Ensembles invariants des flots géodésiques des variétés localement symétriques

Par

A. Zeghib

C.N.R.S : U.M.R 128. Ecole Normale Supérieure de Lyon,
46, Allée d'Italie , 69364 LYON Cedex 07. FRANCE.

Abstract. We study the rectifiable invariant subsets of algebraic dynamical systems, determined by R-semisimple one parameter groups. We show that their ergodic components are algebraic. A more precise geometric description of this components is possible in some cases of geodesic flows of locally symmetric spaces with non-positive curvature.

Résumé. On étudie les sous-ensembles rectifiables invariants des flots algébriques définis par des groupes à un paramètres R-diagonalisable. On montre que leurs composantes ergodiques sont algébriques. Une description géometrique plus précise de ces composantes est possible dans certains cas de flots géodésiques de variétés localement symétriques à courbure non-positive.

§1. Introduction.

On s'intéresse ici aux sous-ensembles invariants (mais pas nécessairement fermés, et même éventuellement denses) rectifiables, de certains systèmes dynamiques. Dans la première partie (dynamique) de ce travail, on considère les systèmes dynamiques algébriques déterminés par des groupes à un paramètre R-semi-simple. On montre que les composantes ergodiques des parties rectifiables invariantes sont algébriques. Dans la seconde partie (géométrique) on interprète ce résultat dans le cas des flots géodésiques des variétés localement symétriques de courbure non-positive.

Partie I.

Un système dynamique algébrique consiste en : la donnée d'un groupe de Lie G, et de trois sous-groupes Γ, K et g^t tels que :

i) Γ est discret (mais pas nécessairement un réseau).

ii) K est compact.

iii) g^t est un groupe à un paramètre centralisant K : $g^t k = k g^t$ pour tout $k \in K$.

Ceci détermine un flot : $\phi^t(\Gamma x K) = \Gamma x g^t K$ sur $M = \Gamma \backslash G / K$. Un tel flot est dit algébrique. Soit G l' algèbre de Lie de G et α l'élément de G définissant g^t, i. e. $g^t = \exp t\alpha$. L'endomorphisme $ad\alpha$, de G ($ad\alpha(\beta) = [\alpha, \beta]$) est dit endomorphisme structural du flot algébrique. Le groupe à un paramètre de transformations linéaires de G, $\exp t ad\alpha$ est dit flot structural de notre flot algébrique.

Hypothèse. On suppose désormais que $ad\alpha$ est R-semi-simple (i. e. diagonalisable sur R).

Les définitions précises de rectifiabilité seront rappelées au §2. Disons pour l'instant qu'un ensemble rectifiable est l'image d'une application Lipschitzienne définie sur un borné d'un espace euclidien. Notons H^n, la mesure de Hausdorff de dimension n sur M (qui est munie d'une métrique déduite d'une métrique sur G, G-invariante à gauche et K-invariante à droite). Une partie $N \subset M$ est dite H^n-rectifiable si elle est de H^n-mesure finie, et de plus si elle est modulo un ensemble H^n-négligeable, une réunion dénombrable de parties rectifiables.

Partie algébrique. Une partie fermée $N \subset M$ est dite algébrique si elle projection dans M d'une partie de G de la forme xH, où H est un sous-groupe fermé et connexe de G. Elle est donc également projection d'une parie $Lx \subset G$, avec $L = xHx^{-1}$, comme H un sous-groupe fermé de G. La formulation xH est adaptée aux systèmes dynamiques, en effet lorsque K est trivial, N est l'orbite (fermée) du point Γx par le sous-groupe H, agissant à droite sur $M = \Gamma\backslash G$. La formulation Lx est adaptée à la géométrie, en effet G agit isométriquement à gauche sur G/K, et L(xK) est donc l'orbite de xK par le groupe d'isométries L.

Théorème A. Soit (M, φ) un système dynamique algébrique à endomorphisme structural R-semi-simple. Soit N une partie H^n-rectifiable invariante. Alors la mesure de Hausdorff H^n est préservée par le flot (N, φ). Ses composantes ergodiques sont algébriques.

Cet énoncé doit être compris au sens de la théorie ergodique, c'est-à-dire que pour une certaine décomposition ergodique (définie presque partout), les composantes ergodiques munies de leurs mesures conditionnelles sont des projections de parties de la forme xH, munis de leurs mesures de Haar (qui est à une constante près la même que la mesure de Hausdorff). En particulier ces parties sont de mesures de Hausdorff finies.

La finitude de la H^n-mesure de N n'est utilisée que pour en déduire la conservation de la restriction de H^n à N (voir §4.1.2). Une régularité locale, de type rectifiabilité et la conservation d'une mesure équivalente à la mesure de Hausdorff, suffisent :

Théorème A'. Le théorème A s'étend aux parties N, σ-H^n-rectifiables (i. e. réunion dénombrable de parties H^n-rectifiables) et telle que (N, φ) préserve une mesure finie équivalente à la mesure de Hausdorff.

Description globale. Le résultat suivant, précise les théorèmes A et A', en décrivant le seul moyen de construction des parties invariantes σ-H^n-rectifiables et préservant une mesure finie équivalente à la mesure de Hausdorff (en particulier les parties H^n-rectifiables).
Avant de l'énoncer, notons Vol(S) = H^n(S), pour une partie S, H^n-rectifiable (on fait abstraction de la dimension de Hausdorff)

Théorème B. Considérons R, l'ensemble des sous-groupes fermés de G tels que :
i) Pour tout L R, L(Γ est un réseau de L (i. e. le quotient est de mesure de Haar finie).
ii) Pour tout L R, il existe x = x(L) G tel que $x^{-1}g^tx$ L, pour tout t R. Le flot ainsi défini sur ΓUL\L est ergodique au sens de la mesure de Haar. (Ces deux premières conditions signifient que la projection de Lx est une partie algébrique invariante, de volume fini et ergodique).
Notons Z le centralisateur de g^t dans G. Soit N une partie invariante, σ-H^n-rectifiable et telle que (N, φ) préserve une mesure finie équivalente à la mesure de Hausdorff. C'est le cas si N est H^n-rectifiable. Alors, il existe une suite L_i R, et pour tout i, S_i c Z, une

partie H^k-rectifiable (pour un certain k), tels que N soit (modulo un ensemble H^n-négligeable) la projection dans M de :) $L_i x_i S_i$. où $x_i = x(L_i)$. Si Vol(N) <∞, alors $\Sigma Vol(L_i(\Gamma \setminus L_i) Vol(S_i) < \infty$.

Remarque. Il paraît que l'ensemble R est dénombrable, mais on n'arrive pas à le démontrer complètement.

Historique. Classiquement, en systèmes dynamiques topologiques, on étudie les sous-ensembles invariants fermés, et même généralement compactes. Notre situation ici relève de la théorie ergodique géométrique. La condition de compacité perd un peu de sens et elle peut naturellement être remplacée par une condition de finitude de mesure.

En termes de géométrie ergodique, on peut (très vaguement) dire que notre travail permet de comprendre les “mesures géométriques” de notre système. Ce sont des mesures (finies) telles que la mesure d'une boule soit comparable à une puissance entière da son rayon (voir [Fed], 3.3.22). Par exemple toutes les variantes de mesures de Hausdorff sur les ensembles rectifiables.

Les systèmes qu'on considère sont partiellement hyperboliques (sauf dans le cas trivial où adα est nul et donc g^t est central dans G). Il est connu qu'ils admettent des sous-ensembles invariants (fermés) de divers topologies [Han] [Sta]. En fait il paraît que la rectifiabilité (ou disons pour simplifier la régularité C^1) est la régularité minimale permettant de comprendre les sous-ensembles invariants. Nos résultats ici montre réciproquement la force de cette condition de régularité, même en relâchant les conditions topologiques globales. Ils sont donc dans un certain sens optimaux.

Des questions sur les sous-ensembles invariants de systèmes hyperboliques (dans le cadre topologique) ont été étudiés dans [Hir], [Fra], [Han], [Hir], [Mañ]$_1$, [Mañ]$_2$, [Zeg]$_1$ et [Zeg]$_2$…

Remarquons enfin que parmi les flots algébriques, il y a (transversalement à notre situation) les flots unipotents (i. e. tels que adα soit nilpotent), qui ont suscité de grands travaux, couronnés par la démonstration par M. Ratner de la conjecture de Raghunathan (voir [Ghy] pour un rapport sur la question). Ici, la question de rigidité des ensembles invariants se pose sans aucune condition de régularité (locale).

Partie II.

Passons maintenant aux flots géodésiques des variétés localement symétriques. Commençons par traduire les théorèmes précédents dans ce cas (Ces flots géodésiques ne sont pas algébriques, mais ils n'en différent pas beaucoup (voir §9).

Soit donc V une variété riemannienne localement symétrique complète et à courbure non-positive, $\tilde{V}$ son revêtement universel et G le groupe d'isométries de $\tilde{V}$. Ce groupe agit à gauche sur $T^1\tilde{V}$, le fibré unitaire tangent à $\tilde{V}$. Cette action est isométrique quand $T^1\tilde{V}$ est muni de sa métrique naturelle.

Théorème C. Soit N une partie H^n-rectifiable (pour un certain n) de T^1V qui est invariante par le flot géodésique. Alors la mesure de Hausdorff sur N est conservée. Toute composante ergodique de N est la projection dans T^1V d'une partie de $T^1\tilde{V}$ de la forme L.v où v appartient à $T^1\tilde{V}$ et L est un sous groupe de G, fermé et connexe .

Remarque. Dans le théorème C ainsi que tous les résultats qui suivent, on peut changer l'hypothèse de complétude de V, i. e. la complétude de son flot géodésique, par l'hypothèse de complétude de ce flot le long de la partie invariante que l'on considère. Cela veut dire que pour tout vecteur v N, la géodésique déterminée par v est complète (et de plus contenue dans N).

Théorème C'. La conclusion du Théorème A est vraie sous l'hypothèse que N est s-H^n-rectifiable et (N,φ) préserve une mesure équivalente à la mesure de Hausdorff.

Ces résultats sont dans un certain sens optimaux. En général, on ne peut pas dire mieux sur la nature algébrique des groupes L, ou la géométrie des parties Lv du théorème C. En effet un flot algébrique à endomorphisme structural R-semi-simple assez général se plonge dans le flot géodésique d'une variété localement symétrique quotient de l'espace symétrique universel SL(n,R)/SO(n) (pour n assez grand)

Les résultats qui suivent traitent deux cas particuliers où l'on peut décrire géométriquement nos parties invariantes. le premier cas est celui où V est à courbure négative, et le second est celui où V est compacte.

Théorème D. Soit V une variété localement symétrique complète et à courbure négative. Soit N une partie H^n-rectifiable invariante par le flot géodésique sur T^1V. Alors il existe W, une sous-variété de V (pas nécessairement connexe), fermée, géodésique et de volume fini telle que N soit de mesure totale dans T^1W. Si de plus N est fermée alors N = T^1W.

Comme pour les théorèmes A et B, ce théorème admet l'extension suivante:

Théorème D'. Supposons V à courbure négative et N comme au théorème C'. Alors il existe une suite dénombrable W_i de sous-variétés géodésiques complètes telles que N soit de mesure totale dans la réunion des T^1W_i. Chacune de ces sous-variétés est de volume fini.

La non-errance est l'équivalent topologique de la conservation du volume. La même méthode de preuve des théorèmes A et C, nous donne le résultat suivant, démontré dans $[Zeg]_1$:

Théorème D". Supposons V à courbure négative. Soit N une sous-variété invariante, de classe C^1, telle que (N,φ) soit non-errant. Alors il existe dans V, une sous-variété W telle que N soit un ouvert de T^1W.

Remarques.

1. Les énoncés précédents ne sont pas "strictement" vrais pour n=1, c'est-à-dire Lorsque W est un cercle. Dans ce cas T^1W est somme de deux cercles. Pour être strict dans les énoncés précédents, convenons de n'en prendre qu'un seul (cercle)

2. Le théorème D' est "optimal". En effet soit $W_1,\ldots,W_n$, la liste (au plus) dénombrable des sous-variétés de V, géodésiques, de volume fini et de dimension d. Alors N =) T^1W_i est σ-H^{2d-1}-rectiafible et préserve une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue (par exemple $\Sigma(2^i/Vol(W_i))\mu_i$ où μ_i est la mesure de Liouville sur T^1W_i).

Ces résultats sont faux si la courbure n'est pas négative même dans le cas où V est compacte (§ 10). On a cependant :

Théorème E. Supposons dans le théorème C', que V compacte, et soit N_o une composante ergodique de N, projection d'une partie de la forme Lv. Alors le groupe L correspondant est un quotient fini d'un produit direct S x R où S est semi-simple et R est abélien. Il existe une orbite $\tilde{W}_1$ de L dans $\tilde{V}$, dont la projection W_1 dans V est une sous-variété géodésique fermée. Soit $\tilde{W}_o$ la projection de $\tilde{N}_o$ dans $\tilde{V}$. Alors la projection orthogonale de $\tilde{W}_o$ sur $\tilde{W}_1$ induit une semi-conjugaison de N_o sur une composante ergodique du flot géodésique de W_1 (défini sur T^1W_1).

Ce résultat ne s'étend pas aux variétés non-compactes (même pas celles de volume fini).

Organisation du texte.

Partie I. Au §2, on rappelle les principaux faits utiles pour ce texte, de la théorie des ensembles rectifiables. Le § 3 contient des généralités sur les flots algébriques.
La preuve des théorèmes A, A' et B occupent les §§ 4 à 8. On montre en 4.1.3 qu'en peut se restreindre au cas H^n-rectifiable (au lieu du cas σ-H^n-rectifiable et préservant une mesure finie équivalente à la mesure de Hausdorff). Ainsi le théorème A' est réduit au théorème A. Les développements qu'on fera entre les §§4 et 7, permettent de démontrer au même coup les théorèmes A et B, au §8.

Partie II. On ne démontre ici que les énoncés C, D et E et non C', D' et D", car les démonstrations sont les mêmes. Des généralités sur les flots géodésiques des variétés localement symétriques, ainsi que la preuve du théorème C seront données au §9. Au §10 (resp. §11), on démontre le théorème D (resp. E). Enfin des compléments au théorème C sont donnés au § 12.

§2. Préliminaires sur la rectifiabilité [Fed, Chapitre 3] [Mor].

Rappelons quelques notions de rectifiabilité de [Fed]. Notons pour cela H^n la mesure de Hausdorff n-dimensionnelle sur la variété riemannienne M.

Définition 1. Une partie N M est dite n-rectifiable si elle est image Lipschitzienne d'une partie bornée de R^n. Elle est dite rectifiable si elle est n-rectifiable pour un certain n.

Définition 2. N est dite σ-n-rectifiable si elle est réunion dénombrable de parties n-rectifiables. Elle est dite σ-rectifiable si elle est σ-n-rectifiable pur un certain n.

Définition 3. N est dite H^n-rectifiable si $H^n(N)<\infty$ et s'il existe une partie N', σ-n-rectifiable telle que $H^n(N-N') = 0$.

Par exemple, on déduit de la formule de l'aire (i. e. celle permettant de calculer la mesure de Hausdorff de l'image d'une application Lipschitzienne) qu'une partie N, n-rectifiable est H^n-rectifiable, i. e. que $H^n(N)<\infty$. Il peut cependant arriver que : $H^n(N) = 0$. La théorie générale affirme dans ce cas que N est $H^{n'}$-rectifiable pour un certain $n'<n$, et $H^{n'}(N) \neq 0$.

Définition 4. N est dite σ-H^n-rectifiable si elle est réunion dénombrable de parties H^n-rectifiables.

Exemple. Une partie H^n-mesurable d'une partie σ-H^n-rectifiable (resp. H^n-rectifiable) est évidemment σ-H^n-rectifiable (resp. H^n-rectifiable). Evidemment ceci n'est important que si cette partie est non H^n-négligeable.

2.1. Proposition (caractérisation). Une partie N est σ-H^n-rectifiable si et seulement si modulo un ensemble H^n-négligeable, N est contenue dans une réunion dénombrable disjointe de sous-variétés C^1 de <u>dimension n</u>. La partie N est H^n-rectifiable si de plus $H^n(N) <\infty$.

Exemple. Dans le carré $[0, 1]x[0, 1]$ c R^2, considérons N =){{r}xN(r) /r rationnel }, où N(r) c [0, 1] est une partie mesurable de mesure de Lebesgue $\varepsilon(r)$. On peut par exemple prendre N(r) ouverte et dense dans [0, 1]. Cette partie N est σ-H^1-rectifiable. Elle est H^1-rectifiable si de plus $\Sigma\varepsilon(r) < \infty$. La caractérisation précédente ne permet ainsi pas d'avoir une image nette des ensembles rectifiables. On peut rendre cette exemple beaucoup plus compliqué, en choisissant la famille dénombrable de sous-variétés contenant notre partie H^1-rectifiable, de façon aléatoire (et non comme ici, faisant partie d'un feuilletage).

2.2. Espace tangent. Le cône tangent de N en un point x N, se définit comme l'ensemble des vecteurs v T_xM, limites de suites $\lambda_m v_m$, où λ_m R et v_m T_xM, avec $\exp_x v_m$ N (exp est l'application exponentielle en x de la variété riemannienne M). Dans l'exemple précédent, en supposant N(r) sans point isolé, le cône tangent en tout point de N est R^2.

Pour les parties σ-H^n-rectifiables, il y a une notion de cône tangent, qui est en fait, H^n presque partout, un espace vectoriel de dimension n. On l'appellera espace tangent. L'espace tangent de l'exemple précédent est H^1presque partout égal à $\{0\}xR$. En général, on considère une famille disjointe de sous-variétés comme dans 2.1. L'espace tangent en

un point sera l'espace tangent de la sous-variété qui le contient. La définition directe (qui n'utilise pas 2.1) de l'espace tangent de N en x, consiste grosso modo à prendre l'intersection de tous les cônes tangents des sous-ensembles de N, pour lesquels x est un point de densité (au sens de la mesure H^n restreinte à N).
Remarquons enfin que l'espace tangent d'une partie σ-H^n-rectifiable est un chanp de plan, mesurable sur cette partie.

2.3. Même si leur structure paraît un peu compliquée, les opérations sur les ensembles rectifiables sont assez souples (comme peut-être pour les ensembles analytiques). Pour l'illustrer, rappelons que le théorème de Rademacher dit qu'une application Lipschitzienne entre deux variétés riemanniennes est presque partout dérivable. Ceci s'étend aux restrictions d'applications Lipschitziennes à des parties H^n-rectifiables. La dérivée dans ce cas sera définie entre les espaces tangents au sens précédent.

Proposition. Soit N une partie de M, H^n-rectifiable et $p : N \to T$ une application Lipschitzienne dans une variété riemannienne T. Supposons le rang de Dp, H^n presque partout égal à une constante k. Alors, modulo un sous-ensemble de N, H^n-négligeable, on a :
i) L'image p(N) est σ-H^k-rectifiable.
ii) Pour H^k presque tout y dans p(N), $p^{-1}\{y\}$ est H^{n-k}- rectifiable.
iv) **(Continuité absolue)**. Une partie Ac N, est H^n négligeable si et seulement si pour H^k presque tout point y de p(A), $A(p^{-1}\{y\}$ est H^{n-k} négligeable.

Remarques.

1. Il est nécessaire de négliger des parties négligeables comme le montre l'exemple de la projection $p : R^3 \to Rx(0,0)$, et N la réunion d'une partie de mesure de Lebesgue positive dans (0)xR et d'un segment de Rx(0,0).

2. La continuité absolue peut s'énoncer en disant que la désintégration de la mesure de Hausdorff H^n sur N, suivant p (c'est-à-dire suivant la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $p(x) = p(y)$), admet pour mesures conditionnelles des mesures équivalentes à la mesure de Hausdorff H^{n-k} sur les classes d'équivalence, et pour mesure image la mesure de Hausdorff H^k sur p(N). Tout cela découle d'une formule (exacte) dite formule de la co-aire.

2.4. Densité. Pour ε réel positif et x N, considérons la “ε-densité n-dimensionnelle” $\Theta_\varepsilon(x) = H^n(N(B(x, \varepsilon) / c(n)\varepsilon^n$, où $B(x, \varepsilon)$ est la boule de M de rayon ε et centre x, et c(n) est le volume de la boule unité de l’espace euclidien R^n (par exemple c(1) = 2).

2.4.1. Proposition. Soit N une partie H^n-rectifiable. Alors pour H^n presque tout point x de N, $\Theta_\varepsilon(x)$ tend vers 1 quand ε tend vers 0.

2.4.2. Corollaire. Soit N une partie H^n-rectifiable et $p : N \rightarrow T$ une application Lipschitzienne de rang constant k. Pour x N, considérons $\Theta_\varepsilon(x)$ la ε-densité (n-k)-dimensionnelle du niveau $p^{-1}\{p(x)\}$. Alors pour presque tout x N, $\Theta_\varepsilon(x)$ tend vers 1 quand ε tend vers 0.

Preuve (du corollaire). D’après 2.3, pour H^k presque tout y $p(N)$, $p^{-1}\{y\}$est H^{n-k}-rectifiable. Il résulte de 2.4.1 que pour un tel y, presque tout x $p^{-1}\{y\}$, $\Theta_\varepsilon(x)$ tend vers 1 quand ε tend vers 0. On conclut par continuité absolue. Ù

La proposition suivante sera d’un grand intérêt pour la preuve des théorèmes A et B.

2.5. Proposition. Supposons que M est un groupe de Lie G, et que N est une partie H^n-rectifiable, dont l’espace tangent est invariant à gauche, i. e. pour H^n presque tout x N, $T_xN = xG'$, où G’ est un sous-espace vectoriel de dimension n de l’algèbre de Lie G. Alors G’ est une sous-algèbre, déterminant un sous-groupe immergé G’, et N est contenue dans une réunion dénombrable de parties de la forme xG’.

Preuve. Montrons que G’ est une sous-algèbre. Il suffit pour cela de montrer que pour tout X G’, si $g^t = \exp tX$ est le groupe à un paramètre qu’il détermine, alors $g^{-t}G'g^t = G'$, pour tout, ou même presque tout t R.
Soit τ un sous-groupe (dénombrable) dense dans R engendré par 1 et un nombre irrationnel. Pour toute partie A c R de mesure de Lebesgue non nulle, la réunion){A+t / t τ} est de mesure totale dans R (car une rotation irrationnelle sur le cercle est ergodique). Considérons N’ la réunion (dénombrable) de translatés Ng^t, pour t parcourant τ. C’est une partie σ-H^n-rectifiable. Considérons l’espace tangent T_yN', et définissons $f(y) = yT_yN'$, qui appartient à la Grassmannienne des n-plans de G.
Pour presque tout x N, l’ensemble des t R, tels que xg^t N est non-négligeable dans R. Pour le voir, on applique comme à la fin de cette preuve, la proposition 2.3 à la projection de G sur l’espace des orbites de X.

Il découle de ce qui précéde que pour presque tout x N et presque tout t R, on a : xg^t N'. Pour $y = xg^t$, on a : $T_yN' = xG'g^t = yg^{-t}G'g^t$. Donc en général $f(yg^t) =$ $g^{-t}f(y)g^t$ pour tout t τ. Considérons la restriction f' de f à l'orbite xg^t, identifié à R. Elle vaut G' sur A = {t R / xg^t N}, qui est de mesure de Lebesgue positive. Soit A' = {y = xg^t / f'(y) = G'}. Les translatés A'+t, quand t parcourt τ, forment une partition τ-invariante de R. Cette partition est triviale par ergodicité. Donc A' est de mesure totale dans R. Cela veut dire que $g^{-t}G'g^t$ = G' pour presque tout t R. Donc G' est bien une sous-algèbre.

Soit G' le groupe déterminé par G'. Il détermine un feuilletage invariant à gauche dont les feuilles sont les translatés xG'. Notons T l'espace quotient de ce feuilletage au voisinage U d'un point de N, et p : N(U → T, la projection. L'hypothèse de la proposition signifie que p est de rang 0. Donc, d'après 2.3 (après avoir négliger ce qu'il faut) p(N(U) est dénombrable. Donc N(U est contenue dans une réunion dénombrable de feuilles. Ù

§3. Généralités sur les flots algébriques (à endomorphismes sturtural R-semi-simple)..

3.1. Notations. Reprenons les notations de l'intoduction : G, un groupe de Lie ; g^t = exptα, un sous-groupe à un paramètre où α G, à l'algèbre de Lie de G…

On avait supposé adα : G → G, diagonalisable sur R. Pour λ valeur propre, notons G_λ, l'espace propre correspondant.

L'identité de Jacobi : adα[X, Y] = [adα(X), Y]+[X, adα(Y)], entraîne que si X G_λ et X' $G_{\lambda'}$, alors [X, X'] $G_{\lambda+\lambda'}$.

On en déduit que si λ >0 (resp. <0), alors G^+_λ (resp. G^-_λ), la somme des sous-espaces $G_{\lambda'}$ pour λ' > (resp. <) λ, est une sous-algèbre. On notera G^+_λ (resp. G^-_λ) le sous-groupe de G correspondant.

On a en particulier les sous-algèbres suivantes : G^{ss}, G^{s0}, G^{00}, G^{u0} et G^{uu}. Elles sont somme des espaces propres correspondants aux valeurs propres repectivement < 0, ≤ 0, = 0, ≥ 0 et > 0. On a également G^s et G^u qui s'obtiennent en ajoutant Rα à G^{ss} et G^{uu} respectivement. On notera G^{ss}, G^{s0}, G^{00}, G^{u0}, G^{uu}, G^s et G^u les sous-groupes (immergés) qu'elles déterminent respectivement.

3.2. Pour tout X élément de G^{ss} (resp. G^{uu}), ad(X) est à spectre réel. En effet ad(X) est nilpotent. Pour le voir on peut supposer que X appartient à un certain G_λ (λ≠0). L'identité de Jacobi entraîne alors que $ad^n(X)$ envoie G dans $G_{n\lambda}$. Mais pour n assez grand nλ ne sera pas une valeur spectrale de ad(α), donc $G_{n\lambda} = 0$.

3.3. L'affirmation suivante permet de justifier l'usage de certains quotients de G (même s'il y a toujours une façon de s'en passer). Supposons pour cela que, désormais G est simplement connexe

Affirmation. Tous les sous-groupes précédents sont fermés (dans G).

Preuve. Pour G^{00} qui n'est rien d'autre que le centralisateur de g^t dans G, l'affirmation est évidente. Il est par contre moins évident (et faux sans la simple connexité) que le groupe à un paramètre g^t lui-même soit fermé. On va montrer ici que G est fermé (les autres cas se traîtent de la même façon).
Considérons une décomposition de Levi en produit semi direct G = R.S, où R est le radical de G (plus grand sous-groupe distingué résoluble) et S est semi-simple [Rag]. Ces deux sous-groupes sont comme G simplement connexes. On va traîter dans ce qui suit les deux cas extrêmes : G = R et G = S. Le cas général s'en déduit aisément.

Cas où G = R, i. e. G est résoluble. Il est connu dans ce cas que l'application exponentielle exp : $G \rightarrow G$ est un difféomorphisme [Ser]. Tous les sous-groupes connexes de G sont donc fermés, puisqu'ils sont images par exp de sous-espaces de G.

Cas où G = S, i. e. G est semi-simple. Les sous-groupes à un paramètre R-semi-simple se décrivent dans ce cas facilement. Soit n = dimG, et Ad : G $\rightarrow$ SL(n, R). Alors $h^t = Ad(g^t)$ est un groupe à un paramètre de Sl(n, R), R-semi-simple [War]. Evidemment pour montrer que G est fermé, il suffit que le groupe stable analogue, correspondant à h^t l'est. Après conjugaison, on peut supposer h^t diagonale. Le groupe stable de h^t est donc un sous-goupe du groupe (fermé dans SL(n, R)) des matrices triangulaires supérieures avec 1 sur la diagonale. Ce dernier groupe est nilpotent et simplement connexe. Comme dans le cas résoluble, tous ses sous-groupes sont fermés.

Ù **3.4. Dans M = $\Gamma \backslash G$**. On a une action à droite, localement libre de G sur M, prolongeant notre flot : $\phi^t(x) = xg^t$ (Ce ne serait pas le cas dans $\Gamma \backslash G/K$ si K est non-trivial).

3.4.1. En particulier les sous-groupes précédents agissent sur M, et y déterminent des feuilletages. Si G' est l'un de ces groupes , on notera xG' la feuille de x et xG' son espace tangent en x.

3.4.2. A tout X G, correspond un champ vectoriel qu'on notera également X, sur M. Son flot est la multiplication $x \rightarrow x\exp tX$. Notons que X G_λ si et seulement si $D\phi^t(X) = e^{\lambda t}X$.

3.4.3. M est canoniquement parallélisable à l'aide des applications : $P_x : T_xM \rightarrow T_1M$, définies par : $P_x(X(x)) = X(1)$ où 1 correspond à l'élément neutre de G.

§4. Début de la preuve. Sous-espaces tangents et feuilletages de N.

4.0. Conventions.

1. Pour les théorème A et B, il suffit évidemment de considérer le cas où M est de la forme $\Gamma\backslash G$, i. e. K est trivial. On le supposera donc désormais.

2. Le terme "presque partout" sera utilisé au sens d'une mesure de Hausdorff (de dimension n, restreinte à une partie σ-H^n-rectifiable), qu'on ne précisera pas mais qui sera évidente par le contexte. On utilisera également le terme "essentiellement égal" pour dire que deux parties sont égales modulo des sous-ensembles négligeables (au sens d'une mesure de Hausdorff évidente par le contexte) de chacune d'elles.

Soit Nc $\Gamma\backslash G$, une partie σ-H^n-rectifiable, φ-invariante. La proposition suivante se démontre exactement comme la proposition 9.1 de $[Zeg]_2$. Elle peut également (ainsi que la proposition 4.1.2) se démontrer directement à l'aide d'une variante de l'application de Gauβ, qu'on introduira en 5.2.

4.1.1. Proposition. Supposons que le flot (N, φ) préserve une mesure μ. Alors pour μ-presque tout x N, l'espace tangent T_xN est somme de ses intersections avec les sous-espaces xG_λ, quand λ parcourt le spectre de adα. En particulier T_xN = $T_xN(xG^{ss}$ $T_xN(xG^{00}$ $T_xN(xG^{uu}$.

Un cas intérréssant où s'applique la proposition est celui d'une partie H^n-rectifiable. Dans ce cas (N, φ) préserve la mesure de Hausdorff :

4.1.2. Proposition. ($[Zeg]_2$, Théorème A) Une partie H^n-rectifiable invariante par un flot algébrique dont l'endomorphisme structural est à spectre réel, préserve la mesure de Hausdorff H^n.

Remarque. La mesure de Hausdorff est prise au sens de n'importe quelle métrique sur M, provenant d'une métrique invariante à gauche sur G. Sur une partie N, générale, deux telles mesures correspondantes à deux métriques différentes sont équivalentes, mais pas nécessairement proportionnelles (i. e. la densité de l'une par rapport à l'autre est constante). Il suffit par exemple de considérer des produits scalaires différents sur R^m.

La proposition suivante nous permettra de ramener la preuve du théorème A' à celui du théorème A, ainsi que le cas σ-H^n-rectifiable du théorème B au cas H^n-rectifiable.

4.1.3. Proposition. Soit N, une partie φ-invariante, σ-H^n-rectifiable et préservant une mesure μ équivalente à la mesure de Hausdorff. Alors N est réunion dénombrable de parties φ-invariantes et H^n-rectifiables.

Preuve. Soit ν la mesure (σ-finie) de Hausdorff sur N. D'après 4.1.1, T_xN est somme de ses intersections avec les sous-espaces xG_λ. On déduit de 3.4.2 que $\det(D_x\varphi^t)$ s'ecrit comme expta(x), pour une certaine fonction a : $N \to R$, φ-invariante. Donc $\varphi^t\nu$ = expta(x)ν.
Ecrivons $\mu = f\nu$, où f est une fonction mesurable (Radon-Nykodim). Il découle de ce qui précéde que $f(\varphi^t(x))$ = exp-ta(x)f(x). Montrons que a est presque partout nulle. Supposons le contraire, par exemple a >0, sur un ensemble non-négligeable A. On peut supposer que la restriction de f à A est continue (sinon on remplace A par une partie un peu plus petite). D'après le Théorème de récurrence de Poincaré (appliqué à μ), il existe x A, et $t_n \to -\infty$, tel que $\varphi^{t_n}x$ A, $\varphi^{t_n}x \to x$. Ceci contredit évidemment la continuité de la restriction de f à A, au point x.
Ce qui précede signifie que la densité f est φ-invariante, et en particulier que φ preserve la mesure σ-finie ν. La finitude de μ entraîne que si A est une partie telle que $\nu(A) < \infty$, alors $\nu(A') < \infty$, où A' est le φ-saturé de A. En effet dans A, l' inverse de la densité f est sommable. Par invariance de f, ceci s'étend à A'.
La preuve de la proposition est terminée puisqu'on peut écrire N comme réunion dénombrable de tels A. A fortiori, N est réunion dénombrable (pas nécessirement disjointe) des A', qui vérifient bien les conditions de la proposition. Ù

4.2. Par 4.1.2, N est partitionée en un nombre fini de parties <u>φ-invariantes</u>, où toutes les dimensions $T_xN(xG_\lambda$ sont constantes. Evidemment, il suffit de démontrer les théorèmes A ou B pour chacune de ces parties, qui soit non-négligeable. Pour une telle partie, l'espace tangent est presque partout le même que celui de N.
On peut donc quitte à remplaçaer N par l'une de ces parties, supposer que toutes les dimensions considérées sont constantes.

Ce procédé, de substitition de N à un élément d'une partition dénombrable φ-invariante se répetera à plusieurs endroits dans ce texte.

4.3. Feuilletages de N. Soit U un voisinage dans M, d'un point x de N. Considérons T, l'espace quotient de la trace sur U du feuilletage de M défini par G^{ss}, et $p : N(U \rightarrow T$ la projection. Elle est Lipschitzienne puisqu'elle est restriction de la projection de U qui est analytique. D'après 4.2, le noyau de Dp est de dimension constante. Le rang de p est donc constant, égal à k. Appliquons 2.3. On verra ainsi NUU (presque partout) partitionné en parties H^{n-k}-rectifiables. On notera $W^{ss}_{Loc}(x)$ la partie contenant x. On appellera W^{ss}_{Loc} , le feuilletage stable local de N (même s'il est loin d'avoir les propriétés de continuité exigées aux feuilletages usuels).
On définira un feuilletage stable (global) W^{ss}, en relevant N dans G et considérant la projection globale $G \rightarrow G/G^{ss}$.
On définit de même des feuilletages W^{uu}_{Loc} , W^{00}_{Loc} , W^{s0}_{Loc} , W^{u0}_{Loc} , W^{s}_{Loc} et W^{u}_{Loc} , respectivement instable local, central local, stable-central local, instable-central local, stable faible local et instable faible local, ainsi que des feuilletages globaux correspondants notés de la même façon en omettant l'indice "Loc".

4.4. Ergodicité partielle.

Proposition. Soit $f : N \rightarrow R$, une fonction mesurable bornée, φ-invariante. Alors pour presque tout x, f est presque partout constante sur $W^{ss}(x)$ et $W^{uu}(x)$. Plus précisement, en enlevant une partie invariante négligeable de N, on aura : pour tout x, f est (partout) constante sur $W^{ss}(x)$ et $W^{uu}(x)$.

Preuve. On fait recours à la méthode de preuve standard, utilisée pour démontrer l'ergodicité des flots d'Anosov [Ano]. Démontrons la proposition pour W^{ss}. Pour tout n, soit g^n, une application Lipschitzienne telle que $|f(x)-g^n(x)| \leq 1/n$ presque partout. Considérons la somme de Birkhoff $g^n_t(x) = t^{-1} \int_o^t g^n(\varphi^s(x))ds$. On a $|f(x)-g^n_t(x)| \leq 1/n$, presque partout. Donc si g^* est la limite presque partout de $g^n_t(x)$, alors $|f(x)-g^*(x)| \leq 1/n$, sur un ensemble A_n de mesure totale.
Remarquons maintenant que si $g^n_t(x)$ converge vers $g^*(x)$, alors pour tout y $W^{ss}(x)$, $g^n_t(y)$ converge vers $g^*(y) = g^*(x)$. Pour le voir, notons *l* la constante de Lipschitz de g^n, et λ la plus grande valeur propre négative de $ad\alpha$. Pour deux points x et y de M, sur une même feuille du feuilletage défini par G^{ss}, Il découle de 3.4.2 que : $d(\varphi^t x, \varphi^t y) \leq e^{t\lambda} d(x, y)$, où d est la distance induite (d'une métrique riemannienne invariante à gauche

sur G). Il s’ensuit que ê$g^n{}_t(x)$-$g^n{}_t(y)$ê $\leq t^{-1} l \int_0^t e^{s\lambda} d(x, y)ds$. Ceci converge vers 0 car λ < 0. D’où l’affirmation.

Il en résulte que l’oscillation de f sur les feuilles de la trace du feuilletage W^{ss} dans A_n est plus petite que 1/n. Cette oscillation est donc nulle sur toute intersection $W^{ss}(x)$(A, où A est l’intercection de tous les A_n. Or la continuité absolue (2.3) entraîne que $W^{ss}(x)$(A est de mesure totale dans $W^{ss}(x)$.

La même preuve s’applique à W^{uu}. Pour montrer la dernière partie de la proposition, considérons N’, l’ensemble des points x de N vérifiant : f est presque partout constante sur $W^{ss}(x)$. D’après ce qui précéde N’ est de mesure totale dans N. Pour tout x N’, soit B(x) c $W^{ss}(x)$, l’ensemble des points y de $W^{ss}(x)$, tels que f(y) soit différente de la valeur essentielle de f restreinte à $W^{ss}(x)$ (on peut définir cette valeur essentielle comme moyenne (locale) de f sur $W^{ss}(x)$). La réunion de tous les B(x) est une partie mesurable, et négligeable d’après la continuité absolue de W^{ss}. Dans N”, le complémentaire de cette réunion , on a : pour tout x, f est constante sur $W^{ss}(x)$.

Maintenant , à partir de N”, on refait la même construction à l’aide de W^{uu}. Ce qu’on obtiendra à la fin, vérifie bien la proposition. Ù

§5. Structure des feuilletages stable et instable de N.

Le présent § est consacré à la preuve de :

5.1. Proposition. Quitte à remplacer N par une partie de mesure totale (dans N), on a : pour tout x N, il existe un sous-groupe connexe H_X^{ss} , tel que pour tout x N, $W^{ss}(x)$ est une partie de mesure totale dans xH_X^{ss} . L’application x → H_X^{ss} (ou de manière équivalente x → H_X^{ss}) est mesurable en x, et φ-invariante. Il existent également des sous-groupes H_X^{uu} , H_X^{s} et H_X^{u} vérifiant la même propriété pour les feuilletages W^{uu}, W^s et W^u.

Remarque. Insistons sur le fait que la proposition affirme qu’en remplaçant N par une partie de mesure totale, disons N’, alors : pour tout x N’, on a : $W^{ss}(x)$(N’, $W^{uu}(x)$(N’, $W^s(x)$(N’ et $W^u(x)$(N’ sont des parties de mesure totale dans x H_X^{ss} , x H_X^{uu} , x H_X^{s} et x H_X^{u} .

5.2. Existence de H_X^{ss} . Soit d la dimension de W^{ss}. Considérons l’application de Gauβ, Ga : N → $Gr^d(G)$

x → $P_X(T_X W^{ss}(x))$,

où $Gr^d(G)$ est la Grassmannienne des d-plans de G et $P_x : T_xM \to T_1M$ est le parrallélisme canonique (3.4.3). Considérons sur $Gr^d(G)$, le flot F^t déduit de exptadα = $Ad(g^t)$ agissant sur G. L'application Ga est équivariante entre (N, φ) et ($Gr^d(G)$, F^t). Il suffit pour le voir de regarder tout dans G, auquel cas : $Ga(x) = x^{-1}(T_xW^{ss}(x))$.

Il s'ensuit en particulier que si x est un point (N, φ)-récurrent, alors Ga(x) est un point ($Gr^d(G)$, F^t)-récurrent. Il n'est pas difficile de voir, puisque adα est R-semi-simple que les points récurrents de ($Gr^d(G)$, F^t) sont tous des points fixes ([Zeg]$_2$, §7.4). Il en résulte que Ga est une application φ-invariante. Appliquons la proposition d'ergodicité partielle (4.4) : après avoir négliger ce qu'il faut, Ga est constante le long de $W^{ss}(x)$. En regardant dans G, ceci s'interprète par : $T_yW^{ss}(x) = y^{-1}H_x^{ss}$, où par définition H_x^{ss} = Ga(x). Appliquons 2.5 : H_x^{ss} est une sous-algèbre déteminant un sous-groupe noté H_x^{ss} , et $W^{ss}(x)$ est contenue (modulo un sous-ensemble négligeable) dans une réunion dénombrable de translatés yH_x^{ss} .

Ainsi, on a construit une application : $x \to H_x^{ss}$, dont la mesurabilité et la φ-invariance sont évidentes. On construit de même les autres sous-groupes.

5.3. Complétude. Il s'agit maintenant de montrer que (presque partout) $W^{ss}(x)$ est en fait, essentiellement égal à xH_x^{ss} . Pour cela, il est naturel de regarder la"densité de $W^{ss}(x)$ par rapport à xH_x^{ss} ". Plus précisément, comme en 2.4.2, considérons :

$\Theta_\varepsilon(x) = H^d(W^{ss}(x)(B(x, \varepsilon))/c(d)\varepsilon^d$, où $B(x, \varepsilon)$ est la boule de xH_x^{ss} de rayon ε et centre x et d = $\dim W^{ss}(x) = \dim H_x^{ss}$.

D'après 2.4.2, pour presque tout x N, $\Theta_\varepsilon(x)$ tend vers 1 quand ε tend vers 0. L'idée maintenant est de montrer qu'en fait $\Theta_\varepsilon(x)$ est (presque partout) indépendant de ε. Il s'agit de montrer :

Affirmation. Pour tout ε fixé, disons $\varepsilon = 1$, on a : $\Theta_\varepsilon(x) = 1$ pour presque tout x.

Preuve. Commençons par le cas particulier suivant, qui sera la première étape de la preuve.

Un premier cas. Supposons précisement que presque partout H_x^{ss} est contenue dans un sous-espace propre G_λ de adα (3.1). (G_λ n'est pas nécessairement une sous-algèbre mais H_x^{ss} l'est). D'après 3.4.2, pour tout x, φ^t est une homothétie de rapport $e^{\lambda t}$ entre $B(x, \varepsilon) \subset xH_x^{ss}$ et $B(\varphi^t x, e^{\lambda t}\varepsilon) \subset \varphi^t(x)H_{\varphi^t x}^{ss} = \varphi^t(x)H_x^{ss}$. Il en résulte la formule :

5.3.1. $\Theta_{\varepsilon e^{\lambda t}}(\varphi^t x) = \Theta_\varepsilon(x)$.

Fixons ε et pour $c \geq 0$, soit $N(c, \varepsilon) = \{x \quad N/ 1\text{-}c \leq \Theta_\varepsilon(x) \leq 1+c\}$. D'après ce qui précéde, on a :

$$\varphi^{t}(N(c, \varepsilon)) = N(c, e^{\lambda t}\varepsilon).$$

Or d'après 2.4.2, $\Theta_{\varepsilon e^{\lambda t}}(x)$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$ (car $\lambda < 0$). Donc pour $c>0$, $H^n(N(c, e^{\lambda t}\varepsilon))$ tend vers $H^n(N)$ quand t tend vers $+\infty$. Mais φ^t préserve la mesure H^n. Il en résulte que pour tout $c>0$, $H^n(N(c, \varepsilon)) = H^n(N)$. Par conséquent $H^n(N(0, \varepsilon)) = H^n(N)$. Ceci veut exactement dire que pour presque tout x, $\Theta_\varepsilon(x) = 1$.

La preuve de l'affirmation est ainsi achevée dans ce cas particulier. Avant de passer au cas général, continuons la preuve de notre proposition dans ce cas particulier.

On sait d'après 5.2 que presque partout $W^{ss}(x)$ est essentiellement contenue dans une réunion dénombrable de translatés yH_X^{ss}. Démontrons qu'en fait $W^{ss}(x)$ est essentiellement égale à cette réunion dénombrable de tanslatés yH_X^{ss}.

Appliquons l'affirmation pour $\varepsilon = 1$. Par continuité absolue on a : pour presque tout x, presque tout $z \quad W^{ss}(x)$, vérifie : $\Theta_1(z) = 1$. Cela veut dire que $W^{ss}(z) = W^{ss}(x)$ contient presque toute la boule $B(z, 1)(zH_X^{ss}$. Soit y, tel que $W^{ss}(x)(yH_X^{ss}$ soit non négligeable. Ce qui précéde dit que $W^{ss}(x)(yH_X^{ss}$ contient presque tout son voisinage de rayon 1, dans yH_X^{ss}. Il en résulte évidemment que $W^{ss}(x)$ contient presque tout yH_X^{ss}.

Montrons maintenant $W^{ss}(x)$ est essentiellement égale à xH_X^{ss}, i. e. il'n y a pas d'autres translatés yH_X^{ss} coupant non-trivialement $W^{ss}(x)$. Supposons le contraire : il existe des y tels que $W^{ss}(x)(yH_X^{ss}$ soit non-négligeable et $yH_X^{ss} \neq xH_X^{ss}$.

Supposons que ces yH_X^{ss} ne s'accumulent pas sur xH_X^{ss}. Tel est par exemple le cas si leur nombre est fini. Ceci permettra de définir une fonction, $f : N \rightarrow R$, $f(x)$ étant la distance dans xG^{ss}, de x à la réunion des yH_X^{ss} différentes de xH_X^{ss}. Cette fonction est décroissante (exponentiellement) le long des orbites de φ (parce que tous les yH_X^{ss} sont contenus dans xG^{ss}), i. e. f est une fonction de Lyapunov pour φ. Ceci est impossible à cause du caractère conservatif de φ. Il en découle que les yH_X^{ss} s'accumullent sur xH_X^{ss}. Comme $W^{ss}(x)$ contient presque tout ces yH_X^{ss}, la densité $\Theta_\varepsilon(x)$ sera infinie pour tout $\varepsilon > 0$. Contradiction! Donc $W^{ss}(x)$ est essentiellement égale à xH_X^{ss}.

5.3.2. Cas général. Pour $x \quad N$, soit $\lambda(x)$ la plus plus petite valeur propre négative de $ad\alpha$, telle que xG_λ (T_xN soit non nul. Le spectre de $ad\alpha$ étant fini, ceci induit une partition finie de N. Comme en 4.2, en passant à une partie, on peut supposer que λ est constante dans N. On sait que G^-_λ est une sous-algèbre, qui détermine un sous-groupe G^-_λ. Ce dernier définit un feuilletage $x \rightarrow xG^-_\lambda$ de M. En répetant tout ce qu'on vient de

faire en remplaçant G^{ss} par G^{-}_{λ}, on obtient un feuilletage W^{λ} de N, qui est un sous-feuilletage de W^{ss}. L'hypothèse du premier cas est vérifié par ce feuilletage. Il existe donc pour presque tout x, un sous-groupe H_x^{λ} tel que $W^{\lambda}(x)$ soit essentiellement égale à xH_x^{λ} .
On déduit facilement de l'identité de Jacobi (3.1) que G^{-}_{λ} est un idéal de G^{ss}. Il en résulte en particulier que H_x^{λ} est un sous groupe distingué de H_x^{ss}
Soit $\lambda'(x)$ la plus petite des valeurs propres négatives de $ad\alpha$ qui sont plus grandes que λ, telle que : $xG^{-}_{\lambda'}$ (T_xN soit non nul. Comme précédement, on peut supposer λ' constante sur N. Faisons maintenant l'hypothèse suivante analogue à celle du premier cas : H_x^{ss} = $xG^{-}_{\lambda'}$ (T_xN (en d'autes termes, seuls xG_{λ} et $xG_{\lambda'}$ coupent non-trivialement T_xN).
On définit maintenant une densité Θ'_{ε} adaptée à la situation, et vérifiant en particulier la formule 5.3.1 avec λ remplacé par λ'. Une façon simple de la construire consiste à projetter dans le groupe quotient $H_x^{ss} / H_x^{\lambda} = H_x^{\lambda} \backslash H_x^{ss}$. La distance de H_x^{ss} s'y projette bien, et y sera H_x^{ss} -invariante, puisque H_x^{λ} est distingué. La densité de $W^{ss}(x)(xH_x^{ss}$ sera simplement la densité de la projection dans le groupe quotient. On démontre comme au premier cas, que pour ε fixé, on a $\Theta'_{\varepsilon} = 1$, presque partout.
Pour en déduire, comme au premier cas, que la densité de départ Θ_{ε} est presque partout égale à 1, on se rappele que déjà d'après le premier cas, $W^{ss}(x)(xH_x^{ss}$ est essentiellement invariante par H_x^{λ} .
Ainsi, en passant à la valeur propre suivante de λ' et ainsi de suite, on démontre en toute généralité :

Affirmation. Pour presque tout x, $W^{ss}(x)$ est essentiellement égale à xH_x^{ss} .

5.4. Fin de la preuve de la proposition. Il s'agit de "purifier" N, pour passer de "presque partout" à "partout". D'abord, l'affirmation précédente s'étend à W^{uu}, ainsi qu'à W^s et W^u qui ne sont rien d'autres que les saturés de W^{ss} et W^{uu} par φ. Considérons :
A_1 = {x   N / $W^{ss}(x)(N$ est une partie de mesure totale dans xH_x^{ss} }.
A_2 = {x A_1 / $W^{uu}(x)(A_1$ est une partie de mesure totale dans xH_x^{uu} }.
Ceci permet de construire par récurrence une suite emboitée de parties A_n. D'après l'affirmation précédente et la continuité absolue, toutes ces parties sont de mesure totale dans N. Il en va de même pour leur intersection N'.
Soit x   N'. Par construction, pour tout n pair, $W^{ss}(x)(A_n$ est une partie de xH_x^{ss} , de mesure totale. Il en résulte que $W^{ss}(x)(N'$ est une partie de xH_x^{ss} , de mesure totale. Le même raisonnement avec les n impairs entraîne que $W^{ss}(x)(N'$ est une partie de mesure totale dans xH_x^{uu} . Ceci achève la démonstration de la proposition. Ù

§6. La relation W^{su}.

Considérons sur N, la relation d'équivalence W^{su}, engendrée par W^s et W^u (ou de manière équivalente par W^{ss}, W^{uu}, et φ). La classe d'équivalence de x est notée $W^{su}(x)$.

6.1. Proposition. Modulo un sous-ensemble négligeable de N, on a : pour tout x, $W^{su}(x)$ est une partie de mesure totale dans xH_x^{su} , où H_x^{su} est le groupe engendré par H_x^{ss} , H_x^{uu} et g^t (ou de façon équivalente par H_x^s et H_x^u).

Preuve. Appliquons 4.4 et 5.1, on peut supposer que :
i) les applications $x \to H_x^s$, et $x \to H_x^u$, sont constantes sur toute feuille $W^{ss}(x)$ et $W^{uu}(x)$. Ces applications sont par suite constantes sur tout classe $W^{su}(x)$.
ii) Pour tout x, $W^s(x)$ (resp. $W^u(x)$) est une partie de xH_x^s (resp. xH_x^u) , de mesure totale.
Fixons x, et pour simplifier les notations, notons $A = H_x^s$ et $B = H_x^u$ et C le sous-groupe de G qu'ils engendrent, c'est-à-dire $C = H_x^{su}$.
Il est clair, d'après i, que tout pour tout y $W^{su}(x)$, il existe m tel que y = xh, avec $h = a_1b_1\ldots a_mb_m$ avec a_i A et b_i B. Donc $W^{su}(x)$ c xH_x^{su} .
Considérons l'application $f_2 : AxB \to C$, $f_2(a_1, b_1) = a_1b_1$. D'après ii, pour (a_1, b_1) dans une partie de AxB, de mesure totale, $h = f_2(a_1, b_1)$ vérifie: $y = xh = xa_1b_1$ appartient à N. Par conséquent y $W^{su}(x)$.
Il en sera de même pour l'application $f_3 : AxBxA \to C$, $f_3(a_1, b_1, a_2) = a_1b_1a_2$, ainsi que pour toutes les applications f_m définies de la même façon.
Il est connu que pour m assez grand, f_m est une submersion globale (car C est un groupe de Lie engendré par A et B). L'image d'un sous-ensemble de mesure totale sera de mesure totale dans C. Donc $W^{su}(x)$ est de mesure totale dans xC. Ù

6.2. Géométrie des feuilles de W^{s0}. Rappelons que W^{s0}, est la trace sur N, du feuilletage $x \to xG^{s0}$, de M et que G^{s0} est engendré par G^s (ou G^{ss}) et G^{00} (qui n'est rien d'autre que le centralisateur de g^t dans G).
L'identité de Jacobi (3.1), entraîne facilement que G^{ss} et G^s sont des sous-groupes distingués de G^{s0}. Ceci peut s'intérpreter géométriquement en disant que, pour x fixé, les feuilles yG^{ss} (ou yG^s), quand y parcourt xG^{s0}, sont parrallèles entre elles. En effet, regardons tout dans G et soit d_H est la distance de Hausdorff sur les parties de G (déduite d'une métrique invariante à gauche). Alors si y = xg et y' = xg' appartiennent à xG^{s0}, on a : $d_H(yG^{ss}, y'G^{ss}) = d_H(xgG^{ss}, xg'G^{ss}) = d_H(gG^{ss}, g'G^{ss}) = d_H(G^{ss}g, G^{ss}g') \leq$

$d(g, g') < \infty$. Donc d_H est bien une distance G^{s0}-invariante à droite sur l'espace des feuilles yG^s, quand y parcourt xG^{s0}. Ceci est naturellement une bonne façon de dire que ces feuilles sont parralèles entre elles.

Que peut-on maintenant dire des feuilles xH_x^{ss} quand x parcourt $W^{s0}(x_0)$. D'après 4.1.1 et 4.3, pour presque toute x_0, dans un voisinage U de x_0, $W^{s0}(x_0)$ est un sous-ensemble H^k-rectifiable, dont l'espace tangent est scindé :

$T_xW^{s0}(x_0) = (T_xW^{s0}(x_0)(xG^{ss}) \quad (T_xW^{s0}(x_0)(xG^{00})$ (pour H^k presque tout x $W^{s0}(x_0)$). Ce scindement donne présicément la restriction à $W^{s0}(x)$ des deux feuilletages W^{ss} et W^{00} de N.

Si $W^{s0}(x_0)$ est une sous-variété C^1, ces derniers feuilletages définnisseront une structure de produit local, i. e. pour x $W^{ss}(x_0)$ et y $W^{00}(x_0)$, proches de x_0, on a : $W^{00}(x)(W^{ss}(y)$ est non vide et réduit à un point noté [x, y]. En particulier l'application : x $W^{ss}(x_0) \rightarrow [x, y]$ $W^{ss}(y)$, est un homéomorphisme entre voisinages de x_0 et y dans leurs W^{ss}-feuilles.

Les choses se compliquent un peu plus dans le cas H^k-rectifiable : il faut bien "purifier" $W^{s0}(x)$ pour aboutir à un crochet [x, y] défini presque partout. Soit p, la restriction à $W^{s0}(x_0)$ de la projection : $x_0G^{s0} \rightarrow x_0G^{s0}/G^{00} = T$. La discussion précédente dit que lorsque $W^{s0}(x_0)$ est une sous-variété C^1, alors localement l'image de $W^{ss}(x)$ est égale à l'image de $W^{ss}(y)$. Considérons maintenant la relation $x \approx y$ si et seulement si $p(W^{ss}(x))$ et $p(W^{ss}(y))$ coïncident sur un ensemble de (H^d) mesure non nulle. Notons ~ la relation d'équivalence qu'elle engendre.

6.3. Affirmation. Il y a un nombre au plus dénombrable de classes d'équivalence de la relation ~.

Preuve. En effet d'après 2.3, $p(W^{s0}(x_0))$ est σ-H^d-rectifiable. Par définition l'intersection des projections de deux classes d'équivalences différentes est négligeable. Il ne peut y en avoir qu'une quantité dénombrable, puisque leurs projections sont presque toutes de mesure positives. Ù

Voyons maintenant, quelles conséquences peut-on tirer pour deux points x et y qui sont ~ équivalentes. Pour cela, relevons tous dans le groupe G et notons $\tilde{N}$ le relevé de N.

6.4. Affirmation. Notons pour x $\tilde{N}$, $\hat{H}_x^{ss} = x H_x^{ss} x^{-1}$. Si $x \sim y$ alors $\hat{H}_x^{ss} = \hat{H}_y^{ss}$.

Preuve. Evidemment on peut supposer que x≈ y. Pour simplifier, supposons x =1, et notons H = $\hat{H}_x^{ss}$ = x H_x^{ss} x^{-1} = H_x^{ss} , H' = y H_y^{ss} y^{-1} et Z = G^{00} qui est simplement le centralisateur de g^t dans G. L'hypothèse dit que pour h appartenant à une partie A c H, de mesure positive, hZ(yH_y^{ss} = hZ(H'y est non-vide. Donc pour h   A, il existe z   Z et h' = h'(h)   H', tels que :

hz = h'y (*).

On peut supposer que 1   A. Donc quitte à remplacer y par h'(1)y   H'y, on peut supposer que y   Z. La relation (*) devient ainsi :

Pour h   A, il existe h' = h'(h)   H' tel que h^{-1}h'   Z (**).

Le lemme suivant découle immédiatement de 3.4.2 :

Lemme. Il existe une partie Λ du spectre négative de adα, telle que H soit engendré par des groupes à un paramètres h^s, vérifiant $g^t h^s = h^{s\exp{-\lambda t}} g^t$ (pour tous s et t) et λ   Λ.

Ù

Supposons pour commencer que A contient un voisinage de 1. Appliquons (**) à h appartenant à A, et faisant partie d'un groupe à un paramètre comme dans le lemme. Il existera h' tel que h^{-1}h' commute avec g^t :

$h^{-\exp{-\lambda t}} g^t h'$ = (par le lemme) $g^t h^{-1} h'$ = (par **) $h^{-1} h' g^t$.

Donc : $h^{1-\exp{-\lambda t}} = h' g^t (h')^{-1} g^{-t}$.

Mais d'après le lemme précédent (qui s'applique évidemment à tout H_y^{ss}), g^t normalise H_y^{ss} . Il normalise par suite également H' = $y^{-1} H_y^{ss}$ y, car y   Z. Donc le second membre de la dernière égalité appartient à H'. Le premier membre appartient évidemment à H. Le point, c'est qu'il n'est pas trivial. En jouant sur t, on obtient que $h^{1-\exp{-\lambda t}}$ H', pour 1-exp-λ t parcourant un intervalle proche de 0. Il s'ensuit facilement puisque H' est un sous-groupe, que tout le groupe à un paramètre h^s est contenu dans H'. Il en résulte que Hc H', car ces derniers groupes à un paramètres engendrent H. L'inclusion inverse s'obtient de la même façon. Donc H = H'.

Maintenant , le cas général où A est simplement de mesure positive se traîte de la façon suivante. Supposons d'abord que le sous-ensemble Λ du lemme est réduit à une seule valeur λ. Dans ce cas tout h   H, vérifie la condition du lemme. Remarquons que pour arriver à l'inclusion Hc H', il suffit de considérer d éléments (d = dimH) h_i H, de la forme expα_i, et tels que les α_i, engendrent H (en tant qu'espace vectoriel). Ces h_i, existent en supposant que 1 est un point de densité de A.

Le cas où Λ contient plus qu'une valeur se traîte par une récurrence analogue à celle 5.3.

Ù

§7. Composantes ergodiques.

7.1. Considérons $\tilde{N}$ le relévement de N dans G, $\tilde{W}^{su}$ et $\tilde{W}^{00}$ les relévements de W^{su} et W^{00} dans $\tilde{N}$. Pour presque tout x $\tilde{N}$, la réunion u{ $\tilde{W}^{su}(y)$ / y $\tilde{W}^{00}(x)$} est invariante et non-négligeable dans $\tilde{N}$. On peut donc comme en 4.2, supposer que $\tilde{N}$ est égale à la réunion u{ $\tilde{W}^{su}(x)$ / x $\tilde{W}^{00}(x_0)$}, pour un certain x_0. Donc

$$\tilde{N} = u\{ \tilde{W}^{su}(x) /\ x \quad x_0 S, \text{ où S est une partie de } Z = G^{00}\}$$

7.2. D'après 6.1, (modulo un ensemble négligeable) $\tilde{W}^{su}(x)$ est une partie de mesure totale dans $x H_x^{su} = \hat{H}_x^{su} x$, où $\hat{H}_x^{su} = x H_x^{su} x^{-1}$. Le sous-groupe $\hat{H}_x^{su}$ n'est rien d'autre que le groupe engendré par $\hat{H}_x^{ss}$, $\hat{H}_x^{uu}$ et g^t, où $\hat{H}_x^{uu} = x H_x^{uu} x^{-1}$ se définit de la même façon que $\hat{H}_x^{ss}$ (6.3) .

Les affirmations 6.3 et 6.4 s'étendent à $\hat{H}_x^{uu}$. Il en découle que 6.4 s'étend à $\hat{H}_x^{su}$. Mais par définition $\hat{H}_x^{ss}$ est constant sur les feuilles de $\tilde{W}^{su}$. Or $\tilde{W}^{su}$ et $\tilde{W}^{00}$ sont transversres. Il en résulte que (modulo un ensemble négligeable) l'application : x $\tilde{N}$ $\to \hat{H}_x^{su}$, prend au plus un nombre dénombrable de valeurs.

Affirmation. On peut se ramener (en modifiant M et N) au cas où l'application $x \to \hat{H}_x^{su}$ est constante dans $\tilde{N}$. Ainsi si $L_0 = \hat{H}_x^{su}$ (pour n'importe quel x $\tilde{N}$) , alors :

$$\tilde{N} = L_0 x_0 S, \text{ où S est une partie de } Z = G^{00}.$$

Preuve. Considérons un niveau (non-négligeable) $\tilde{N}_o$ de l'application $x \to \hat{H}_x^{su}$. On remplace N par la projection dans M de ce niveau. Maintenant l'image réciproque de N est simplement le Γ-saturé de $\tilde{N}_o$. Pour être sur que notre application est constante sur cette image réciproque, on change M = Γ\G, en remplaçant Γ par le sous-groupe Γ'cΓ, des éléments conservant $\tilde{N}_0$ (l'image réciproque devient ainsi $\tilde{N}_0$ elle-même). Remarquons que cette modification ne change pas la projection de N dans M, puisqu'elle s'identifie dans tous les cas à Γ' \ $\tilde{N}_0$. Ù

7.3. Quelques sous-groupes.

7.3.1. Γ normalise L_0 : $\gamma L_0 = L_0 \gamma$, pour tout γ Γ. En effet :

$$\gamma L_0 x = \gamma \tilde{W}^{su}(x) = \tilde{W}^{su}(\gamma x) = L_0 \gamma x$$

7.3.2. Notons :

$L_1 = \Gamma L_0 = L_0 \Gamma$ le sous-groupe engendré par L_0 et Γ.

L_2 = La fermeture de L_1 dans G.
L = la composante neutre dans L_2.

Tous ces sous-groupes sont normalisés par Γ. Il en résulte que L_0 est distingué dans L_1, ainsi que dans L_2 et L.

7.3.3. D'après l'affirmation précédente $\tilde{N} = Lx_0S$, où S est une partie de $Z = G^{00}$. Le reste de ce § est consacrée à la preuve de:

7.4. Proposition. Les composantes ergodiques de (N, φ) sont exactement les projections des parties Lx, munis de leurs mesures de Hausdorff. De plus, on peut écrire $\tilde{N} = Lx_0S_0$, où S_0 est une partie de $Z = G^{00}$, H^d-rectifiable où d = dimN-dimL. Plus précisément si n = dimN et k = dimL, alors on peut choisir S_0 de telle façon que $H^d(L_{x0})xH^k(S_0) \leq 2H^n(N)$, où L_{x0} est la projection de Lx_0 (7.4.1).

7.4.1. On déduit du fait que Γ normalise L que les orbites (à gauche) {Lx, x $\in$ G} se projette bien dans $M = \Gamma\backslash G$, et y détérmine un feuilletage L (cela ne veut pas dire que L agit à droite sur M).

7.4.2. Les feuilles de L sont fermées dans M (car le Γ-saturé d'une feuille Lx est L_2x, qui est par définition fermée dans G). Plus précisement L est défini par la fibration $M = \Gamma\backslash G \to \Gamma L\backslash G = L_2\backslash G = T$. Notons $p : N \to T$, la restriction à N de la projection. Par définition, pour $x \in \tilde{N}$, Lx contient $\tilde{W}^{su}(x)$. Il s'ensuit en particulier que, dans N, les feuilles de L sont φ-invariantes (i. e. contiennent les φ-orbites de leurs points). Il en résulte que la décomposition ergodique de (N, φ) est moins fine que L (parce que p est mesurable et φ-invariante).
D'après 2.3, presque tout niveau de p est H^k-rectifiable pour un certain k, et les conditionnelles de la mesure de Hausdorff de N sur ses niveaux sont équivalentes à H^k.

Soit x un point de N, contenu dans un niveau H^k-rectifible. Le flot ($L_x \cup N$, φ) respecte donc H^k (d'après 4.1.2). Il respecte également la mesure conditionnelle m_x, qui est équivalente à H^k. Ces deux mesures seront donc égales à constante multiplicative près si H^k est ergodique.
La preuve de la proposition sera donc achevée si l'on montre que H^k est ergodique et que k = dimL.

7.5. Par définition, pour x $\tilde{N}$, $\tilde{W}^{su}(x) = L_0x = xx^{-1}L_0x$. Fixons un point x_0 de $\tilde{N}$. Il résulte du fait que L_0 soit distingué dans L, que $x^{-1}L_0x = x_0^{-1}L_0x_0$ pour tout x Lx_0. En particulier $x_0^{-1}L_0x_0$ agit à droite sur Lx_0, ainsi que sur sa projection L_{x_0}. Sur N' = NUL_{x_0}, les orbites de cette action ne sont rien d'autres que les feuilles de W^{su}.
Notons que cette action est minimale, i. e. toutes ses orbites sont denses. En effet le Γ-saturé fermé de $x(x_0^{-1}L_0x_0)ULx = L_0xULx_0$ est simplement $Lx = Lx_0$.
D'après 3.2 , L_0 et par suite $x_0^{-1}L_0x_0$ sont engendrés par des éléments à spectre réel. Il en résulte d'après 4.1.2 que l'action de $x_0^{-1}L_0x_0$ sur N' respecte H^k.
Notons Γ' = ΓUL, et simplifions les notations en prenant $x_0 = 1$.

Affirmation. Soit L un groupe de Lie, L_0 un sous-groupe distingué de L et Γ' un sous-groupe discret. Supposons que le goupe $\Gamma' L_0$ est dense dans L et que l'action à droite de L_0 sur Γ'\L respecte une mesure finie μ'. Alors μ' est la mesure de Haar et l'action de L_0 est ergodique (en d'autres termes l'action de L_0 est uniquement ergodique).

Preuve. Notons μ le relévement de μ' dans L. La mesure μ se désintégre localement en une mesure ν sur L/L_0 et une famille de mesure μ_x sur xL_0. Cela veut dire que (localement) : $\int f\mu = \int \mu_x(f)\nu$. Pour tout x fixé, μ_x est définie à une constante près.
Il est facile de voir à cause de l'invariance de μ par L_0, que pour tout x la mesure μ_x est (localement) invariante par l'action de L_0. Donc μ_x est multiple de la mesure de Haar.
Considérons maintenant une désintégration globale de μ par l'application $L \to L/L_0$, en prenant pour conditionnelles μ_x les mesures de Hausdorff (définies par la métrique riemannienne invariante à gauche de G) sur xL_0. Cette désintégration est bien définie, en particulier la mesure image ν est invariante par l'action de Γ' sur L/L_0. En d'autres termes ν est invariante par l'action à gauche du sous-groupe Γ"c L/L_0, qui est simplement l'image de Γ' (on $\Gamma' L_0$) par l'épimorphisme $L \to L/L_0$. Mais Γ" est dense dans L/L_0. Il en découle que ν est invariante par tout le groupe L/L_0. Donc ν est la mesure de Haar de L/L_0. Il n'est pas difficile d'en déduire que μ est la mesure de Haar de L.
Quant à l'ergodicité , on voit facilement qu'elle est équivalente à l'ergodicité de l'action de Γ" sur L/L_0. Elle se déduit donc du résultat classique de l'ergodicité des actions par translations des sous-groupes denses dans les groupes de Lie. Ù

7.7. Fin de la preuve de la proposition. l'ergodicité de (N, φ) se ramène à celle de l'action de L_0, car d'après 4.4, une fonction φ-invariante est nécessairement L_0-invariante. Pour trouver S_0 comme énoncé, utilisons la projection p : $N \to L\backslash G$. On peut voir sans difficulté que $H^d(L_{x_0})xH^k(p(N)) = H^n(N)$. Il s'agit maintenant de trouver une section de p, dont l'image S_0 est H^k-rectifiable et dont la mesure est presque égale à celle de p(N), disons $H^k(S_0) \leq 2H^k(p(N))$. On peut d'après 2.1 supposer que p(N) est une sous-variété C^1. On considére des sections locales de classe C^1, définies sur des ouverts assez petits de p(N) et presque orthogonales aux fibres de p. On prendra pour S_0, une réunion dénombrable d'images de telles sections, judicieusement choisies. Ù

§8. Fin des preuves des théorèmes A et B.

On était parti avec une partie N, H^n-rectifiable et φ-invariante. Elle s'est trouvée successivement, en un nombre fini de fois (exactement en 4.2, 5.3.2, 7.1 et 7.2) partitionnée en un nombre (au plus) dénombrable de parties φ-invariantes. En choisissant à chaque étape arbitrairement une de ces parties, on est arrivé à la description donnée dans la proposition 7.4. Notre partie N est donc une réunion (au plus) dénombrable de parties invariantes comme en 7.4. Ceci démontre donc bien le théorème B.
Toujours d'après 7.4, les composantes ergodiques sont des projections de parties de la forme $Lx = x(x^{-1}Lx)$. Elles sont donc par définition algébrique. Le théorème A est donc démontré. Ù

§9. Préliminaires sur les flots géodésiques des variétés localement symétriques. Preuve du théorème C [Wol].

9.1. Variétés localement symétriques. Soit V une variété riemannienne complète (pour simplifier) et (T^1V, φ) son flot géodésique.
Par définition V est localement symétrique si pour tout x V, la symétrie géodésique s_x est une isométrie d'un voisinage de x. Rappelons que s_x se définit (dans un voisinage convexe de x) par $s_x(\exp_x u) = \exp_x\text{-}u$, où u T_xV et $\exp_x : T_xV \to V$, dénote l'application exponentielle. Il est connu qu'alors le revêtement universel $\tilde{V}$ est (globalement) symétrique, au sens que s_x est une isométrie globale.
Soit v un vecteur unitaire tangent à $\tilde{V}$ et $\gamma(t)$ la géodésique qu'il détemine. Considérons $g_V^t = s_{\gamma(t/2)} s_{\gamma(0)}$. C'est un groupe à un paramètre d'isométries tel que $g_V^t(\gamma(s)) = \gamma(s+t)$. On l'appelle le groupe à un paramètre de transvections défini par v. L'origine de la terminologie est peut-être le fait suivant. Sur $\gamma(t)$, g_V^t induit le transport parallèle : si $\tau^t : T_{\gamma(0)}\tilde{V} \to T_{\gamma(t)}\tilde{V}$ est le transport parallèle, alors $D_{\gamma(0)} g_V^t = \tau^t$.
On peut facilement voir à partir de ces groupes à un paramètres de transvections que $\tilde{V}$ est homogène. Notons I son groupe d'isométries conservant l'orientation.

9.2. Autonomie du flot géodésique. Le flot géodésique d'une variété localement symétrique n'est pas toujours algébrique. Il l'est exactement lorsque $\tilde{V}$ est isotrope i. e. I agit transitivement sur T^1

Erreur!. En général, il découle de l'existence des groupes à un paramètre de transvections g_v^t , que I agit transitivement sur toute orbite du flot géodésique. Cette propriété est essenteillement la condition d'autonomie dégagée dans $[\mathrm{Zeg}]_2$. Les flots géodésiques des variétés localement symétriques sont donc naturellement autonomes ([Zeg], 3.2).

On ne rentrera pas ici dans les détails de cette notion, mais disons que son importance réside surtout dans le fait qu'elle permet de définir des endomorphismes et flots structuraux comme pour les flots algébriques (§1).

Dans notre cas de flots géodésiques, l'autonomie traduit le fait que l'équation de Jacobi $j''(t) = R(\gamma'(t), j(t))\gamma'(t)$, le long de toute géodésique $\gamma(t)$, est à coéfficients constants (R étant le tenseur courbure). L'endomorphisme structural n'est rien d'autre que l'endomorphisme obtenu en écrivant l'équation de Jacobi dans son espace de phases. C'est donc pour un élément $v \quad T^1\tilde{V}$, l'endomorphisme $(j, j') \to (j', R(v, j)v)$ de $T_v{}^1 \tilde{V}$, scindé en espaces horisontal et vertical.

On en déduit que l'endomorphisme structural est à spectre réel lorsque la variété V (localement symétrique) est à courbure non-positive. Le théorème A de $[\mathrm{Zeg}]_2$ dit alors, que du point de vue de conservation de volume, on est exactement comme dans le cas des flots algébriques (4.1.2).

Affirmation ($[\mathrm{Zeg}]_2$, Théorème A et §3.2). Une partie H^n-rectifiable invariante par un le flot géodésique d'une variété localement symétrique, à courbure non-positive V, préserve la mesure de Hausdorff H^n (T^1V étant muni de sa métrique naturelle).

9.3. Structure algébrique partielle. Les orbites de I dans $T^1\tilde{V}$, déterminent une partition invariante par le flot géodésique. Sur une orbite le flot géodésique est naturellement algébrique. Soit en effet $v \quad T^1\tilde{V}$, et $gv \quad Iv$. Naturellement $g_{gv}^t = gg_v^t \ g^{-1}$. Donc si $\tilde{\varphi}^t$ est le flot géodésique, alors $\tilde{\varphi}^t(gv) = gg_v^t v$. Ainsi en identifiant Iv à I/K_v, où K_v est le groupe d'isotropie de v, le flot géodésique s'identifie à : $gK_v \to gK_v g_v^t$. Donc sur Iv, le flot géodésique s'identifie au flot algébrique sur I/K_v défini par le groupe à un paramètre g_v^t . On le note $(I/K_v, g_v^t)$. Remarquons que cette identification est métrique, au sens que la métrique induite sur Iv s'identifie à une métrique invariante à gauche sur

I/K_v (en effet I respecte la métrique naturelle de $T^1\tilde{V}$, et par suite la métrique induite sur Iv est I-invariante). On a donc en particulier identification des mesures de Hausdorff dans Iv et I/K_v.
En passant à T^1V, on obtient une partition en parties fermées (car la partition dans $T^1\tilde{V}$ est invariante par I, et par suite également par $\pi_1(V)$cI) invariantes par le flot géodésique. Sur la projection de Iv, le flot s'identifie à ($\pi_1(V)\backslash I/K_v$, g_v^t) (remarquons que g_v^t et K_v sont définis dans T^1V à $\pi_1(V)$-conjugaison près).
Le groupe à un paramètre g_v^t est à spectre réel, mais n'est pas nécessairement R-semi-simple. Par exemple dans le cas de R^n, I est le produit semi-direct $SO(n).R^n$, et g_v^t est unipotent.
Lorsque $\tilde{V}$ est irréductible, g_v^t est bien R-semi-simple. En effet dans ce cas I est semi-simple et est engendré par les groupes à un paramètre de transvections définis par tous les vecteurs tangents en un point (arbitraire) fixé x_0. De plus si P est l'espace des champs de Killing définis par ces derniers groupes à un paramètres, et K est l'espace des champs de Killing nuls (stationnaires) en x_0 ; alors I =P+K est une décomposition de cartan de l'agèbre de Lie de I. Donc en particulier, pour tout v P, adv est R-semi-simple. Donc par définition : g_v^t = exptv est R-semi simple.

En général, il y a une façon naturelle de restreindre le groupe d'isométries I en un sous-groupe G, qui permet entre autres de rendre g_v^t R-semi-simple. Par exemple dans le cas de R^n, on considèrera seulement le sous-groupe des translations. En général, on considére le sous-groupe G engendré par les groupes à paramètre de tranvections déterminés par les géodésiques passant par un point x_0. C'est équivalent à considérer une décomposition de De Rham de $\tilde{V}$, et de prendre le produit des groupes d'isométries de tous les facteurs non-euclidiens, et le groupe des translations pour le facteur euclidien.
Bref, il existe un sous-groupe distingué G de $Isom^+(\tilde{V})$ contenant tous les groupes à un paramètres de transvections et dans lequel ces groupes à un paramètre sont R-semi-simples. De plus $\pi_1(V)$UG est d'indice fini dans $\pi_1(V)$. Donc quitte à passer à un revêtement fini, on peut supposer que $\pi_1(V)$cG. Ceci rend la description de la partition précédente pratiquement inchangée, en remplaçant $Isom^+(\tilde{V})$ par le groupe d'isométries retreind G. On travaillera donc dans la suite avec cette partition.

Remarque. La partition précédente coïncide avec la décomposition ergodique de (T^1V, φ) muni de la mesure de Liouville, lorsque V est de volume fini.

9.4. Preuve du théorème C. L' espace quotient de la partition précédente, dans $T^1\tilde{V}$ ou T^1V, s'identifie à $T = T^1_{x_0}\tilde{V}$ /K, où K est le groupe d'isotropie d'un point x_0 de $\tilde{V}$. Ce n'est pas vraiment une variété, mais du point de vue d'ensembles rectifiables, on peut faire comme si l'on est le cas. Une autre façon de se passer de cette difficulté consiste à raisonner dans le fibré des repères $St^n\tilde{V}$ (n = dimV) , de telle façon que K agisse librement sur $St^n_{x_0}\tilde{V}$.

Soit $N \subset T^1V$, une partie invariante H^n-rectifiable, et $p : N \to T$ la projection. D'après 9.2, (N, φ) préserve H^n. D'après 2.3, pour presque tout v N, le niveau N_v contenant v est H^k-rectifiable pour un certain k, et la conditionnelle de H^n sur N_v est équivalente à H^k. Toujours d'après 9.2, (N_v, φ) préserve H^k. Il ressort de tout cela que la composante ergodique de v dans (N_v, φ) muni de H^k, est la même que dans (N, φ) muni de H^n. Mais N_v est une partie H^k-rectifiable du flot algébrique ($\pi_1(V)\backslash G/K_v$, g^t_v). Appliquons le Théorème A. La composante ergodique de v est donc la projection d'une partie de $T^1\tilde{V}$ de la forme Lv, où L est un sous-groupe connexe et fermé dans G. Ceci achève la preuve du théorème C. ‰‰ Ù‰

§10. Preuve du théorème D

Le théorème D sera conséquence du théorème C et du résultat géométrique suivant :

10.1. Théorème. Soit $\tilde{V}$ un espace symétrique de courbure négative (i. e. de rang un et type non compact) et G son groupe d'isométries conservant l'orientation. Soit L un sous-groupe connexe de G contenant un groupe à un paramètre de transvections déterminé par un vecteur v tangent en un point x $\tilde{V}$. Alors :

i) ou bien l'orbite $Lv \subset T^1\tilde{V}$ est contenue dans la feuille stable faible, ou instable faible de v (au sens du flot géodésique sur $T^1\tilde{V}$).

ii) ou bien, l'orbite $\tilde{W}$ = Lx est géodésique dans $\tilde{V}$. Dans ce cas $Lv = T^1\tilde{W} \subset T^1\tilde{V}$.

Remarques.

1. On peut voir facilement d'après 3.4.2 dans le cas i du théorème, L n'est pas unimodulaire, à moins qu'il soit réduit au groupe à un paramètre g^t_v lui-même. On peut également montrer que dans le cas ii, L est unimodulaire. En effet L est une extension du groupe d'isométries de $\tilde{W}$ (qui est semi-simple) , par un groupe compact. Les deux cas du théorème peuvent donc se distinguer par le fait que L soit ou non unimodulaire.

2. Lorsque $\tilde{V}$ est l'espace hyperbolique (réel), Lx est toujours géodésique dans $\tilde{V}$. Ceci est faux dans les autres cas.

3. Les cas i et ii s'intersectent quand dimL = 1. Dans ce cas Lv est une composante connexe de $T^1\tilde{W}$.

10.2. Preuve du théorème D (d'après 10.1). Soit N une partie H^n-rectifiable invariante par le flot gédésique de la variété localement symétrique, de courbure négative V. Appliquons le théorème C : les composantes ergodiques de (N, φ) sont projections de parties de la forme Lv. Comme dans T^1V, la projection de Lv est de volume fini, L est unimodulaire (π_1(V)UL est un réseau de L). D' après 10.1 et la remarque 1 ci-dessus, Lv est de la forme $T^1\tilde{W}$, pour une certaine sous-variété $\tilde{W}$ géodésique dans $\tilde{V}$. Il s'ensuit que les composantes ergodique de (N, φ) sont de la forme T^1W, où W est une sous-variété géodésique (immergée dans V) de volume fini. Mais, il n' y a qu'un nombre dénombrable de sous-variétés géodésiques de volune fini dans V. Pour le voir, il suffit de se rappeler qu'une telle sous-variété est à groupe fondamental de type fini, et que deux telles sous-variétés ayant le même système de générateurs de leurs groupes fondamentaux, sont identiques. Donc N est réunion dénombrable de fibrés unitaires T^1W_i. La mesure de Hausdorff H^n est évidemment la somme des mesures de liouville sur ces T^1W_i.
Mais le volume des W_i , et par suite celui des T^1W_i est minoré (dim W_i > 1) [BK] (c'est évident lorsque V admet un rayon d'injectivité, parce qu'alors il minorera les rayons d'injectivité des W_i).
Il en résulte puisque N est H^n-rectifiable que N est réunion fini de T^1W_i (cette réunion peut être infini dans le cas σ-H^n-rectifiable). On peut aussi dire que N est le fibré unitaire tangent de la sous-variété géodésique (non nécessirement connexe) W = uW_i. Û

10.3. Bord à l'infini de L. Prenons x et v pour points base de $\tilde{V}$ et $T^1\tilde{V}$, et notons p : G→ $T^1\tilde{V}$ et p' : G → $\tilde{V}$ les projections : p(g) = gv et p(g) = gx. Ainsi les orbites Lv et Lx sont maintenant simplement les projections p(L) et p'(L).
Considérons également les projections à l'infini : p^s : G → G / G^{so} = S^∞ ; p^u : G → G / G^{uo} = S^∞, où S^∞ est la sphère à l'infini de $\tilde{V}$. Ici G^{s0} (resp. G^{u0}) est le sous-groupe stable (resp. instable) faible central de $g^t = g_V^t$ (3.1) . Des projections analogues p'^s et p'^u se définissent sur $T^1\tilde{V}$.
Soit enfin π : $T^1\tilde{V} \to \tilde{V}$ la projection, $\tilde{N}$ = p(L) et $\tilde{W}$ = p'(L) = π(N).

Affirmation. Supposons que l'on n'est pas dans le cas i du théorème, et soit B = p^s(G) = $p'^s(\tilde{N}$). Alors : $\tilde{W}$ (= p'(L)) est formé exactement des points situés sur les géodésiques de $\tilde{V}$ dont les deux bouts à l'infini sont dans B. De même $\tilde{N}$ (= p(L)) est formé des vecteurs unitaires tangents aux géodésiques dont les extrémités (les deux) sont dans B.

Preuve. Considérons L^{ss} (resp. L^s, L^{so}, L^{uu}, L^u et L^{uo}) l'intersection de L avec G^{ss} (resp. G^s, G^{so}, G^{uu}, G^u et G^{uo}). L'hypothèse de l'affirmation exclut le cas i du théorème. les sous-groupes L^{ss} et L^{uu} sont donc non-triviaux.

Les algèbres de Lie L^{ss}, L^s, L^{so}, L^{uu}, L^u et L^{uo} de ces sous-groupes peuvent se définir comme dans le cas de G, comme somme d' espaces propres de adg_V^t agissant sur l'algèbre de Lie de L. On en déduit les relations de supplémentarité usuelles entre ces algèbres et par suite entre les groupes qu'elles déterminent. On en tire en particulier l'image suivante. Si U est un voisinage assez petit d'un point y de L, alors pour tout y' dans U, $yL^{uu}Uy'L^{s0}$ est non vide (et de plus réduit à un point). On en déduit, par définition de p^s que : $p^s(U)$ $p^s(yL^{uu})$.

Notons $B_y = p^s(yL^{uu})$. De ce qui précéde, découle que pour y et z proches B_y et B_z s'intersectent sur un ouvert de chacun. Ce sont des sous-variétés analytiques, car tous les sous-groupes et projections sont analytiques. On est donc proche de conclure que B_y et B_z sont "essentiellement les mêmes". Montrons précisement que $\overline{B_y} = \overline{B_z}$. On sait que p^s établit un homéomorphisme entre yG^{uu} et $S^\infty - \{p^u(y)\} = p^s(yG^{uu})$. Comme L^{uu} est un sous-groupe du groupe nilpotent G^{uu}, il est fermé non borné dans S^∞-$\{p^u(y)\}$. Il en résulte que : $\overline{B_y} = B_y u\{p^u(y)\}$, et de plus $\overline{B_y}$ est une sphère topologique (la compactification d' Alexendroff de B_y, qui est un espace eucludien topologique).

D'après tout ce qui précéde, et par analycité, pour y et z proches on a : $\overline{B_z}$ contient une composante connexe de $\overline{B_y}$ -$\{p^u(y), p^u(z)\}$. Ce dernier ensemble est en fait connexe quand $\dim B_y \geq 2$. On en déduit que dans ce cas $\overline{B_y}$ -$\{p^u(y), p^u(z)\}c\overline{B_x}$ et par suite $\overline{B_y}$ $c\overline{B_z}$. L'inclusion inverse est vraie pour les mêmes raisons, donc $\overline{B_y} = \overline{B_z}$. Par connexité de L, cette égalité s'étend à tous les couples de points y et z de L (pas nécessairement proches).

Un raisonnement élémentaire nous permet d'arriver à la même conclusion dans le cas $\dim B_y = 1$ (on peut par exemple considérer un troisième point w L). On a donc dans tous les cas $B = \overline{B_y}$ pour n'importe quel y L.

Ce qui précéde entraîne également que $p^u(L)cB$ (=$p^s(L)$). Le même raisonnement entraîne l'inclusion inverse. On a donc $B = p^s(L) = p^u(L)$.

Ainsi tous les vecteurs de $\tilde{N}$ sont tangents à des géodésiques dont les extrémités à l'infini appartiennent à B. Réciproquement, si a B, alors $a = p^u(y)$ pour un certain y de L. Donc B_y = B-$\{a\}$. Donc, par définition, pour tout b B-$\{a\}$, il existe y' yL^{uu} tel que

$p^s(y') = b$. En d'autres termes $p^u(y') = a$ et $p^s(y') = b$. Ceci démontre l'affirmation pour $\tilde{N}$, ainsi que pour sa projection $\tilde{W}$. Ù

10.4. Le lemme suivant donne un critère de géodésiblité de sous-variétés.

Lemme. Soit N' $T^1 \tilde{V}$ une sous-variété C^∞, invariante par le flot géodésique d'une variété $\tilde{V}$ (quelconque) . Soit S' sa projection dans $\tilde{V}$. Supposons que dim N' $\geq$ 2 dim S' - 1 = 2 n - 1. Alors S' est géodésique et N' est ouverte dans T^1 S' $T^1 \tilde{V}$.

Preuve. Soient π : N' $\rightarrow$ S' la projection, y S' et α la seconde forme fondamentale de S' en y. Les orbites par le flot géodésique des vecteurs de $\pi^{-1}(y)$ se projettent sur des géodésiques contenues dans S' et passant par y. En particulier si v $\pi^{-1}(y)$ alors $\alpha(v,v) = 0$, par définition de α. Maintenant l'hypothèse sur les dimensions entraîne pour y générique dim $\pi^{-1}(y) \geq$ n-1 $\geq$ dim T^1_y S'. On en déduit que α est nulle en y et par généricité que S' est géodésique. Û

10.5. Sous-espaces géodésiques

Affirmation. Soit L' G, un sous-groupe de G de dimension 2, contenant le groupe à un paramètre de transvections g^t_V et dont l'algèbre de Lie est engendrée par α, le générateur infinitésimal de g^t_V et un vecteur X vérifiant $[\alpha,X] = \lambda X$ où λ est réel. Alors p'(L) (= Lx) $\tilde{V}$ est géodésique.

Preuve. Considérons la décomposition de Cartan G = K + P, K étant l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie de x et P est l'espace des champs de Killing de transvections détérminés par des vecteurs tangents en x. Si $X = X_1 + X_2$ K + P, alors $[\alpha, X_1]$ P et $[\alpha,X_2]$ K. Ceci résulte des relations suivantes vérifiées par toute décomposition de Cartan : [K,K] K, [P,P] K, [P,K] P. On a donc $[\alpha, X_1] = \lambda X_2$ et $[\alpha,X_2] = \lambda X_2$. Soit $\overline{X} = X_1 - X_2$. On a $[\alpha,\overline{X}] = - \lambda\overline{X}$. Les relations précédentes entraînent que $[X,\overline{X}]$ P et que $[\alpha, [X,\overline{X}]] = 0$. Le rang de G étant égal à un, on en déduit que $[X,\overline{X}]$ est colinéaire à α. Par suite l'espace vectoriel engendré par α, X et $\overline{X}$ est une algèbre. Soit L" le groupe qu'elle engendre.
Rappelons que la dérivée au point 1 G, de la projection p' : G $\rightarrow$ $T^1 \tilde{V}$, s'identifie à la projection G $\rightarrow$ P = $T_x\tilde{V}$. La projection S' de L" dans $\tilde{V}$ est de dimension 2. Son espace tangent au point base est en effet engendré par α et X_2.

La projection N' de L” dans $T^1 \tilde{V}$ est de dimension 3 (cette fois X et $\bar{X}$ ne s’identifient pas puisque l’un est stable et l’autre est instable. Pour conclure on utilise le lemme précédent. Ù

10.6. Affirmation. $D_1p'(L^s) = D_1p'(L^u)$ (rappelons que L^s est engendré par L^{ss} et α).

Preuve. Soit X un élément de L^s comme dans 10.4 et L' le sous-groupe correspondant. La surface S' = p’(L') est un 2-plan géodésique contenu dans $p'(L) = \tilde{W}$. On a T_xS'c $D_1p'(L^s)$. Montrons que T_xS'c $D_1p'(L^u)$. Considérons pour cela les géodésiques de S’ allant à +∞, vers $p^u(1)$, qui est l’extrémité à -∞ de la géodésique $\gamma(t)$ déterminé par le vecteur base v. Il découle de 10.3 que les vecteurs tangents à ces géodésiques appartiennent à $\tilde{N}$. Mais ces géodésiques sont négativement asymptotes à $\gamma(t)$. Donc $p'(L^u)$ contient S’ et par suite T_xS'c $D_1p'(L^u)$.
D’après 3.1, les vecteurs X comme dans 10.4 engendrent L^s. On en déduit l’inclusion $D_1p'(L^s)$c$D_1p'(L^u)$. L’inclusion inverse s’obtient de la même façon. Ù

Fin de la preuve du théorème. Pour montrer que $\tilde{W}$ est géodésique, on applique le lemme 10.4 , en remarquant que :
i) $\dim\tilde{W} = \dim D_1p(L^s) = \dim L^{ss} + 1$
ii) $\dim \tilde{N} = \dim L^{ss} + \dim L^{uu} + 1 = 2 \dim L^{ss} + 1$.
On est donc bien dans les conditions d'application du lemme. Donc $\tilde{W}$ est une sous-variété géodésique. On voit facilement que B est le bord à l’infini de $\tilde{W}$. Il en résulte d’après 10.3 que $\tilde{N} = T^1\tilde{W}$ Ceci achève la preuve du théoreme. Û

10.7. Contre-exemples quand la courbure n’est pas (strictement) négative. Le théorème 10.1 est faux lorque la courbure de $\tilde{V}$ est non positive, mais n’est pas négative (i. e. G de rang supérieur à 1). Considérons l’espace symétrique universel $\tilde{V}$ = SL(n, R)/SO(n). Ici G = SL(n, R). Une décomposition de Cartan canonique s’obtient en prenant K = l’algèbre de Lie de SO(n), i. e. {les matrices nxn antisymétriques}et P = {les matrices symétriques de trace nulle}. Considérons L_1 = SL(m, R)xSL(n-m, R) cG et pour g G, $L_g = g^{-1}L_1g$. Notons L_g son algèbre de Lie. On a : $\dim G = n^2-1$; $\dim P = (n^2+n-2)/2$; $\dim K = (n^2-n)/2$ et $\dim L = m^2-1+ (n-m)^2-1$. On en déduit que pour m fixé (par exemple m = 1) et n grand, $\dim L_g > \dim K$. En particulier dim L_gUP > 1. Autrement dit L_g contient des groupes à un paramètre de transvections. Pourtant la projection

$p'(L_g)c\ \tilde{V}$ n'est pas toujours géodésique. En effet sinon, toute orbite $L_1gx = g(g^{-1}L_1g)x$ est géodésique, car G agit isométriquent à gauche sur $\tilde{V}$.

Affirmation. Soit $\tilde{V}$ un espace symétrique irréductible à courbure non-positive. Alors il n'existe pas de sous-groupe d'isométries non-trivial L_1, dont toutes les orbites sont géodésiques.

Preuve. Commençons par voir les relations entre deux orbites géodésiques : $A = L_1x$ et $B= L_1x'$. Soit $\alpha : A \rightarrow B$ et $\beta : B \rightarrow A$, les projections orthogonales. Elles sont bien définies par l'hypothèse de géodésibilité de A et B [BGS]. Soit a et b un couple réalisant $d(A, B) = \inf\{d(a', b') / a' \quad B, b' \quad B\}$. Donc $d(la, lb) = d(a, b)$ pour tout $l \quad L_1$. Il en résulte directement que α et β sont l'une réciproque de l'autre. Elles sont donc isométriques parce qu'elles sont contractantes (au sens large). En particulier si γ est une géodésique de A, alors $\alpha(\gamma)$ est une géodésique de B. De plus $\alpha(\gamma)$ est bi-asymptote à γ (i. e. à distance de Hausdorff finie).
Appelons F le feuilletage défini par les orbites de L_1. Il est riemannienn comme tout feuilletage défini par les orbites d'un groupe d'isométries [Mol]. Donc $\tilde{V}$ est muni d'un feuilletage riemannien et géodésique en même temps.
Montons que l'orthogonal de ce feuilletage est intégrable. Ceci entraînera que $\tilde{V}$ est un produit riemannienn (la projection sur le produit des deux feuilles passant par un point est une isométrie), ce qui contredira le fait que $\tilde{V}$ est irréductible.
Soit C_1 l'ensemble des points des géodésiques bi-asymptotes à γ. Il est connu que C_1 est géodésique dans $\tilde{V}$. Ce qui précéde montre que C_1 est transverse à A.
Montrons qu'en tout point y de C, T_yC_1 contient l'orthogonal à T_yF_y. En effet, par exemple quand y est un point de γ, on sait que la variété des géodésiques bi-asymptotes à γ est orthogonal à la variété des géodésiques exponentiellement positivement asymptotes à γ (projection de la variété stable forte de γ). En effet leurs espaces tangents sont sommes d'espaces propres de l'opérateur de courbure, qui est symétrique. Et puis cette dernière variété est évidemment contenue dans F_y.
Il est connu que C_1 s'écrit comme un produit riemannien $C_1 = C_2xR$, où R correspond à γ. Supposons que pour un point y de γ, $C_1UF_y = \gamma$, alors C_2 est orthogonale à F_y. Donc l'orthogonal à F est intégrable en y. Sinon, on considère la trace de F sur C_2. Elle est non-triviale (i. e. de dimension $\neq 0$), car sinon on sera au premier cas. C'est un feuilletage de même type : défini par les orbites, géodésiques, d'un groupe d'isometries. On refait alors le même procédé avec une géodésique γ' contenue dans une feuille de la trace de F sur C_2 . La preuve se termine par récurrence. Ù

Remarque. Considérons l'involution de cartan $\sigma : G \to G$, $\sigma(A) = (A^*)^{-1}$. Supposons que la projection $p'(L_g)$ est géodésique. On peut tirer du début de la preuve précédente, plus précisément du fait que $\dim p'(L_g) = \dim p'(L_1)$ que L_g est invariant par σ. L'ensemble de ces g est donc assez maigre.

§11. Preuve du théorème E.

Pour le théorème E, on suppose que la variété ambiante V est compacte. D'après 9.3, à un revêtement fini près, $V = \pi_1(V)\backslash G/K$, où G est le groupe d'isométries restreind. Il est produit d'un groupe semi-simple par un groupe de Lie abelien libre. Quitte à passer à un revêtement fini, on peut supposer que $\pi_1(V)$ est le produit de ses intersections avec ces deux facteurs. L'ingrédient principal de la preuve est le fait suivant (démontré dans $[Mos]_2$ pour G semi-simple, mais s'étend directement à notre cas) :

11.1. Proposition. $[Mos]_2$: V étant compact ; alors tout $\gamma \quad \pi_1(V)$ est semi-simple (Cela veut dire que $Ad(\gamma)$ agissant sur l'algèbre de Lie G est semi-simple. En particulier sa restriction à un sous-espace invariant est également semi-simple).

11.2. Prenons v pour point base (de $T^1\tilde{V}$), alors la composante ergodique N_0 s'identifie à $\Gamma \backslash L/LUK$, où $\Gamma = LU\pi_1(V)$. Le quotient $\Gamma \backslash L$ est de volume fini. Remarquons qu'il est en fait compact. Regardons pour cela tout dans $\pi_1(V)\backslash G$. Par compacité de ce dernier quotient, si $\Gamma \backslash L$ n'était pas compact, alors il admettra des points d'accumulation. Ceci contredit évidemment la finitude de son volume.

11.2. Proposition (Structure algébrique de L)**.** Soit L un sous-groupe fermé connexe contenant un sous-groupe discret Γ tel que $\Gamma \backslash L$ soit compact. Supposons que tout élément de Γ est semi-simple. Alors L s'écrit comme un quotient fini d'un produit direct S x R où S est semi-simple et R est abélien.

Preuve. Soit R le radical (plus grand sous-groupe normal résoluble connexe) de L. Soit L = S. R une décomposition de Levi de L ; S étant semi-simple et $S \cap R$ discret [Rag]. Un théorème d'Auslander et Wang [Rag, p 150] affirme que $R \cap \Gamma$ est un réseau dans R à condition que S ne contient aucun facteur compact agissant trivialement sur R. Soit K un tel facteur maximal. C'est un sous-groupe normal (puisque par définition il est un facteur direct de S et agit trivialement sur R).

11.2.1. Affirmation. Il suffit de démontrer la proposition pour L/K.

Preuve. Soit p : L $\rightarrow$ L' = L/K la projection. Soit L' = S'.R' une décomposition de Levi de L'. Par définition de K on a R' = p(R) et S = p^{-1}(S'). Supposons que L' soit un quotient fini de S' x R' ; alors en particulier les éléments de S' et R' commutent deux à deux. Il en va de même pour S et R, toujours par définition de K. Il s'ensuit que l'homomorphisme f : S x R $\rightarrow$ L, f(s,r) = sr est bien défini. Son noyau est formé des éléments de la forme(s,s^{-1}) avec s F = S $\cap$ R. Or F est dans le centre de S (les éléments de S et R commutent deux à deux). Enfin, il est connu que le centre d'un sous-groupe semi-simple d'un groupe linéaire est fini. Û

On va donc dans la suite de la preuve supposer que K est trivial. Donc Γ ' = R $\cap$ Γ est un réseau co-compact de R.

11.2.2. Proposition. Soit R un groupe de Lie résoluble et Γ' un réseau co-compact. Supposons que tout élément de Γ ' est semi-simple. Alors R est abélien.

Preuve. Rappelons la propriété suivante de rigidité des réseaux dans les groupes de Lie (connexes) nilpotents (et même résolubles) [Rag]. Si Γ' et un réseau de R, et σ et un automorphisme de R, trivial sur Γ', alors σ est trivial (dans R).
Pour la proposition, commençons par :

Cas où R est nilpotent. Pour tout γ Γ ', Ad(γ) est alors nilpotent. Comme il est par hypothèse semi-simple, Ad(γ) est trivial. Autrement dit, Γ' est central dans R. Donc pour tout x de R, Ad(x) est trivial sur Γ'. On conclut par "rigidité" des réseaux : Ad(x) est trivial sur R. Donc R est abelien.

Cas général. On va se ramener au cas précédent en montrant qu'en fat R est nilpotent. Soit donc N le plus grand sous-groupe normal connexe nilpotent (radical unipotent) de R. Il est connu que N [R,R] (car R est un groupe de Lie). On va montrer que N est dans le centre de R, ce qui impliquera évidemment que R est nilpotent.
D'après un théorème de Mostow [Rag, p 46], NUΓ ' est un réseau co-compact de N. Comme dans le cas précédent, pour tout γ Γ'UN , Ad γ est trivial parce qu'il est nilpotent et semi-simple. Donc pour tout x R, Ad(x) est un automorphisme extérieur de N, trivial sur Γ'UN. Il est donc, par rigidité trivial sur N. Cela s'intérpéte simplement par le fait que N est dans lntre de R. Ù

11.2.3. Décomposition de Levi. Soit L = S.R une décomposition de Levi de L. On va montrer que les éléments de S et R commutent deux à deux, i. e. R est central dans L. On conclura la preuve de 11.2 comme dans 11.2.1.

D'après la proposition précédente R est abélien. Comme au deuxième cas de la proposition précédente, pour tout γ $RU\Gamma$, Ad(γ) est trivial dans L, car il est nilpotent et semi-simple. Autrement dit ΓUR est central dans L. On conclut alors comme précédement par rigidité : si s S ; alors Ad(s) est un automorphisme de R, trivial sur et fixe $RU\Gamma$. Donc Ad(s) est trivial sur R. Ceci achève la preuve de 11.2. Û

Remarque. On peut remplacer L par un sous-groupe L', avec L'v = Lv, et L' quotient fini d'un produit direct S'.R', avec S' semi simple de type non-compact, et R' abelien libre (i. e. sans facteur compact). En effet, par R-semi-simplicité, le groupe à un paramètre de transvections défini par v, commute avec tout sous-groupe compact distingué. Donc en remplaçant S par son facteur S' de type non-compact, et R par un facteur libre maximal (il n'est pas unique!), on aura L'v = S'. R'v = Lv. Remarquons toutefois qu'il n'est plus sur que $\pi_1(V)UL' = \Gamma UL'$est un résau de L'.

11.3. Proposition (structure géométrique de N_0). Soit L un sous-groupe comme dans 12.1. Alors il existe un point x de $\tilde{V}$ dont l'orbite Lx est géodésique dans $\tilde{V}$.

Preuve. On va d'abord montrer qu'on peut supposer que S ne contient aucun sous-groupe normal compact de L. Ceci nous permettra de déduire comme auparavant que $RU\Gamma$ est un réseau co-compact de R.

Soit donc K un sous-groupe normal compact maximal de L inclus dans S. Soit $\tilde{V}$ ' l'ensemble des points fixes de K. Il est connu que $\tilde{V}$ ' est non vide et géodésique dans $\tilde{V}$. Le groupe G conserve $\tilde{V}$ ' car K est distingué dans L. Par conséquent l'orbite par L d'un point de $\tilde{V}$ ' est la même que son orbite par L/K. Quitte à remplacer $\tilde{V}$ par $\tilde{V}$ ', on peut donc simplement supposer que K est trivial.

11.3.1. Pour une décomposition de Cartan G = K + P, notons σ l'involution de Cartan : $\alpha + \beta \rightarrow \alpha - \beta$. Soit S l'algèbre de Lie de S. D'après Mostow [Mos]$_1$, puisque S est semi-simple, il existe une décomposition de Cartan où S est σ-invariant.

Soit S' = {α G / Ad α / S = 0} et S" = S+ S'. Ce sont également des sous-algèbres σ-invariantes. Notons S' et S" les sous-groupes qu'elles déterminent.

Cette σ-invariance entraîne que les orbites du point base (de la décomosition de Cartan) des groupes S, S' et S" sont géodésiques. Plus précisément l'orbite X" de S" s'écrit comme une sous-variété géodésique, produit riemannien X" = X x X' avec X et X' correspondant respectivement à S et S'. En remplaçant $\tilde{V}$ par X", on voit donc que toutes les orbites de S et S' sont géodésiques.
Evidemment le facteur abelien R de L est inclus dans S'. Il est clair que pour démontrer la proposition, il suffit de montrer qu'un certain point x' de X' admet une R-orbite géodésique. On peut pour cela remplaçer $\tilde{V}$ par X' et appliquer :

11.3.2. Lemme. Soit R un sous-groupe abélien de G contenant un réseau Γ' dont tous les éléments sont semi-simples. Alors l'orbite par R d'un certain point de $\tilde{V}$ est géodésique.

Preuve. Remarquons d'abord que cet énoncé est faux sans l'hypothèse de semi-simplicité. Il est d'un autre côté vrai dès que $\tilde{V}$ est à courbure non-positive. La semi-simplicité dans ce cas se définit de la façon suivante. Pour γ G, on considère d_γ : $\tilde{V} \to R$, $d_\gamma(x) = d(x,\gamma(x))$. On dira que γ est semi-simple si inf d_γ est atteind. Autrement dit Min(γ) = {x / d_γ (x) = inf d_γ} est non vide.
Remarquons alors que tout élément de R est semi-simple. On applique pour cela notamment le fait que si une puissance γ^n est semi-simple alors γ l'est également. D'après [BGS, p 86] l'intersection Y = $\bigcap_{\gamma \quad R}$ Min (γ) est non vide, géodésique et invariante par R.
De plus Y est isométriquement scindé en Y = Y_1 x R^k, tel que les orbites de R soient de la forme y_1 x R^k. Ces orbites sont en particulier géodésiques. Û

N T^1V, compact , projection dans T^1V d'une partie de la forme Lv_o $T^1\tilde{V}$. , la projection de Lv_o dans $\tilde{V}$. La projection de N dans V est égale à la projection W_o de dans V.

11.4. Fin de la preuve du théorème E. Il ne reste à montrer que la dernière partie du théorème sur la semi-conjugaison. Soit donc $\tilde{W}_o$ = Lx $\tilde{V}$, la projection de Lv dans $\tilde{V}$. Evidement Lv est inclus dans T^1W_o. Soit $\tilde{W}_1$ = une orbite géodésique de L. Remarquons que l'action de L sur $\tilde{W}_1$peut être non-fidèle, mais que l'image de L Isom($\tilde{W}_1$) , contient le groupe d'isométries restreind de $\tilde{W}_1$.
Notons $\tilde{f}$: $\tilde{W}_o \to \tilde{W}_1$ la projection orthogonale.

Affirmation. Soit γ une géodésique de $\tilde{V}$, incluse dans $\tilde{W}_o$; alors $\tilde{f}(\gamma)$ est une géodésique de $\tilde{W}_1$ (donc de $\tilde{V}$). De plus $\tilde{f}$ respecte les paramètrage de γ et $\tilde{f}(\gamma)$.

Preuve. Remarquons que d (y, $\tilde{W}_1$) est constante sur $\tilde{W}_o$ parce qu'elle est L-invariante. Notons δ sa valeur constante.Soient y_1, y_2 deux points de γ et $z_1 = \tilde{f}(y_1)$ et $z_2 = \tilde{f}(y_2)$ leurs projections dans $\tilde{W}_1$. Notons γ', la géodésiques de $\tilde{W}_1$ joignant z_1 et z_2. La distance entre γ et γ' est évidemment supérieur on égale à δ. Elle vaut exactement d pour y_1 et y_2. Elle est donc par convexité [BGS], constante égale à δ. Donc tout point y de γ est à une distance $\delta = d(y, \tilde{W}_1)$ de γ'. Il s'ensuit que $\tilde{f}(\gamma) = \gamma'$, et que $\tilde{f}$ préserve les paramètrags de γ et γ'. Û

Maintenant $\tilde{f}$ définit une semi-conjugaison $T^1\tilde{f}$ entre les restrictions du flot géodésique à Lv et une partie invariante de $T^1\tilde{W}_1$. L'image de $T^1\tilde{f}$ est invariante par L. Soit W_1 la projection de $\tilde{W}_1$ dans V. C'est une sous-variété géodésique compacte. Clairement $T^1\tilde{f}$ induit une une semi-conjugaison T^1f entre N_0, la projection de Lv dans T^1V, et une partie invariante de T^1W_1. Le flot géodésique sur cette dernière partie est ergodique parce que c'est le cas par hypothèse dans N_0. Cette partie est en fait une composante ergodique (entière) du flot géodésique sur T^1W_1, car l'image de $T^1\tilde{f}$ est L-invariante. Ceci achève la démonstration du théorème E. Û

11.5. Contre exemples quand V est de volume fini mais n'est pas compacte. Considérons L, le produit semi direct usuel $R^{n-1}.SL(n-1, R)$ (SL(n-1, R) agit de la façon linéaire uselle sur R^{n-1}). Ce n'est rien d'autre que le groupe affine unimodulaire de R^{n-1}. Il y a une façon classique naturelle de plonger L dans SL(n, R). A l'élément (a, A) de L, on associe l'élément B de SL(n, R) aggisant sur $R^n = R^{n-1}xR$ par B(x, t) = (Ax+ta, t). L'image de L contient SL(n-1, R), et contient donc beaucoup de groupes à un paramètre de transvections. L'image de $Z^{n-1}.SL(n-1, Z)$ est incluse dans SL(n, Z). Soit V' = SL(n, Z)\SL(n, R)/SO(n). Un revêtement fini de V' est une variété localement symétrique à courbure non-positive et de volume fini. Pour tout vecteur v, tangent à SL(n, R)/SO(n), dont le groupe à un paramètre de transvections est inclus dans L (par exemple dans SL(n-1, R)) l'orbite Lv est une partie invariante du flot géodésique de SL(n, R)/SO(n). Sa projection dans le fibré unitaire tangent de SL(n, Z)\SL(n, R)/SO(n) est une partie algébrique de volume fini. Le groupe L n'est pourtant pas un quotient fini d'un produit direct d'un groupe semi-simple par un groupe abelien. On peut également montrer L n'admet pas d'orbite géodésique dans $\tilde{V}$.

Remarquons enfin que la même construction marche pour tout groupe de Lie L résoluble, simplement connexe et admettant un réseau Γ [Rag, p 71].

§12. Dépendance de L par rapport à la composante ergodique.

Soit N une partie H^n-rectifiable, invariante par le flot géodésique (T^1V, φ) d'une variété V localement symétrique et de courbure non positive. Le théorème C dit que pour presque tout v $\tilde{N}$, la composante ergodique correspondante est projection d'une partie de la forme Lv, où L est un sous-groupe de G connexe et fermé. Notons le L_v pour indiquer qu'il peut dépendre à priori de v.

12.1. Exemples simples. Considérons l'exemple du flot géodésique du tore plat R^n/Z^n. Restreignons nous pour simplifier à n = 2. On a $G = R^2$ et $N = T^1(T^2) = T^2xS^1$. Pour (x, u) N, on a : $L_{(x, u)} = R^2$ si $u = e^{2\pi i\theta}$ et θ est irrationnel, sinon $L_{(x, u)} =$ RvcR^2.

Pour cet exemple, on peut dire que $L_{(x, u)} = R^2$, car l'ensemble des rationnels est négligeable.

Un autre exemple s'obtient de la façon suivante. On le définit comme ensemble de droites affines de R^3, qui détérmine un sous-ensemble invariant du flot géoedésique du tore T^3. Munissons R^3 des coordonnées cartésiennes (x, y, z). Soit $\theta : R \rightarrow R$ une fonction de période égale à 1. Pour tout t R, considérons les droites contenues dans le plan z = t, et de direction $e^{2\pi i\theta}$ (vue comme vecteur dans ce dernier plan, identifié à C). Pour v = (x, y, t), on a : $L_v = R^2$ si θ(t) est irrationnel, et $L_v = Re^{2\pi i\theta}$, sinon. On peut choisir θ de telle façon (par exemple) que l'image réciproque de tout rationnel de [0, 1] soit non-négligeable dans R (par exemple d'intérieur non-vide). Une telle fonction peut être choisie C^∞ (mais évidemment pas C^ω). Donc L_v prend un nombre infini (dénombrable) de valeurs. Remarquons toutefois que R^2 (qui contient tous les L_v) agit (à gauche) sur notre ensemble. On peut construire des exemples de même type (par exemple dans le flot géodésique de T^4) tels qu' aucun sous-groupe (non-trivial) n'agisse (globalement).

12.2. Théorème. Soit N une partie H^n-rectifiable, invariante par le flot géodésique (T^1V, φ) d'une variété V localement symétrique et de courbure non-positive. Alors $\tilde{N}$ c $T^1\tilde{V}$ est (modulo un ensemble négligeable) réunion dénombrable de parties invariantes $\tilde{N}_i$ telles que pour tout i, il existe un sous-groupe connexe fermé, et non-trivial L_i, conservant $\tilde{N}_i$. Les orbites de L_i définissent un feuilletage de $\tilde{N}_i$, qui descend en un feuilletage L_i de sa projection N_i. Le feuilletage L_i est invariant par le flot géodésique et ses feuilles sont fermées (dans T^1V). La même affirmation est vraie pour N, σ-H^n-rectifiable et telle que (N, φ) préserve une mesure finie équivalente à la mesure de Hausdorff.

Corollaire. Supposons de plus que N est une sous-variété analytique connexe. Alors toute composante connexe de $\tilde{N}$ est conservée par un sous-groupe fermé connexe et non-trivial.

Preuve (du corollaire). Soit L_i un sous-groupe associé à un $\tilde{N}_i$ non-négligeable. Soit C une composante connexe dans $\tilde{N}$, d'un point de densité de $\tilde{N}_i$. Pour l L_i, l(C)UC est non-négligeable dans C. Par anlycité l(C) = C. Donc L_i respecte C. Ù

Remarque. Le corollaire ne s'étend pas au cas C^∞, comme on l'a mentionné ci-dessus.

Preuve (du théorème). Pour v appartennant à $\tilde{N}$, $\pi_1(V)UL_v$ est un réseau de L_v. Il est donc de type fini [Rag]. Il n'y a donc qu'un nombre dénombrable de tels réseaux. Ceci définit une partition dénombrable de $\tilde{N}$, telle que ce réseau soit constant sur chaque élément de cette partition. Choisissons une partie $\tilde{N}_1$, et notons $\Gamma = \pi_1(V)UL_v$ pour v $\tilde{N}_1$. Choisissons v, un élément de $\tilde{N}_1$ et notons $L = L_v$. Par ergodicité du flot géodésique sur la projection de Lv, on peut supposer que v correspond à une orbite dense dans cette projection. Le sous-groupe L contient le groupe à un paramètre de transvections détérminé par v qu'on note g^t. Notons L^{ss} et L^{uu} ses groupes stable et instable.

12.3. Affirmation. Soit L_1 la composante neutre du sous-groupe fermé et distingué engendré par L^{ss} et L^{uu} (sans g^t) et Γ. Alors pour tout v' $\tilde{N}_1$, $L_{v'}$ contient L_1. En particulier L_1 agit (à gauche) sur $\tilde{N}_1$.

Preuve. Notons $L' = L_{v'}$ et g'^t le groupe à un paramètre de transvections défini par v'. Comme pour v, on peut faire la même hypothèse de densité pour v'. Ceci signifie que Γg^t (i. e. l'ensemble des éléments de la forme γg^t tels que γ Γ et t R) et $\Gamma g'^t$ sont respectivement denses dans L et L'.
Montrons que L normalise L'. D'après les densités précédentes, il suffit de montrer que g^t normalise L' (car Γc L'). Considérons pour cela l'action de Ad(g^t) sur la Grassmanninne des d-plans de G, où d = dimL'. Soit L' l'algèbre de Lie de L. Il résulte de la densité de Γg^t que $g^t\Gamma = (g^t\Gamma)^{-1}$ est également dense dans L. En particulier il existe

une suite $g^{t_n}\gamma_n \to 1$ avec $t_n \to \infty$. Mais $Ad(g^{t_n}\gamma_n)(L') = Ad(g^{t_n})(L')$, car $\Gamma c L$. Donc $Ad(g^{t_n})(L') \to L'$, i. e. L' est un point récurrent de l'action de $Ad(g^t)$ sur La Grassmannienne. Ceci entraîne à cause du fait que $Ad(g^t)$ est à spectre réel que L' est un point fixe de cette action (voir 5.2), i. e. g^t normalise L'.
Pour les mêmes raisons L' normalise L. Soit L" le sous-groupe (immergé) de G engendré par L et L'. Considérons le groupe quotient T = L"/L' = L/LUL'. Il est de volume fini car il est quotient de L/Γ (car Γc LUL'). Il est donc compact. L'image du groupe à un paramètre g^t est un groupe abelien dense (car LUL'g^t contient Γg^t qui est dense dans L). Donc T est un tore. Maintenant L^{ss} est engendré par des groupes à un paramètre h^s comme dans 6.4. Ils vérifient essentiellement : $g^t h^s g^{-t} = h^{s'}$, avec $s' \neq s$. Ceci entraîne que h^s appartient au noyau de $L \to T$. Donc $L^{ss}c$LUL'. La même inclusion est vraie pour L^{uu} et l'affirmation en découle. Ù

La partie existence du théorème 12.2, est donc démontrée si L^{ss} ou L^{uu} sont non-triviaux.

Affirmation. Si le groupe précédent L_1 est trivial (i. e. L^{ss} et L^{uu} sont triviaux), alors L_v prend au plus un nombre dénombrable de valeurs dans $\tilde{N}_1$.

Preuve. En effet g^t sera central dans L (i. e. $L = L^{00}$). Il s'ensuit que tout élément γg^t tel que γ Γ normalise Γ. Par densité de Γg^t, on conclut que Γ est distingué dans L. Le groupe quotient L/Γ est abelien car l'image de g^t y est dense. Il en résulte que L est également abelien car Γ est discret et L est connexe.
La même propriété est vraie pour L'. En effet L' est nilpotent, car LUL' et le quotient T = L'/LUL' sont abeliens. Donc g'^t est central, car il est semi-simple et unipotent en même temps. Donc de la même façon que pour L, L' est abelien. Montrons maintenant que le groupe engendré par L et L' est également abelien. Il suffit pour cela de montrer que g'^t centralise L. Mais $Ad(g'^t)$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de L, centralisant le réseau Γ. Par rigidité de ce réseau [ ], $Ad(g'^t)$ centralise L.
Tout ce qu'on vient de dire s'étend à tout v" $\tilde{N}_1$. Soit L" le groupe engendré par tous les $L_{v"}$, quand v" parcourt $\tilde{N}_1$. C'est un groupe de Lie abelien. Tout quotient $L_{v"}/\Gamma$ est un tore du groupe de Lie abelien $L"/\Gamma$. Mais un groupe de Lie abelien contient au plus un nombre dénombrable de tores. Il n y a donc qu'un nombre dénombrable de $L_{v"}$.

La partie existence du théorème est donc démontré dans tous les cas. Le reste en découle immédiatement. Ù

Bibliographie.

[Ano] D.V. Anosov : "Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature", Trud. Math. Inst. Steklova 90 (1967).

[BGS] W.Ballmann, M.Gromov, V.Schroeder : "Manifolds of non-positive curvature. Progress in Math.Vol 61, Birkh auser, Boston-Basel-Stuttgart (1985).

[BK] P. Buser and H. Karcher “Gromov’s almost flat manifolds”, Astérisque 81 (1981).

[Fed] H.Federer : "Geometric measure theory " , Springer Verlag (1969).

[Fra] J. Franks : "Invariant sets of hyperbolic toral automorphisms", Amer. J. Math. (1977), 99. 1089-1095.

[Ghy] E. Ghys : "Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes", Sém. Bourbaki. (Nov 1991), Exposé 747.

[Han] S. Hancock : "Construction of invariant sets for Anosov diffeomorphisms", J. London. Math. Soc. (1978), 18, 339-348.

[Hel] S. Helgason : "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Academic. Press (1978).

[Hir] M. Hirsch : "On invariant subsets of hyperbolic sets", Essays in topology and related topics. (1970), 126-146.

[Mañ é]$_1$ R. Mañ é : "Orbits of paths under toral automorphisms", Proc. Amer. Soc. (1979), 73, 121-125.

[Mañ é]$_2$ R. Mañ é : "Invariant sets of Anosov diffeomorphisms", Invent. Math. (1978), 46, 147-152.

[Mau] F.I.Mautner : "Geodesic flows on symmetric Riemannian spaces ", Ann. Math. 65 (1957), p.p 416-431.

[Mol]P. Molino : "Riemannian Foliations", Birkhauser (1988).

[Mor] F. Morgan : “Geometric measure theory”, Academic Press, INC (1987).

[Mos]$_1$ G.Mostow : "Some new decomposition theorems for semisimple groups", Memoirs. Ame. Math. Soc.14 (1961), p.p.31-54.

[Mos]$_2$ G.Mostow : "Strong rigidity of symmetric spaces " , Ann. Math. Studies 78. Princeton 1973.

[Rag] M. S. Raghunathan : “Discrete subgroups of Lie groups”, Springer-Verlag (1972).

[Sta] A. N. Starkov : “Structure of orbits of homogeneous flows and the Raghunathan conjecture”, Russian. Math. Surveys 45 (1990), 227-228.

[Tom] P. Tomter : "Anosov flows on infra-homogeneous spaces", Poc. Symp. in. pure. Math.14 (1970), 299-327.

[War] G. Warner : “Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I”, Springer-Verlag (1972).

[Wol] J. Wolf : "Spaces of constant curvature", Publish or Perish.

[Zeg]1 A.Zeghib : "Feuilletages géodésiques des varietés localement symétriques et applications ", Thèse. Dijon (1985).

[Zeg]2 A.Zeghib : "Sur une notion d’autonomie de systèmes dynamiques, appliquée aux ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques", Preprint. ENS Lyon (1991)