduction de f .
 3. Un élément f de $\text{Mod}(S)$ est dit *pseudo-Anosov* s'il existe une paire de feuilletages mesurés transverses (\mathcal{F}^u, μ^u) et (\mathcal{F}^s, μ^s) , un nombre réel $\lambda > 1$ et un représentant F de f tels que :

$$F \cdot (\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu^u) \quad \text{et} \quad F \cdot (\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1} \mu^s).$$

Les feuilletages mesurés (\mathcal{F}^u, μ^u) et (\mathcal{F}^s, μ^s) sont alors appelés les feuilletages *stable* et *instable* de f et λ le *facteur de dilatation* de f .

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de classification de Nielsen-Thurston :

Théorème 4.30. [FM, Theorem 13.2] *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $g, n \geq 0$. Alors tout élément de $f \in \text{Mod}(S)$ est soit périodique, soit réductible, soit pseudo-Anosov. Par ailleurs, les éléments pseudo-Anosov ne sont ni périodiques, ni réductibles.*

Une preuve (due à Bers [Ber, Theorem 10]) de ce théorème repose sur une étude de l'action de $\text{Mod}(S)$ sur $\text{Teich}(S)$. En particulier, la trichotomie provient de l'étude de l'application longueur de translation :

$$\begin{aligned} \tau: \text{Mod}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \inf_{\mathcal{X} \in \text{Teich}(S)} d(\mathcal{X}, f \cdot \mathcal{X}). \end{aligned}$$

En effet, le cas périodique correspond au cas où $\tau(f) = 0$ et est réalisé. Le cas réductible correspond au cas où $\tau(f)$ n'est pas réalisé et le cas pseudo-Anosov correspond au cas où $\tau(f) > 0$ et est réalisé.

On observe par ailleurs que dans le cas où $\tau(f) = 0$ et est réalisé, alors, si on note (X, ϕ) un représentant du point fixé par f et ψ un représentant de f , on a que (X, ϕ) et $(X, \phi \circ \psi^{-1})$ sont équivalents ce qui est possible si, et seulement si, $\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}$ est isotope à une isométrie i_f de X . En tirant la métrique de X en arrière pour munir S d'une métrique hyperbolique, on voit que ψ est isotope à une isométrie I_f de S . Comme ψ préserve l'orientation, I_f la préserve également.

Or, toute isométrie de S est d'ordre fini. En effet, par le théorème d'Arzela-Ascoli, étant donné que S est compact, son groupe d'isométries est un groupe topologique compact. Par ailleurs, $\text{Isom}(S)$ est discret car un élément ϕ de $\text{Isom}(S)$ isotope à l'identité se relève en une isométrie de \mathbb{H}^2 qui reste à distance bornée de l'identité. Par la classification des isométries de \mathbb{H}^2 , ϕ est l'identité. Donc $\text{Isom}(S)$ est compact et discret, donc fini.

De ce fait, nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.31. *Tout élément périodique de $\text{Mod}(S)$ possède un représentant qui est un difféomorphisme périodique. Ce représentant peut être choisi de telle sorte qu'il soit une isométrie pour une métrique hyperbolique de S .*

Une deuxième preuve (due à Thurston [FLP, Théorème 9.16]) du théorème 4.30 repose sur l'étude de l'action de $\text{Mod}(S)$ sur $\text{Teich}(S) \cup \mathcal{PMF}(S)$. Par le théorème 4.20, $\text{Teich}(S) \cup \mathcal{PMF}(S)$ est homéomorphe à une boule. On montre alors que l'action de $\text{Mod}(S)$ sur cette boule se fait par homéomorphisme. Donc, par le théorème de Brouwer, chaque élément de $\text{Mod}(S)$ a un point fixe dans $\text{Teich}(S) \cup \mathcal{PMF}(S)$. Pour analyser les points fixes, nous avons besoin d'une définition :

Définition 4.32. Un feuilletage est dit *arationnel* s'il ne contient pas de feuille fermée.

Il existe alors quatre types de points fixes :

1. $f \cdot \mathcal{X} = \mathcal{X}$ avec $\mathcal{X} \in \text{Teich}(S)$;
2. $f \cdot \mu = \lambda\mu$ où $\mu \in \mathcal{MF}(S)$ et μ n'est pas la classe d'équivalence d'un feuilletage arationnel ;
3. $f \cdot \mu = \lambda\mu$ où $\mu \in \mathcal{MF}(S)$ est la classe d'équivalence feuilletage arationnel et $\lambda = 1$;
4. $f \cdot \mu = \lambda\mu$ où $\mu \in \mathcal{MF}(S)$ est la classe d'équivalence d'un feuilletage arationnel et $\lambda \neq 1$.

Les premier et troisième cas correspondent au cas périodique, le second cas correspond au cas réductible et le dernier cas correspond au cas pseudo-Anosov. En particulier, nous avons les propositions suivantes :

Proposition 4.33. *[FLP, Lemme 9.7] Soit $f \in \text{Mod}(S)$ tel que f fixe la classe d'équivalence d'un feuilletage arationnel. Alors f est périodique.*

Proposition 4.34. *[FLP, Lemme 9.15] Soit $f \in \text{Mod}(S)$ tel qu'il existe un réel λ tel que $\lambda > 1$ et un feuilletage arationnel μ tel que $f([\mu]) = \lambda[\mu]$. Alors f est pseudo-Anosov.*

Proposition 4.35. *[FLP, Lemme 9.17] Les feuilletages stable et instable d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont arationnels.*

La preuve du dernier cas montre également que, si $\lambda > 1$, tout feuilletage mesuré dans la classe d'équivalence de μ est le feuilletage instable d'un homéomorphisme de f , et si $\lambda < 1$, tout feuilletage mesuré dans la classe d'équivalence de μ est le feuilletage stable d'un homéomorphisme de f .

4.1.4. Propriétés des éléments pseudo-Anosov

Nous terminons cette partie par une liste de propriétés vérifiées par les éléments pseudo-Anosov. Les preuves sont consultables dans [FLP, FM, Iva3].

Nous donnons tout d'abord des propriétés des feuilletages stable et instable d'un élément pseudo-Anosov. Nous avons au préalable besoin d'une définition.

Définition 4.36. Un feuilletage est dit *uniquement ergodique* s'il existe, à un facteur réel strictement positif près, une unique mesure transverse sur ce feuilletage.

Les feuilletages uniquement ergodiques vérifient la propriété suivante :

Proposition 4.37. *[Mas, Lemma 2] Soit $\mu \in \mathcal{MF}(S)$ la classe d'équivalence d'un feuilletage uniquement ergodique. Soit $\nu \in \mathcal{MF}(S)$. Si $i(\mu, \nu) = 0$, alors il existe un réel positif a tel que $\nu = a\mu$.*

Proposition 4.38. [FLP, Théorème 12.1] *Les feuilletages stable et instable d'un homéomorphisme pseudo-Anosov sont uniquement ergodiques.*

Nous donnons maintenant un théorème sur les points fixes d'un élément pseudo-Anosov sur la compactification de Thurston :

Théorème 4.39. [FLP, Corollaire 12.4] *L'action d'un élément pseudo-Anosov f de $\text{Mod}(S)$ sur $\text{Teich}(S) \cup \mathcal{PMF}(S)$ fixe exactement deux points dans $\mathcal{PMF}(S)$, à savoir les feuilletages stable et instable $[\mu^u]$ et $[\mu^s]$ d'un représentant ϕ de f .*

Enfin, nous donnons une dernière propriété des éléments pseudo-Anosov d'une sous-surface S_0 de S .

Proposition 4.40. [Iva3, Corollary 2.16.] *Soit S_0 une sous-variété de dimension 2 de S avec un éventuel bord telle que $S - S_0$ n'ait aucune composante contractile. Soit $\mu \in \mathcal{MF}(S)$ l'image d'une classe d'équivalence d'un feuilletage stable ou instable d'un élément pseudo-Anosov de $\text{Mod}(S_0)$. Si a est la classe d'isotopie d'une composante de bord de S_0 qui est essentielle, alors pour tout $\nu \in \mathcal{MF}(S) \cup \{0\}$,*

$$i(\nu, a) \neq 0 \Rightarrow i(\nu, \mu) \neq 0.$$

En particulier, les feuilletages stable et instable d'un élément pseudo-Anosov d'une sous-surface S_0 sont d'intersection géométrique nulle avec les classes d'isotopie des bords de S_0 .

4.2. Éléments purs de $\text{Mod}(S)$

4.2.1. Le groupe $\Gamma_S(m)$

Nous pouvons voir les éléments réductibles comme des éléments "décomposables" dans le sens où ils engendrent un élément du groupe modulaire de la surface coupée le long du système de réduction. Les éléments pseudo-Anosov sont, en ce sens, des éléments "indécomposables". Nous souhaitons ainsi se ramener, quitte à découper la surface le long de courbes, à des éléments "indécomposables". Nous formalisons cette idée par la définition suivante :

Définition 4.41. Un élément f de $\text{Mod}(S)$ est dit *pur* s'il existe un représentant ϕ de f , une collection C (possiblement vide) de courbes fermées simples, essentielles, disjointes et deux à deux non-isotopes telles que ϕ est l'identité sur C et ϕ induit sur chaque composante connexe R de S_C un élément f_R de $\text{Mod}(R)$ qui est soit l'identité, soit un élément pseudo-Anosov.

Une telle collection C est un *système de réduction* pour f . Un système de réduction est dit *minimal* si nous ne pouvons pas enlever de courbe fermée simple de C sans créer de surface R dans S_C où f_R n'est ni l'identité ni pseudo-Anosov.

Les éléments purs sont ainsi des éléments plus aisés à étudier. De ce fait, quitte à étudier uniquement un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$ (ce qui ne change pas le commensurateur abstrait), nous souhaitons nous ramener à l'étude d'un groupe qui ne contient que des éléments purs. Ceci nous amène à étudier le groupe

$$\Gamma_S(m) := \ker\{\text{Mod}^*(S) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\}.$$

où $m \geq 3$ et $H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est le premier groupe d'homologie de S à coefficients dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

L'objectif de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant ([Iva3]) :

Théorème 4.42. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $\chi(S) < 0$ et $m \geq 3$. Alors tout élément de $\Gamma_S(m)$ est pur.*

Nous montrons tout d'abord un lemme combinatoire :

Lemme 4.43. *Soit f un automorphisme d'un graphe connexe fini X . Si f fixe les extrémités de X (c'est-à-dire les sommets de valence 1), et si $f_* : H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est l'identité, alors soit f est l'identité, soit X est un cycle et f une rotation.*

Preuve. Nous commençons par le cas où X est un arbre. Comme f fixe les extrémités de X , f fixe l'unique géodésique reliant deux extrémités. Or, tout sommet de X est contenu dans une géodésique reliant deux extrémités de X . Donc f fixe tous les sommets de X . De même, étant donné qu'il existe une unique géodésique reliant deux sommets, f fixe cette géodésique. Donc f fixe toutes les arêtes et est l'identité sur X .

Dans le cas général, nous souhaitons nous ramener au cas où X est un arbre, quitte à modifier X . Pour cela, soit T un arbre maximal dans X , et soient e_1, \dots, e_n les arêtes de X qui ne sont pas contenues dans T . On relie les extrémités de chaque arête e_i par l'unique géodésique g_i reliant ces points et contenue dans T . Alors $\{e_i, g_i\}$ est un cycle noté c_i . On oriente ce cycle pour obtenir un élément $[c_i] \in H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Un fait général d'homologie donne que les $[c_i]$ forment une base de $H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Montrons tout d'abord que, pour tout i , $f(c_i) = c_i$. Pour cela, soient e_{i_1}, \dots, e_{i_k} les arêtes de e_1, \dots, e_n contenues dans $f(c_i)$. On a donc que $f_*([c_i]) = \left[\sum_j a_j c_{i_j} \right]$. Or, par hypothèse, $f_*([c_i]) = [c_i]$. Ainsi, étant donné que les $[c_i]$ forment une base de $H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, nécessairement, $f(c_i)$ contient e_i et, pour tout $j \neq i$, $f(c_i)$ ne contient pas e_j . Ainsi, $f(c_i) - e_i$ est une géodésique contenue dans T et joignant les extrémités de e_i . Donc $f(c_i) - e_i = g_i$ et $f(c_i) = c_i$.

On considère alors les composantes connexes X_1, \dots, X_k de l'union des c_i . Soit X' le graphe obtenu à partir de X en contractant, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, X_i en un point. Étant donné que, pour tout i , $f(c_i) = c_i$, on a également que, pour tout i , $f(X_i) = X_i$. De ce fait, f induit un automorphisme f' sur X' qui fixe toutes les extrémités de X' . Montrons maintenant que X' est un arbre, ce qui nous permettra d'appliquer le cas précédent. X' est connexe par connexité de X . Soit c' un cycle de X' . Il se relève en un

cycle c de X . On peut choisir le relevé c de telle manière qu'il ne contienne aucun des e_i . En effet, si c contient e_i , on peut remplacer le segment contenant e_i par un segment de g_i . Comme g_i est contenu dans la même composante connexe X_j que e_i , cette modification détermine toujours un relevé de c' . c est ainsi un cycle de X ne contenant aucun des e_i . c est donc un cycle contenu dans T , ce qui contredit le fait que T est un arbre. Ainsi, X' est un arbre. Par la première partie de la preuve, f' est l'identité. De ce fait, f fixe les sommets et les arêtes qui ne sont pas dans l'union des c_i .

Examinons maintenant l'image des c_i par f . Étant donné que, pour tout i , $f_*([c_i]) = [c_i]$ et $[c_i] \neq -[c_i]$ car $m \geq 3$, on voit que, pour tout i , f ne change pas l'orientation de c_i . Ainsi, puisque, pour tout i , $f(c_i) = c_i$, f induit sur chaque c_i une rotation. De ce fait, si i est tel qu'il existe une arête qui n'est pas contenue dans $\cup c_k$ et qui est reliée à c_i , alors, nécessairement, f est l'identité sur c_i . Supposons que i soit tel que $f|_{c_i} \neq \text{id}$. Alors soit $X = c_i$, soit il existe $i \neq j$ tel que c_i intersecte c_j . Dans ce cas, $c_i \cap c_j = g_i \cap g_j$. Or, $g_i \cap g_j$ est contenu dans T , donc est une géodésique. Par le fait que $f(c_i) = c_i$ et $f(c_j) = c_j$, on a également $f(c_i \cap c_j) = c_i \cap c_j$. Or f est une rotation sur chaque c_k , donc, nécessairement, f est l'identité sur $c_i \cap c_j$ et, par extension, f est l'identité sur c_i et c_j . Donc $f = \text{id}$. \square

Théorème 4.44. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ telle que $\chi(S) < 0$. Soit \tilde{C} un simplexe de $C(S)$, C une réalisation de ce simplexe. Soit $F: S \rightarrow S$ un difféomorphisme. Si $F(C) = C$ et $F_*: H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est égal à l'identité, alors F fixe toutes les composantes de C et de S_C et préserve l'orientation des composantes connexes de C et de S .*

Preuve. Soit X le graphe dont les sommets sont les composantes connexes de S_C et dont les arêtes sont les composantes connexes de C . Comme $F(C) = C$, F induit un automorphisme f sur X . Il existe également une application continue $p: S \rightarrow X$ telle que l'inverse du milieu de chaque arête soit la composante connexe de C correspondant à l'arête. Cette condition implique que p est unique à homotopie près. On a alors, par les définitions des objets, que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{F} & S \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Par ailleurs, $p_*: H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjectif. En effet, toute courbe fermée de X se relève en une courbe fermée de S : il suffit de prendre une courbe fermée qui passe par les composantes connexes de S_C et de C correspondantes. Ainsi, comme $F_* = \text{id}$, par le diagramme commutatif, $f_*: H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est l'identité. Montrons maintenant que f fixe les extrémités de X , ce qui nous permettra d'appliquer le lemme 4.43.

Pour cela, on montre tout d'abord que F préserve l'orientation de S et fixe les points marqués de S . Soient donc x_1, \dots, x_n les points marqués de S , et, pour chaque

$i \in \{1, \dots, n\}$, soit b_i le bord d'un disque épointé contenant x_i . On suppose par ailleurs que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $b_i \cap b_j = \emptyset$. Alors, par les théorèmes de van Kampen et d'Hurewicz, on voit que les classes d'homologie $[b_1], \dots, [b_n]$ sont telles que $\sum [b_i] = 0$. Par ailleurs, il existe une unique telle relation entre les $[b_i]$. Maintenant, comme $\chi(S) < 0$, $g \geq 1$ ou $g \geq 0$ et $n \geq 3$. Nous examinons les différents cas.

Si $g \geq 1$, alors F préserve l'orientation de S car $F_* = \text{id}$, $m \geq 3$ et tout point p de S peut être vu comme point d'intersection de deux courbes non séparantes (donc leurs classes d'homologie respectives sont non-triviales et préservées par F). Si $n = 1$, alors, comme $F_*([b_1]) = [b_1]$, on a que $F(x_1) = x_1$. Si $n = 2$, et si $F(x_1) = x_2$, alors $F_*([b_1]) = [b_2] = [b_1]$. Or, $[b_1] + [b_2] = 0$, donc $[b_2] = [b_1] = -[b_1]$, ce qui n'est pas possible car nous avons supposé $m \geq 3$. Donc $F(x_1) = x_1$ et $F(x_2) = x_2$.

Si $n \geq 3$, et si $F(x_i) = x_j$ pour $i \neq j$, alors, par le même raisonnement, nous aurons $[b_i] - [b_j] = 0$, ce qui contredit le fait que l'unique relation entre les $[b_k]$ est $\sum [b_k] = 0$. Donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $F(x_i) = x_i$. Enfin, comme $m \geq 3$ et que, pour tout i , $F_*([b_i]) = [b_i]$, F fixe l'orientation des courbes b_i .

Montrons maintenant que F fixe l'orientation de S dans le cas où $g = 0$. Pour tout point p de S , il existe deux entiers $k, k' \in \{1, \dots, n\}$ et des courbes β_k et $\beta_{k'}$ telles que la classe d'homologie de β_k (resp. $\beta_{k'}$) est $[b_k]$ (resp. $[b_{k'}]$) et telles que $\beta_k \cap \beta_{k'} = \{p\}$. Donc, puisque, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $F_*([b_i]) = [b_i]$, F préserve l'orientation de S .

Montrons maintenant que f fixe les extrémités de X . Soit v une extrémité de X , correspondant à une composante connexe R de S_C . Si R contient un point marqué de S , alors $F(R) = R$ car F fixe tous les points marqués de S , d'où $f(v) = v$. Sinon, le bord de R contient une composante connexe C_1 de C . Cette composante connexe est unique car v est une extrémité de X . Comme $[C_1] \in \mathcal{S}$, C_1 est essentielle. Donc, comme R n'a pas de point marqué de S par hypothèse, le genre de R est plus grand que 1. De ce fait, $\dim H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \geq 2$ et l'application naturelle $H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est injective (car $H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est engendré par les classes d'homologie de courbes fermées simples autour des tores et par $[C_1]$, et toutes ces classes d'homologies sont distinctes dans $H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$). Pour les mêmes raisons, l'application naturelle $H_1(F(R), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est injective. Ainsi, si $F(R) \neq R$, alors $F(R) \cap R = \emptyset$ ou $F(R) \cap R = C_1$, donc $H_1(F(R), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cap H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \emptyset$ ou $H_1(F(R), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cap H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = [C_1]$. Or, l'image de F_* est incluse dans $H_1(F(R), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Ceci contredit le fait que $F_* = \text{id}$ et que $\dim H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \geq 2$. Donc $F(R) = R$ et $f(v) = v$.

Par le lemme 4.43, $f = \text{id}$ ou X est un cycle et f une rotation. Si nous étions dans le deuxième cas, chaque composante connexe de S_C aurait deux bords, et, par un raisonnement identique à celui fait précédemment, aucune composante connexe de S_C n'aurait de point marqué. Toujours par le même raisonnement que précédemment, le genre de chaque composante connexe de S_C ne peut être plus grand que 1 car cela contredirait $F_* = \text{id}$. Donc chaque composante de S_C est un anneau et S est un tore. Ceci contredirait $\chi(S) < 0$.

Donc $f = \text{id}$ et F fixe toutes les composantes connexes de C . Il reste à prouver que F préserve l'orientation des composantes connexes de C . Le fait que $F_* = \text{id}$ implique que les orientations de toutes les composantes connexes non séparantes de C sont préservées.

Enfin, le fait que $F_* = \text{id}$ et que F préserve l'orientation de S implique que F préserve l'orientation des composantes connexes séparantes de C . En effet, toute courbe séparante est intersectée de manière transverse par une courbe non séparante dans le cas où $g \geq 1$. Si $g = 0$, alors les classes d'homologie des composantes de C sont engendrées par les classes d'homologie des $[b_i]$, où les b_i sont les bords de disques épointés autour des points marqués x_i . Or, comme prouvé précédemment, les classes d'homologie des b_i sont fixées par F_* . Donc F préserve l'orientation de toutes les courbes de C et le résultat est prouvé. \square

Ainsi, si un élément de $\Gamma_S(m)$ fixe un simplexe Δ de dimension k de $C(S)$ avec $k \geq 1$, il fixe en fait tous les simplexes de dimension 0 de Δ . Ce résultat va ainsi nous permettre de montrer que $\Gamma_S(m)$ ne contient pas d'élément périodique. La preuve reposant sur des arguments géométriques, nous donnons tout d'abord un lemme de géométrie riemannienne :

Lemme 4.45. *[FM, Lemma 12.4] Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ telle que $\chi(S) < 0$. Pour tout réel strictement positif D , pour toute métrique hyperbolique ρ , l'ensemble des géodésiques fermées pour ρ de longueur inférieure ou égale à D est fini.*

Théorème 4.46. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ telle que $\chi(S) < 0$. Soit $F: S \rightarrow S$ un difféomorphisme périodique. Si $F \neq \text{id}$, alors $F_*: H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est non triviale.*

Preuve. D'après la proposition 4.31, quitte à changer F dans sa classe d'isotopie (ce qui ne change pas F_*), il existe une métrique hyperbolique sur S telle que F soit une isométrie. Le problème est ainsi de montrer que toute isométrie d'une surface hyperbolique S induisant l'identité en homologie est en fait l'identité. Nous distinguons deux cas, selon le fait que S a des points marqués ou non. Dans le cas où S a des points marqués $\{x_1, \dots, x_n\}$ on considère, pour tout i , le bord b_i d'un disque épointé contenant x_i . On suppose par ailleurs que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $b_i \cap b_j = \emptyset$. Une des composantes connexes de $S_{\cup_{i=1}^n b_i}$ est une surface S' homéomorphe à $S_{g,n,0}$ et les autres sont des disques épointés. Comme le groupe modulaire d'un disque épointé est trivial, on transfère ainsi le problème d'une surface avec des points marqués vers une surface avec des bords. Soit F' l'image de F dans $\text{Mod}(S')$ (qui est bien définie car, pour tout i , F fixe la classe d'homologie de b_i).

Affirmation : Quitte à changer F' dans sa classe d'isotopie, il existe une métrique sur $S_{\cup_{i=1}^n b_i}$ telle que les bords de S' pour cette métrique soient totalement géodésiques et telle que F' est une isométrie pour cette métrique.

En effet, soit dS le double de S , c'est-à-dire la surface où l'on a collé deux copies de S le long des bords correspondant. Soit dF' l'application de dS correspondant à F' . Soit ι l'involution canonique de dS . On fixe une métrique hyperbolique g sur dS . Soit g' la métrique :

$$g' := \frac{1}{|\langle dF', \iota \rangle|} \sum_{h \in \langle dF', \iota \rangle} h^* g.$$

Pour cette métrique, dF' est une isométrie. De ce fait, la restriction de dF' à S' , qui est égale à F' , est une isométrie. De plus, puisque ι est une isométrie, les bords de S' sont totalement géodésiques.

Ainsi, nous pouvons considérer des surfaces S avec ou sans bord, sans point marqué et telles que F est une isométrie pour une métrique fixée.

Si S n'a pas de bord, soit γ une géodésique dans S de longueur minimale. Une telle géodésique existe par le lemme 4.45. Montrons tout d'abord que soit $F(\gamma) = \gamma$, soit $F(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. En effet, si $F(\gamma)$ intersecte γ une seule fois, alors, par principe de changement de coordonnées (c.f. proposition 2.18), il existe un homéomorphisme de S dans lui-même envoyant γ et $F(\gamma)$ sur deux courbes dont les classes d'homologie sont distinctes et sont contenues dans une base de $H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, ce qui contredit $F_* = \text{id}$. Si $F(\gamma)$ intersecte γ plus de deux fois, alors les points d'intersection divisent γ en plusieurs intervalles. On choisit alors un intervalle de plus petite longueur, que l'on note γ_1 . De même, γ_1 divise $F(\gamma)$ en deux intervalles, et on note δ_1 un intervalle de plus petite longueur. Alors, par les choix de γ_1 et δ_1 , la longueur $\ell(\gamma_1)$ de γ_1 est telle que $\ell(\gamma_1) \leq \frac{1}{2}\ell(\gamma)$, et celle de δ_1 est telle que $\ell(\delta_1) \leq \frac{1}{2}\ell(F(\gamma))$. De plus, $\gamma_1 \cup \delta_1$ est une courbe fermée simple essentielle car γ et $F(\gamma)$ sont des géodésiques et donc ne forme pas de bigone par la proposition 4.7. Enfin, $\gamma_1 \cup \delta_1$ a des angles non nuls en les $\gamma_1 \cup \delta_1$ car $F(\gamma)$ et γ s'intersectent transversalement (car deux géodésiques de S s'intersectent de manière transverse). De ce fait, la géodésique dans la classe d'isotopie de $\gamma_1 \cup \delta_1$ est de longueur strictement plus petite que γ , ce qui contredit le choix de γ .

Donc $F(\gamma) = \gamma$ ou $F(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$. Soit k l'ordre de F . On pose $C = \gamma \cup F(\gamma) \cup \dots \cup F^{k-1}(\gamma)$. Par le paragraphe précédent, C est une union de courbes fermées simples essentielles disjointes. Par le théorème 4.44, étant donné que $F(C) = C$, $F(\gamma) = \gamma$. Par ailleurs, F fixe les composantes connexes de S_γ . En étudiant l'image de F dans $\text{Homeo}(S_\gamma)$, on se ramène au cas des surfaces à bord et sans point marqué. En effet, si $F|_{S_\gamma} = \text{id}_{S_\gamma}$, alors F est isotope à une puissance d'un twist de Dehn autour de γ par le corollaire 2.34. Mais, les twists de Dehn sont des éléments d'ordre infini par la proposition 2.35. De ce fait, comme F est périodique, $F = \text{id}_S$. Nous sommes ainsi ramenés au cas des surfaces à bord.

Si S est une surface à bord, on considère cette fois des arcs géodésiques essentiels et de longueur minimale. Ces arcs géodésiques existent car, par la formule de la variation première, un arc α réalisant la longueur minimale entre deux bords est orthogonal aux bords de S qu'il relie. Donc, en considérant dS le double de S , l'arc doublé $d\alpha$ est une géodésique de longueur deux fois celle de γ . De ce fait, comme, par le lemme 4.45, l'ensemble des longueurs des géodésiques d'une surface est discret, il existe dans dS une géodésique fermée $d\gamma$ de longueur minimale intersectant deux fois l'union D des courbes fermées simples essentielles de dS correspondant aux bords de S . L'arc doublé $d\gamma$ induit alors dans S un arc géodésique essentiel de longueur minimale.

Comme pour le cas d'une surface sans bord, nous souhaiterions montrer que $F(\gamma) = \gamma$. Cependant, le théorème 4.44 ne s'applique que pour des courbes. Pour pallier ce problème, on regarde encore une fois le double dS de S . $d\gamma$ est ainsi une courbe de longueur minimale parmi les courbes intersectant deux fois D . Soit dF l'application induite par

F sur dS . Étant donné que dF est induite par un difféomorphisme de S , on observe que dF envoie géodésique fermée intersectant D sur géodésique fermée intersectant D . On peut donc considérer, par le lemme 4.45, une géodésique de longueur minimale de l'ensemble des géodésiques de dS intersectant D . Donc, par le même raisonnement que pour le cas où S n'a pas de bord, $dF(d\gamma) = d\gamma$ ou $dF \cap d\gamma = \emptyset$. Pour appliquer le théorème 4.44, il suffit donc de montrer que $dF_* : H_1(dS, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(dS, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est l'identité. Or, $H_1(dS, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est engendré par deux copies de $H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et par les classes d'homologie de courbes intersectant un nombre pair de fois D . Ces courbes intersectant D sont en fait engendrés par des arcs de S que l'on colle le long de D . Ainsi, les classes d'homologie de courbes intersectant un nombre pair de fois D sont engendrées par $H_1(S, \partial S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Ainsi, étant donné que $F_* = \text{id}$, $dF_* = \text{id}$. On peut donc appliquer le théorème 4.44 ($\chi(dS) < 0$ car $\chi(S) < 0$) et obtenir que $dF(d\gamma) = d\gamma$, puis que $F(\gamma) = \gamma$.

Par ailleurs, le théorème 4.44 donne également que F préserve l'orientation de γ . Donc, si p est l'une des extrémités de γ , et si v est le vecteur vitesse de γ au point p , on voit que $T_p F(v) = v$. Par ailleurs, F fixe les bords de S contenant les extrémités de γ . Comme les bords de S sont des géodésiques et que F est une isométrie, on voit également que F préserve le vecteur vitesse du bord. En particulier, $T_p F = \text{id}$. Ainsi, par les propriétés de l'exponentielle, et comme la surface est connexe, on obtient que $F = \text{id}$. \square

Nous étendons également ce résultat au cas où la surface est un tore, car nous en aurons besoin dans les cas de découpage de surface.

Lemme 4.47. *Soit T un tore et $F : T \rightarrow T$ un difféomorphisme périodique. Si $F \neq \text{id}_T$, alors $F_* : H_1(T, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est non triviale.*

Preuve. Ceci provient du fait que $\text{Mod}(T) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, que $\text{Aut}(H_1(T, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et que $\ker(\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ est sans torsion pour $m \geq 3$. En effet, soit $A \in \ker(\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ un élément périodique. Alors $A = \begin{pmatrix} am + 1 & bm \\ cm & dm + 1 \end{pmatrix}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Or,

$$\begin{aligned} A \text{ est elliptique} &\Leftrightarrow |\text{tr} A| < 2 \\ &\Leftrightarrow -2 < (a + d)m + 2 < 2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{m} < a + d < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si $m \geq 4$, comme $a + d \in \mathbb{Z}$, on aurait que $-1 < a + d < 0$, d'où une contradiction. Donc $m = 3$ et $a = -(d + 1)$. Donc $A = \begin{pmatrix} -(d + 1)m + 1 & bm \\ cm & dm + 1 \end{pmatrix}$. Or, $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, donc

$$\det(A) = (-3(d + 1) + 1)(3d + 1) - 9bc = 1.$$

Ceci implique que $-d^2 - d - bc = \frac{1}{3}$, ce qui n'est pas possible car $-d^2 - d - bc \in \mathbb{Z}$.

En conséquence, nous avons $A = \text{id}$ et $\ker(\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ est sans torsion. \square

Corollaire 4.48. *Soit S une surface homéomorphe à $S_{g,n}$ avec $\chi(S) < 0$ ou S homéomorphe à un tore. Alors $\Gamma_S(m)$ est sans torsion pour $m \geq 3$.*

Preuve. Par la proposition 4.31, tout élément d'ordre fini de $\text{Mod}(S)$ est réalisé par un difféomorphisme périodique. Par le théorème 4.46 et le lemme 4.47, on obtient le résultat. \square

Lemme 4.49. *Soit $F: S \rightarrow S$ un difféomorphisme et C une réalisation d'un simplexe de $C(S)$ avec toutes les courbes deux à deux en position minimale. Si $F(C) = C$ et si $F_*: H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est l'identité, alors F fixe toutes les composantes connexes de S_C et, pour chaque composante connexe R de S_C , l'application $F_R: R \rightarrow R$ induite par F est soit isotope à l'identité soit isotope à un difféomorphisme d'ordre infini.*

Preuve. Le fait que F fixe toutes les composantes connexes de S_C invariante provient du théorème 4.44. Soit R une composante connexe de S_C avec k bords. Supposons donc que F_R soit isotope à un difféomorphisme périodique E . Si α est une courbe fermée contenue dans R , alors $\iota(E(\alpha))$ est isotope à $F(\iota(\alpha))$ car F_R est isotope à E . Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \xrightarrow{E_*} & H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ \iota_* \downarrow & & \downarrow \iota_* \\ H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) & \xrightarrow{F_*} & H_1(S, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \end{array}$$

Nous ne pouvons pas appliquer directement les propositions 4.46 et 4.47 car nous ne pouvons pas dire *a priori* que E_* est l'identité. En effet, nous créons en découpant la surface de nouveaux bords, ce qui pourrait changer les classes d'homologie des courbes. Pour palier à ce problème, nous allons "retirer" les bords de R . Nous distinguons plusieurs cas selon le genre de R .

Si le genre de R est plus grand que 1, soit R' la surface obtenue en collant des disques au bords de R . Soit $E': R' \rightarrow R'$ une extension de E dans R' . On peut supposer, quitte à changer E' dans sa classe d'isotopie, que E' fixe un point p_i ($i \leq k$) de chaque disque rajouté. Montrons maintenant que E'_* est l'identité. Soit $\iota: R \hookrightarrow S$ l'inclusion. On a, pour tout $x \in H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$:

$$\iota_*(E_*(x) - x) = F_*(\iota_*(x)) - \iota_*(x) = 0.$$

Or, par la suite exacte de Mayer-Vietoris appliqué au triplet $(S, R, S - \text{int}(R))$, on voit que $\ker \iota_*$ est inclus dans l'image de $H_1(\partial R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Puisque $H_1(\partial R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est envoyé sur 0 dans $H_1(R', \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et que l'application naturelle $H_1(R, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(R', \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est surjective, on a nécessairement que $E': H_1(R', \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(R', \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ est l'identité.

Donc, par le théorème 4.46 et le lemme 4.47, comme E' est périodique car E l'est, on obtient $E' = \text{id}_{R'}$. Or, un résultat de [FM, Chapitre 4, section 4.2.5] donne une suite exacte courte :

$$1 \rightarrow \langle T_{a_1}, \dots, T_{a_k} \rangle \rightarrow \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(R', \{p_1, \dots, p_k\}) \rightarrow 1$$

où les a_i sont les classes d'isotopie des bords de R , et $\text{Mod}(R', \{p_1, \dots, p_k\})$ les classes d'isotopie des homéomorphismes de R' fixant $\{p_1, \dots, p_k\}$. Ainsi, E est une composition de puissances de twists de Dehn. Or, les twists de Dehn sont d'ordre infini. Comme E est périodique, E est l'identité.

Dans le cas où le genre de R est nul, on sait que F est l'identité sur C ainsi que sur les points marqués de S par le théorème 4.44. Donc F_R est l'identité sur ∂R ainsi que sur les points marqués de R . Or, le genre de R étant nul, les générateurs des classes d'homologie dans la surface R sont celles des bords et de courbes fermées simples délimitant des disques époinés. De ce fait, le problème qui se posait dans le cas $g \geq 1$ n'a plus lieu d'être car il n'y a pas d'autres classes d'homologie que celles des bords de R . On peut donc directement conclure que E_* est l'identité. Par ailleurs, $\chi(R) < 0$ car toutes les courbes de C sont supposées essentielles et distinctes, donc R ne peut pas être un disque, un disque époiné ou un anneau. En conséquence, par le théorème 4.46, $E = \text{id}_R$. \square

Corollaire 4.50. $\Gamma_S(m)$ est constitué d'éléments purs, pour $m \geq 3$.

Preuve. Soit $f \in \Gamma_S(m)$, et soit \tilde{C} un simplexe de $C(S)$ tel que $f(\tilde{C}) = \tilde{C}$. On choisit \tilde{C} tel que ce dernier soit de dimension maximal dans l'ensemble des simplexes fixés par f . Soit C une réalisation de \tilde{C} telle que les courbes de C soient deux à deux en position minimale, et F un représentant de f tel que $F(C) = C$. D'après le lemme 4.49, pour chaque composante connexe R de S_C , F_R est soit isotope à l'identité, soit isotope à un difféomorphisme d'ordre infini. Par ailleurs, si F_R est différent de l'identité, il n'existe pas de courbe fermée simple essentielle α dans R telle que $F_R(\alpha) = \alpha$ car une telle courbe se relèverait dans S en une courbe fermée simple essentielle α' disjointe de C et telle que $F(\alpha') = \alpha'$, contredisant la maximalité de \tilde{C} . En conséquence, F_R n'est pas périodique et est irréductible, donc par le théorème 4.30, F_R est pseudo-Anosov. \square

4.2.2. Propriétés des éléments purs

Nous disposons ainsi d'un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}^*(S)$ constitué d'éléments purs. Nous étudions maintenant les propriétés de tels éléments de $\text{Mod}^*(S)$. Le but de cette partie est de démontrer la propriété suivante :

Proposition 4.51. *Soit $f \in \text{Mod}^*(S)$ un élément pur, et $a \in S$. S'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n(a) = a$, alors $f(a) = a$.*

Pour cela, on introduit ϕ un représentant de f , C un système de réduction minimal pour ϕ , S_1, \dots, S_n les composantes de S_C où $\phi|_{S_i}$ (et donc f_{S_i}) est pseudo-Anosov, $\mu_1^u, \mu_1^s, \dots, \mu_n^u, \mu_n^s$ les classes d'équivalence de feuilletages stables et instables correspondants et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients de dilatation. Soit $P = \cup S_i$, $Q = S - \text{int}(P)$ et Q_1, \dots, Q_q les composantes connexes de Q . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les composantes connexes de C tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, l'un des bords d'un voisinage régulier

$\alpha_i \times [-1, 1]$ de α_i soit contenu dans P , β_1, \dots, β_l les autres composantes connexes et $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_l$ leurs classes d'isotopies respectives. Autrement dit, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, les deux bords de $\beta_j \times [-1, 1]$ sont contenus dans des composantes connexes où ϕ est égale à l'identité. On pose :

$$\Delta^u = \left\{ \left[\sum_{i=1}^n m_i \mu_i^u + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k \right] \text{ tels que } m_i, s_i, t_i \geq 0 \text{ et } \sum m_i + \sum s_j + \sum t_k > 0 \right\};$$

$$\Psi^s = \left\{ [\nu] \neq 0 \text{ tels que pour tous } i, ki(\nu, \mu_i^s) = i(\nu, b_k) = 0 \right\}.$$

Proposition 4.52.

$$\Psi^s = \left\{ \left[\sum_{i=1}^n m_i \mu_i^s + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{p=1}^q \mu_p \right] \text{ tels que } m_i, s_i, t_i \geq 0 \text{ et } \mu_k \in \mathcal{MF}(Q_k) \right\}.$$

Preuve. Soit $\nu \in \Psi^s$. Comme $i(\nu, \mu_i^s) = 0$, par la proposition 4.40, pour tout j , $i(\nu, a_j) = 0$. Puisque, pour tout j et tout k , $i(\nu, a_j) = i(\nu, b_k) = 0$, par la proposition 4.28,

$$\nu = \sum_{i=1}^n \mu'_i + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{r=1}^q \mu_r;$$

avec $\mu'_i \in \mathcal{MF}(S_i) \cup \{0\}$ et $\mu_r \in \mathcal{MF}(Q_r) \cup \{0\}$. Or, pour tout $j \neq i$, $i(a_i, \mu_i^s) = 0$ par la proposition 4.40. De plus, pour tout $j \neq i$ et pour tout k , $i(a_j, \mu_i^s) = i(b_k, \mu_i^s) = 0$ par le lemme 4.21. Enfin, pour tout $j \neq i$, $i(\mu'_j, \mu_i^s) = 0$ par le lemme 4.21 et la proposition 4.23. Ainsi, par la proposition 4.27 :

$$i(\mu'_i, \mu_i^s) = i(\nu, \mu_i^s) = 0.$$

Donc, par la proposition 4.38, pour tout i , il existe $m_i \geq 0$ tel que $\mu'_i = m_i \mu_i^s$, et le résultat est prouvé. \square

Pour prouver le prochain résultat, nous avons besoin de définir la *fonction longueur*.

Définition 4.53. 1. Un ensemble $A \subseteq \mathcal{MF}(S)$ est un ensemble couvrant si

$$\forall \mu \in \mathcal{MF}(S) \cup \{0\}, \quad i(\mu, \nu) = 0 \quad \forall \nu \in A \quad \Rightarrow \mu = 0.$$

2. Soit A un ensemble couvrant. La fonction longueur par rapport à A est la fonction

$$\begin{aligned} \ell: \mathcal{MF}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mu &\mapsto \sum_{\nu \in A} i(\mu, \nu). \end{aligned}$$

De tels ensembles couvrants existent : il suffit de prendre les classes d'équivalence de feuilletages stable et instable d'un élément pseudo-Anosov de $\text{Mod}(S)$ par les propositions 4.37 et 4.38. De même, la construction de l'homéomorphisme de la proposition 4.19 entre l'image de $\mathcal{MF}(S)$ dans \mathbb{R}^S et un produit fini de copies de \mathbb{R} montre que l'on peut prendre un système fini de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles.

Dans la suite, nous fixons un ensemble couvrant A et la fonction longueur ℓ par rapport à A .

Lemme 4.54. *Soit K un compact de $\mathcal{PMF}(S) \setminus \Psi^s$. Il existe $c > 0$ et d réels tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $[\mu] \in K$,*

$$\ell(f^n(\mu)) \geq (cn - d)\ell(\mu).$$

Preuve. On écrit $\mathcal{PMF}(S) \setminus \Psi^s = \bigcup_{i=1}^n U_i \cup \bigcup_{k=1}^l V_k$ avec $U_i = [\nu : i(\nu, \mu_i^s) \neq 0]$ et $V_k = [\nu : i(\nu, b_k) \neq 0]$ des ouverts. Alors on peut écrire $K = \bigcup_{i=1}^n K_i \cup \bigcup_{k=1}^l K'_k$ avec $K_i \subseteq U_i$ et $K'_k \subseteq V_k$ des compacts. On peut donc se limiter à étudier, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \{1, \dots, l\}$ les compacts K_i et K'_k .

Dans le cas d'un K_i , on pose

$$\begin{aligned} J_i : \mathcal{PMF}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ [\nu] &\mapsto \frac{i(\nu, \mu_i^s)}{\ell(\nu)}. \end{aligned}$$

J_i est bien définie car $0 \notin \mathcal{PMF}(S)$ et par homogénéité de i et ℓ . De plus, J_i est continue par continuité de i . Comme $\mathcal{PMF}(S)$ est compact, il existe c tel que $J_i \leq c$. De ce fait, pour tout $[\nu] \in \mathcal{PMF}(S)$,

$$i(\nu, \mu_i^s) \leq c\ell(\nu).$$

Par ailleurs, J_i ne s'annule jamais sur K_i par définition de U_i . Ainsi, pour tout $[\nu] \in K_i$, il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$0 < \epsilon\ell(\nu) \leq i(\nu, \mu_i^s) \leq c\ell(\nu).$$

Ainsi, pour tout $[\nu] \in K_i$,

$$\begin{aligned} \ell(f^n(\nu)) &\geq c^{-1}i(f^n(\nu), \mu_i^s) \\ &\geq c^{-1}i(\nu, f^{-n}(\mu_i^s)) \\ &= c^{-1}\lambda_i^n i(\nu, \mu_i^s) \\ &\geq c^{-1}\lambda_i^n \epsilon\ell(\nu). \end{aligned}$$

Dans le cas de K'_k , les courbes β_j étant supposées non isotopes, par la remarque 2.38, il existe dans Q une courbe δ de classe d'isotopie d telle que, pour tout $j \neq k$, $i(b_j, d) = 0$ et $i(b_k, d) \neq 0$. On pose alors, pour $[\nu] \in \mathcal{PMF}(S)$,

$$J_d([\nu]) = \frac{i(d, \nu)}{\ell(\nu)} \quad \text{et} \quad J([\nu]) = \frac{i(b_k, \nu)}{\ell(\nu)}.$$

Comme pour le cas des compacts K_i , il existe ϵ et c tels que, pour tout $[\nu] \in K'_k$:

$$\begin{aligned} i(d, \nu) &\leq c\ell(\nu) \\ \epsilon\ell(\nu) &\leq i(\beta_k, \nu) \leq c\ell(\nu). \end{aligned}$$

Étant donné que δ est contenue dans Q , et que ϕ est l'identité sur Q , on a, par le corollaire 2.34, qu'il existe un entier N_k tel que $f^n(d) = T_{b_k}^{nN_k}(d)$. Par ailleurs, $N_k \neq 0$ car nous avons supposé le système de réduction minimal. En effet, si $N_k = 0$, alors $C \setminus \{\beta_k\}$ serait toujours un système de réduction pour ϕ . D'où une contradiction. Donc $N_k \neq 0$. On en déduit, pour tout $\nu \in \mathcal{MF}(S)$, l'inégalité :

$$|i(T_{b_k}^n(d), \nu) - |n|i(d, b_k)i(b_k, \nu)| \leq i(d, \nu).$$

En effet, l'inégalité est vraie pour les classes d'isotopie de courbes fermées simples par la proposition 2.36 et se généralise à tous les éléments de $\mathcal{MF}(S)$ par densité des classes d'isotopie de courbes fermées simples et continuité de i .

De ce fait, pour tout $[\nu] \in K'_k$,

$$\begin{aligned} c\ell(f^n(\nu)) &\geq i(f^n(\nu), d) = i(\nu, T^{-nN_k}(d)) \\ &\geq |nN_k|i(d, b_k)i(b_k, \nu) - i(d, \nu) \\ &\geq |nN_k|i(d, b_k)\epsilon\ell(\nu) - c\ell(\nu). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé le résultat pour les K_i et les K'_k . Comme il n'y en a qu'un nombre fini, on obtient les bornes voulues en choisissant le maximum et le minimum des bornes trouvées dans chaque cas et le résultat est prouvé. \square

Lemme 4.55. *Soit Q_i une composante connexe de S_C qui n'est pas contenue dans $\{S_1, \dots, S_n\}$, $B_i = \{\rho_1^i, \dots, \rho_{r_i}^i\}$ un ensemble couvrant composé de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles de $\mathcal{MF}(Q_i)$, et $B = \{\rho_1, \dots, \rho_p\}$ l'union de l'image des B_i dans $\mathcal{MF}(Q)$. On considère la fonction*

$$\begin{aligned} L: \mathcal{MF}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mu &\mapsto \sum_{i=1}^n i(\mu, \mu_i^u) + \sum_{j=1}^m i(\mu, a_j) + \sum_{k=1}^l i(\mu, b_k) + \sum_{p=1}^r i(\mu, \rho_p). \end{aligned}$$

Alors $L(\mu) = 0$ si, et seulement si, $[\mu] \in \Delta^u$.

Preuve. Si $L(\mu) = 0$, alors, pour tous j, k , $i(\mu, a_j) = i(\mu, b_k) = 0$. Donc, par la proposition 4.28,

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu'_i + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{j=1}^q \mu_j$$

avec $\mu'_i \in \mathcal{MF}(S_i) \cup \{0\}$ et $\mu_j \in \mathcal{MF}(Q_j) \cup \{0\}$. On remarque par ailleurs que, pour tous i, j, k, p , $i(\rho_p, b_k) = i(\rho_p, a_j) = i(\rho_p, \mu_i^u) = 0$ car, pour tout p ρ_p est l'image d'une

classes d'isotopie de courbes dans une composante connexe de S_C qui n'est pas contenue dans $\{S_1, \dots, S_n\}$. Donc, pour tout j , puisque $L(\mu) = 0$, $i(\mu_j, \rho_k) = i(\mu, \rho_k) = 0$. Ainsi, comme, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, B contient l'image d'un ensemble couvrant de Q_j , pour tout j , $\mu_j = 0$. De même, pour tout i , $i(\mu'_i, \mu_i^u) = 0$. Donc, par la proposition 4.38, pour tout i , $\mu'_i = m_i \mu_i^u$ avec $m_i \geq 0$. Donc $[\mu] \in \Delta^u$.

Réciproquement, si $[\mu] \in \Delta^u$, alors :

$$\begin{aligned} i(\mu, \rho_p) &= i\left(\sum_{i=1}^n m_i \mu_i^u + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k, \rho_p\right) \\ &= \sum_{i=1}^n m_i i(\mu_i^u, \rho_p) + \sum_{j=1}^m s_j i(a_j, \rho_p) + \sum_{k=1}^l t_k i(b_k, \rho_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De même, pour tout i, j, k , $i(\mu, a_j) = i(\mu, b_k) = i(\mu, \mu_i^u) = 0$. En définitive, $L(\mu) = 0$. \square

Théorème 4.56. *Soit U un ouvert de $\mathcal{PMF}(S)$ contenant Δ^u , et K un compact dans $\mathcal{PMF}(S) \setminus \Psi^s$. Alors il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $f^n(K) \subseteq U$.*

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} \bar{L}: \mathcal{PMF}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ [\nu] &\mapsto \frac{L(\nu)}{\ell(\nu)}. \end{aligned}$$

\bar{L} est bien défini car $0 \notin \mathcal{PMF}(S)$ et L et ℓ sont homogènes. Par le lemme 4.55, $\bar{L}^{-1}(0) = \Delta^u$. Donc, pour tout $[\nu] \in \mathcal{PMF}(S) \setminus U$, $\bar{L}([\nu]) \neq 0$. Par ailleurs, étant donné que $\mathcal{PMF}(S) \setminus U$ est compact, il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{PMF}(S) \setminus U$, $\bar{L}(x) > \epsilon$. Il faut donc montrer qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in K$, $\bar{L}(f^n(x)) \leq \epsilon$. On considère ainsi les fonctions

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \dots, m\}, \quad [\mu] &\mapsto \frac{i(\mu, a_j)}{\ell(\mu)} \\ \forall k \in \{1, \dots, l\}, \quad [\mu] &\mapsto \frac{i(\mu, b_k)}{\ell(\mu)} \\ \forall p \in \{1, \dots, r\}, \quad [\mu] &\mapsto \frac{i(\mu, \rho_p)}{\ell(\mu)} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad [\mu] &\mapsto \frac{i(\mu, \mu_i^u)}{\ell(\mu)}. \end{aligned}$$

Toutes ces fonctions sont bien définies par homogénéité et sont continues, donc bornées sur le compact $\mathcal{PMF}(S)$. Soit d' une borne supérieure commune. On considère chaque terme de \bar{L} séparément.

Étant donné que, pour tout p , il existe j tel que ρ_p est une classe d'isotopie de courbes contenue dans Q_j , et étant donné que, pour tout j , $f|_{Q_j}$ est l'identité, on voit que, pour tout p , $f(\rho_p) = \rho_p$. De ce fait, pour tout $x \in K$,

$$\frac{i(f^n(x), \rho_p)}{\ell(f^n(x))} = \frac{i(x, f^{-n}(\rho_p))}{\ell(f^n(x))} = \frac{i(x, \rho_p)}{\ell(f^n(x))} \leq \frac{d'}{cn - d'}$$

Le dernier point est obtenu par le lemme 4.54. Les cas des a_j et b_k sont identiques. Dans le cas de μ_i^u , pour tout $x \in K$:

$$\frac{i(f^n(x), \mu_i^u)}{\ell(f^n(x))} = \frac{i(x, f^{-n}(\mu_i^u))}{\ell(f^n(x))} = \frac{i(x, \lambda_i^{-n} \rho_p)}{\ell(f^n(x))} \leq \frac{\lambda_i^{-n} d'}{cn - d'}.$$

Ainsi, pour tout $x \in K$, chaque terme de $\bar{L}(f^n(x))$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et ce de manière indépendante de x . Donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in K$, $\bar{L}(f^n(x)) \leq \epsilon$. \square

Corollaire 4.57. *Soit $x \in \mathcal{PMF}(S)$ tel que $f^n(x) = x$. Alors $f(x) = x$.*

Preuve. Si $x \in \mathcal{PMF}(S) \setminus \Psi^s$, par le théorème 4.56, $f^m(x)$ tend vers Δ^u quand m tend vers l'infini. Or, comme, pour tout entier N , $f^{nN}(x) = x$, on a nécessairement que $x \in \Delta^u$. Donc $x \in \Delta^u \cup \Psi^s$.

Si $x \in \Psi^s$, alors par la proposition 4.52,

$$x = \left[\sum_{i=1}^n m_i \mu_i^s + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{p=1}^q \mu_p \right]$$

avec $\mu_p \in \mathcal{MF}(Q_p) \cup \{0\}$. Donc,

$$\begin{aligned} f^n(x) &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i^n m_i \mu_i^s + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{p=1}^q \mu_p \right] \\ &= x \\ &= \left[\sum_{i=1}^n m_i \mu_i^s + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{p=1}^q \mu_p \right]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^n m_i \mu_i^s + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{p=1}^q \mu_p = \lambda \left(\sum_{i=1}^n m_i \mu_i^s + \sum_{j=1}^m s_j a_j + \sum_{k=1}^l t_k b_k + \sum_{p=1}^q \mu_p \right).$$

Donc si un des s_j, t_k ou μ_p est non nul, alors, par la proposition 4.26, pour tout i , $m_i = 0$ et $\lambda = 1$ ($\lambda_i \neq 1$ par hypothèse sur les coefficients de dilatation d'un pseudo-Anosov). Si $x = \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i^n m_i \mu_i^s \right]$, alors $m_i \lambda_i^n = \lambda m_i$. Donc, pour tout i , $\lambda_i = \lambda^{\frac{1}{n}}$. Dans tous les cas, $f^n(x) = x$. \square

Nous pouvons maintenant prouver la proposition 4.51 :

Preuve. Soit $a \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f^n(a) = a$. Alors $f^n([a]) = [a]$. Donc, par le corollaire 4.57, $f([a]) = [a]$. Donc, comme on sait que f envoie classe d'isotopie de courbes fermées simples sur classes d'isotopie de courbes fermées simples, nécessairement, $f(a) = a$. \square

4.2.3. Sous-groupes de $\Gamma_S(m)$

Nous étudions maintenant les sous-groupes de $\Gamma_S(m)$ pour $m \geq 3$. Par le corollaire 4.50, nous savons que tous les éléments de $\Gamma_S(m)$ sont purs. Nous montrons maintenant des résultats sur les sous-groupes de $\Gamma_S(m)$. Nous donnons tout d'abord une définition qui décrit le comportement de sous-groupes de $\Gamma_S(m)$ vis-à-vis de leur action sur $C(S)$:

Définition 4.58. Un sous-groupe Γ de $\Gamma_S(m)$ est dit *irréductible* s'il n'existe pas de simplexe $\sigma \in C(S)$ tel que, pour tout $f \in \Gamma$, $f(\sigma) = \sigma$. Sinon, Γ est dit *réductible*.

L'objectif de cette partie est ainsi de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.64. *Soit Γ un sous-groupe irréductible de $\Gamma_S(m)$ non trivial. Alors Γ est soit cyclique engendré par un pseudo-Anosov, soit il contient deux pseudo-Anosov f et g tels que, pour l'action du groupe modulaire sur $\mathcal{PMF}(S)$, $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) = \emptyset$.*

Une fois ce théorème démontrée, nous pourrons en déduire une caractérisation algébrique des stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles.

Nous admettons le théorème suivant, qui relie sous-groupe irréductible et élément pseudo-Anosov qui nous servira dans la preuve du théorème :

Théorème 4.59. *[Iva3, Theorem 5.9] Soit $m \geq 3$. Tout sous-groupe irréductible Γ de $\Gamma_S(m)$ contient un élément pseudo-Anosov.*

Nous donnons également une proposition sur la répartition des coefficients pseudo-Anosov :

Proposition 4.60. *[FM, Theorem 14.9] L'ensemble des coefficients de dilatation des difféomorphismes pseudo-Anosov est discret.*

Lemme 4.61. *Soit Γ un sous-groupe de $\text{Mod}^*(S)$ contenant uniquement des éléments purs. Soit $\mu \in \mathcal{MF}(S)$ la classe d'équivalence d'un feuilletage arationnel. Si pour tout $f \in \Gamma$, $f([\mu]) = [\mu]$, alors Γ est cyclique engendré par un élément pseudo-Anosov.*

Preuve. Soit $g \in \Gamma$. Comme $g([\mu]) = [\mu]$, alors $g(\mu) = \bar{\lambda}(g)\mu$, avec $\bar{\lambda}(g) > 0$. Nous obtenons ainsi une application :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}: \Gamma &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ f &\mapsto \bar{\lambda}(f). \end{aligned}$$

Cette application est un morphisme de groupes. En effet, on voit immédiatement que $\bar{\lambda}(\text{id}) = 1$. Par ailleurs, si $f, g \in \Gamma$, alors

$$f \circ g(\mu) = \bar{\lambda}(f \circ g)\mu = f(\bar{\lambda}(g)\mu) = \bar{\lambda}(g)f(\mu) = \bar{\lambda}(g)\bar{\lambda}(f)\mu.$$

L'avant-dernière équation s'obtient par définition de l'action de $\text{Mod}^*(S)$ sur un feuilletage mesuré. Donc $\bar{\lambda}$ est un morphisme de groupes.

Si $\bar{\lambda}(f) = 1$, alors $f(\mu) = \mu$. Donc, comme μ est arationnel, par la proposition 4.33 f est périodique. Ceci contredit le fait que f est pur.

Donc pour tout $f \in \Gamma$ avec $f \neq \text{id}$, $\bar{\lambda}(f) \neq 1$. De ce fait, $\bar{\lambda}$ est injective. De plus, si $f \in \Gamma$ et $f \neq \text{id}$, la proposition 4.34 donne que f est pseudo-Anosov, et μ est le feuilletage stable (ou instable) de f . Comme l'ensemble des coefficients de dilatation des éléments pseudo-Anosov de $\text{Mod}^*(S)$ est discret par la proposition 4.60, $\bar{\lambda}(\Gamma)$ est un sous-groupe discret de \mathbb{R}_+^* , donc il est cyclique. \square

Corollaire 4.62. *Soit $f \in \Gamma_S(m)$ un élément pseudo-Anosov. Alors le centralisateur $C_{\Gamma_S(m)}(f)$ de f dans $\Gamma_S(m)$ est isomorphe à \mathbb{Z} et engendré par un élément pseudo-Anosov.*

Preuve. Soit $g \in C_{\Gamma_S(m)}(f)$, $[\mu^s(f)]$ la classe d'équivalence dans $\mathcal{PMF}(S)$ du feuilletage stable de f . Alors gfg^{-1} est pseudo-Anosov. En effet, $gfg^{-1}(g([\mu^s(f)])) = g([\mu^s(f)])$. Par ailleurs, comme g est pur, $gfg^{-1}(\mu^s(f)) \neq \mu^s(f)$ car sinon gfg^{-1} serait périodique par la proposition 4.33. Donc gfg^{-1} est pseudo-Anosov et $[\mu^s(gfg^{-1})] = g([\mu^s(f)])$. Or, $g \in C_{\Gamma_S(m)}(f)$. Donc $gfg^{-1} = f$ et $g([\mu^s(f)]) = [\mu^s(f)]$. Comme $\mu^s(f)$ est arationnel par la proposition 4.35, le lemme 4.61 donne le résultat. \square

Dans la suite, nous notons, si f est un élément pseudo-Anosov de $\text{Mod}^*(S)$, $\text{fix}(f)$ l'ensemble des deux classes d'équivalence dans $\mathcal{PMF}(S)$ des feuilletages stable et instable de f .

Lemme 4.63. *Si f et g sont deux éléments pseudo-Anosov de $\text{Mod}(S)$. Alors soit $\text{fix}(f) = \text{fix}(g)$ soit $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) = \emptyset$.*

Preuve. Quitte à remplacer f et g par des puissances, on peut supposer que $f, g \in \Gamma_S(m)$. Supposons que $[\mu] \in \text{fix}(f) \cap \text{fix}(g)$. Alors $[\mu]$ est arationnel par la proposition 4.35. Donc, par le lemme 4.61, le groupe engendré par f et g est cyclique engendré par un pseudo-Anosov. Soit h un générateur de ce groupe. Alors il existe des entiers non nuls n et k tels que $f = h^n$ et $g = h^k$. De ce fait, $\text{fix}(f) = \text{fix}(h^n) = \text{fix}(h) = \text{fix}(h^k) = \text{fix}(g)$. \square

Nous pouvons à présent démontrer le théorème énoncé :

Théorème 4.64. *Soit Γ un sous-groupe irréductible de $\Gamma_S(m)$ non trivial. Alors Γ est soit cyclique engendré par un pseudo-Anosov, soit il contient deux pseudo-Anosov f et g tels que $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) = \emptyset$.*

Preuve. Par le théorème 4.59, Γ contient des éléments pseudo-Anosov. Si parmi eux il n'existe pas deux pseudo-Anosov f et g tels que $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) = \emptyset$, alors, par le lemme 4.63, pour tous $f, g \in \Gamma$ pseudo-Anosov, les ensembles $\text{fix}(f)$ et $\text{fix}(g)$ coïncident. Nous fixons donc un élément pseudo-Anosov $f \in \Gamma$.

Montrons maintenant que tous les éléments de Γ fixent $[\mu] \in \text{fix}(f)$, ce qui conclura par le lemme 4.61. Soit donc $g \in \Gamma$. Alors l'élément gfg^{-1} est pseudo-Anosov. En effet, si $[\mu] \in \text{fix}(f)$, alors $gfg^{-1}(g([\mu])) = g([\mu])$. Par ailleurs, comme g est pur, $gfg^{-1}(\mu) \neq \mu$. Donc gfg^{-1} est pseudo-Anosov par la proposition 4.34. Par ailleurs, $\text{fix}(gfg^{-1}) = g \cdot$

$\text{fix}(f)$. Par l'hypothèse faite au départ, $\text{fix}(gfg^{-1}) = \text{fix}(f)$, donc $g \cdot \text{fix}(f) = \text{fix}(f)$. De ce fait, si $[\mu] \in \text{fix}(f)$, $g^2([\mu]) = [\mu]$. Par le corollaire 4.57, $g([\mu]) = [\mu]$ et on peut conclure. \square

4.3. Stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes

Nous avons à présent assez d'outils pour donner une caractérisation algébrique des stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes.

Avant de présenter cette caractérisation des stabilisateurs, nous présentons un lemme caractérisant un système de réduction pour un élément de $\Gamma_S(m)$:

Lemme 4.65. *[Iva3, Theorem 7.11] Soit $f \in \Gamma_S(m)$ un élément réductible. L'ensemble*

$$\sigma(f) := \{a \in \mathcal{S} \text{ tel que } f(a) = a \text{ et } \forall b \in \mathcal{S} \text{ tel que } i(a, b) \neq 0, f(b) \neq b\}$$

est non vide. De plus, c'est un système de réduction pour f .

Pour tout $f \in \Gamma_S(m)$ réductible, $\sigma(f)$ définit un simplexe de $C(S)$, c'est donc un ensemble fini.

Nous pouvons à présent prouver une caractérisation algébrique des stabilisateurs de classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles.

Proposition 4.66. *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_S(m)$. Soit $H \subseteq \Gamma$ un sous-groupe. Le sous-groupe H est non virtuellement abélien contenant un sous-groupe normal cyclique maximal pour cette propriété si, et seulement si, il existe $a \in \mathcal{S}$ tel que $H = \text{Stab}_{\Gamma_S(m)}(a)$.*

Preuve. Supposons que H soit un sous-groupe non virtuellement abélien contenant un sous-groupe normal cyclique N maximal pour cette propriété. Montrons tout d'abord que H n'est pas irréductible. Sinon, d'après le théorème 4.64, puisque H n'est pas virtuellement abélien, H contient deux éléments pseudo-Anosov f et g tels que $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) = \emptyset$. Soit maintenant h un générateur de N . h est pur par le corollaire 4.50.

Il existe des entiers k et l tels que :

$$\begin{aligned} fhf^{-1} &= h^k \\ ghg^{-1} &= h^l. \end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas, selon le fait que h soit pseudo-Anosov ou non.

Si h est pseudo-Anosov, alors il possède deux points fixes dans $\mathcal{PMF}(S)$. Ainsi,

$$\text{fix}(h) = \text{fix}(h^{kl}) = \text{fix}(fh^lf^{-1}) = f \cdot \text{fix}(h^l) = f \cdot \text{fix}(h) = g \cdot \text{fix}(h^k) = g \cdot \text{fix}(h).$$

Donc, par le corollaire 4.57, $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) \neq \emptyset$, d'où une contradiction.

Si h n'est pas pseudo-Anosov, soit $\sigma(h)$ le système de réduction non vide de h défini dans le lemme 4.65.

Par le corollaire 4.50, fhf^{-1} et ghg^{-1} sont purs. Par ailleurs, $\sigma(fhf^{-1}) = f(\sigma(h))$ et $\sigma(ghg^{-1}) = g(\sigma(h))$. En effet, si $a \in \sigma(h)$, $fhf^{-1}(f(a)) = f(a)$. De plus, si $b \in \mathcal{S}$ est

tel que $i(f(a), b) \neq 0$, alors $i(a, f^{-1}(b)) \neq 0$. Donc $h(f^{-1}(b)) \neq f^{-1}(b)$ et $fhf^{-1}(b) \neq b$. De ce fait, $f(\sigma(h)) \subseteq \sigma(fhf^{-1})$ et l'égalité se déduit car les deux ensembles sont finis de même cardinal.

Ainsi,

$$\sigma(h) = \sigma(h^k) = \sigma(fhf^{-1}) = f(\sigma(h)) = \sigma(h^l) = \sigma(ghg^{-1}) = g(\sigma(h)).$$

Par ailleurs, par le théorème 4.44, comme $\sigma(h)$ est fini, f et g fixent tous les éléments de $\sigma(h)$. Donc $\text{fix}(f) \cap \text{fix}(g) \neq \emptyset$, d'où une contradiction.

Ainsi, H fixe un simplexe de $C(S)$. Soient a_1, \dots, a_n les sommets de ce simplexe. Par le théorème 4.44, $H \subseteq \text{Stab}_\Gamma(a_1)$.

Or, $\text{Stab}_\Gamma(a_1)$ remplit les conditions du théorème. En effet, puisque le genre de S est supposé plus grand que 2, il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples essentielles b telle que $a_1 \neq b$ et $i(a_1, b) = 0$. Par ailleurs, par la remarque 2.38, il existe une classe d'isotopie de courbes fermées simples c telle que $i(a_1, c) = 0$ et $i(b, c) \neq 0$. Ainsi, il existe des entiers k et l tels que $T_b^k, T_c^l \in \text{Stab}_\Gamma(a_1)$. Par ailleurs, puisque $i(b, c) \neq 0$, pour tout entier m , $T_b^{km}T_c^{lm} \neq T_c^{lm}T_b^{km}$. Donc, $\text{Stab}_\Gamma(a_1)$ n'est pas virtuellement abélien.

Montrons maintenant que $\text{Stab}_\Gamma(a_1)$ contient un sous-groupe cyclique normal. Pour tout $f \in \text{Stab}_\Gamma(a_1)$, pour tout entier k , par la proposition 2.37 :

$$fT_{a_1}^k f^{-1} = T_{f(a_1)}^k = T_{a_1}^k.$$

Ainsi, si k est tel que $T_{a_1}^k \in \text{Stab}_\Gamma(a_1)$, $\langle T_{a_1}^k \rangle$ est un sous-groupe cyclique normal de $\text{Stab}_\Gamma(a_1)$.

Donc, $\text{Stab}_\Gamma(a_1)$ remplit les conditions du théorème. De ce fait, $H = \text{Stab}_\Gamma(a_1)$.

Montrons la réciproque, i.e. montrons que, si $a \in \mathcal{S}$, alors $\text{Stab}_\Gamma(a)$ est un sous-groupe non virtuellement abélien contenant un sous-groupe normal cyclique et que $\text{Stab}_\Gamma(a)$ est maximal pour cette propriété.

Nous avons déjà montré dans l'implication que $\text{Stab}_\Gamma(a)$ est un sous-groupe non virtuellement abélien contenant un sous-groupe normal cyclique. Il reste à montrer que $\text{Stab}_\Gamma(a)$ est maximal pour ces propriétés. Soit H un sous-groupe non virtuellement abélien de Γ tel que H contient un sous-groupe cyclique normal N et tel que $\text{Stab}_\Gamma(a) \subseteq H$. Par le même raisonnement que pour l'implication, il existe $b \in \mathcal{S}$ tel que $H \subseteq \text{Stab}_\Gamma(b)$. Donc, $\text{Stab}_\Gamma(a) \subseteq \text{Stab}_\Gamma(b)$. Soit k tel que $T_a^k \in \text{Stab}_\Gamma(a)$. On voit que $T_a^k(b) = b$, donc $i(a, b) = 0$ par la proposition 2.37.

Or, si $a \neq b$, par la remarque 2.38, il existe $c \in \mathcal{S}$ tel que $i(a, c) = 0$ et $i(b, c) \neq 0$. Ainsi, il existe l tel que $T_c^l \in \text{Stab}_\Gamma(a)$, mais $T_c^l \notin \text{Stab}_\Gamma(b)$. D'où une contradiction. Ainsi, $a = b$ et $\text{Stab}_\Gamma(a) \subseteq H \subseteq \text{Stab}_\Gamma(a)$, i.e. $H = \text{Stab}_\Gamma(a)$. \square

Proposition 4.67. *Soit H un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$. Soient a et b des classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles. Alors $i(a, b) = 0$ si, et seulement si, il n'existe pas de sous-groupe $A \leq \text{Mod}(S)$ isomorphe à \mathbb{F}_2 tel que $H \cap \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \subseteq C_H(A \cap H)$.*

Preuve. Si $i(a, b) > 0$, alors il existe des entiers strictement positifs j et k tels que $\langle T_a^j, T_b^k \rangle \simeq \mathbb{F}_2$ (cf. [FM, Section 3.5.2]). On peut par ailleurs supposer, comme H est un sous-groupe d'indice fini de $\text{Mod}(S)$, que $T_a^j, T_b^k \in H$. Étant donné que, pour tout $f \in \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b)$,

$$fT_a^j f^{-1} = T_a^j \quad \text{et} \quad fT_b^k f^{-1} = T_b^k,$$

on obtient bien que $H \cap \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \subseteq C_H(\langle T_a^j, T_b^k \rangle)$.

Réciproquement, supposons que $i(a, b) = 0$. Soient α et β des représentants de a et b en position minimale. Soit A un sous-groupe engendré par deux éléments f et g tel que $H \cap \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \subseteq C_H(A \cap H)$. Nous supposons de plus que A n'est pas virtuellement cyclique. Nous allons montrer que A contient un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 , ce qui suffira pour conclure.

Comme $i(a, b) = 0$, $T_a, T_b \in \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b)$. Par ailleurs, il existe un entier k tel que $T_a^k, T_b^k \in H$. De ce fait, puisque $T_a^k, T_b^k \in C_H(\langle f, g \rangle \cap H)$, on voit, par la proposition 2.37, qu'il existe un entier l tel que $f^l, g^l \in \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \cap H$.

Soit $\rho: \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \rightarrow \text{Mod}(S_{\alpha \cup \beta})$ le morphisme canonique. Puisque $\text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b) \cap H \subseteq C_H(\langle f, g \rangle \cap H)$, $\rho(f^l)$ et $\rho(g^l)$ commutent avec tous les twists de Dehn de classes d'isotopie de courbes contenues dans $S_{\alpha \cup \beta}$. De ce fait, $\rho(f^l), \rho(g^l) \in C(\text{Mod}(S_{\alpha \cup \beta}))$. Soit α_1, α_2 (resp. β_1, β_2) les bords de $S_{\alpha \cup \beta}$ induits par α (resp. β). Le groupe $C(\text{Mod}(S_{\alpha \cup \beta}))$ contient $B = \langle T_{[\alpha_1]}, T_{[\alpha_2]}, T_{[\beta_1]}, T_{[\beta_2]} \rangle$ comme sous-groupe d'indice fini. Donc il existe un entier non nul k tel que $\rho^k(f^l), \rho^k(g^l) \in B$. Ainsi, $f^{lk}, g^{lk} \in \langle T_a, T_b \rangle$. Puisque $i(a, b) = 0$, $\langle T_a, T_b \rangle \simeq \mathbb{Z}^2$. Donc f^{kl} et g^{kl} commutent, et A n'est pas isomorphe à \mathbb{F}_2 . \square

Bibliographie

- [Ber] L. Bers. *An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston*. Acta Math. **141** (1978) 73–98.
- [Deh] M. Dehn. *Papers on group theory and topology*. Translated and introduced by John Stillwell, Springer Verlag, 1987.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque **66-67**, (1979) Soc. Math. France.
- [FM] B. Farb et D. Margalit. *A primer on mapping class groups*. Princeton Math. Ser., (2012) Princeton Univ. Press.
- [Har] J. Harer. *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*. Invent. Math. **84** (1986) 157–176.
- [Hat] A. Hatcher. *On triangulations of surfaces*. Topology Appl. **40** (1991) 189–194.
- [Hir] M. Hirsch. *Differential topology*. Grad. Texts Math. **33**, Springer Verlag, 1976.
- [Iva1] N. V. Ivanov. *Automorphisms of Complexes of Curves and of Teichmüller Spaces*. Inter. Math. Res. Not. **14** (1997) 651–666.
- [Iva2] N. V. Ivanov. *Mapping class groups*. In "Handbook of Geometric Topology", R. Daverman, R. Sher eds, Elsevier (2001) 523–633.
- [Iva3] N. V. Ivanov. *Subgroups of Teichmüller modular groups*. Trans. Math. Mono. **115**, Amer. Math. Soc. (1992).
- [Kor] M. Korkmaz. *Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori*. Topology Appl. **95** (1999) 85–111.
- [Mas] H. Masur. *Two boundaries of Teichmüller space*. Duke Math. J. (1) **49** (1982) 183–190.
- [Nie1] J. Nielsen. *Abbildungsklassen endlicher Ordnung*. Acta Math. **75** (1943) 23–115.
- [Nie2] J. Nielsen. *Surface transformation classes of algebraically finite type*. Danske Vid Selsk. Math.-Phys. Medd. (2) **89** (1944) 23–115.
- [Nie3] J. Nielsen. *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*. Acta Math. **50** (1927) 189–358.
- [Nie4] J. Nielsen. *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen II*. Acta Math. (1) **53** (1929) 1–76.
- [Nie5] J. Nielsen. *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen III*. Acta Math. (1) **58** (1932) 87–167.

- [Ree] M. Rees. *An alternative approach to the ergodic theory of measured foliations on surfaces*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1981) 461–488.
- [Tho] C. Thomassen. *The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces*. Amer. Math. Monthly (2) **99** (1992) 116–130.