# Feuilletages géodésiques appliqués.

Zeghib, A.

pp. 729 - 760

Math. Ann. 298, 729–759 (1994)

Mathematische Annalen


# Feuilletages géodésiques appliqués

**A. Zeghib**

C.N.R.S.: U.M.R 128. Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07, France

Reçu le 31 janvier 1993; version revisée reçue le 13 septembre 1993

*Mathematics Subject Classification (1991):* 53C42, 53C12, 58F18

## 1 Introduction

**1.0** *Contenu de l'article.* Dans cet article, on se propose d'appliquer des résultats sur les feuilletages géodésiques, à quelques problèmes de géométrie riemannienne. Ceci a été accompli par plusieurs auteurs, dans le cas de la géométrie elliptique. Notre tâche ici est de tester la validité de leurs résultats, en géométrie hyperbolique.

Ce papier se divise naturellement en 3 parties: problèmes, outils et applications. Les problèmes seront exposés en 1.2, et complétés au par. 3. On y rappellera des faits classiques de géométrie, résumés dans les théorèmes 1, 2 et 3. Les applications se trouvent en 1.3, mais surtout en 1.5, avec quelques remarques supplémentaires au par. 3. Les outils seront introduits en 1.1, avec la notion de feuilletage géodésique local. On rappellera ensuite en 1.4 des résultats de [Zeg4] sur ces feuilletages: théorèmes I et II. Ils ne seront pas suffisants pour les applications. Un autre énoncé, le théorème III sera exposé au par. 2. Il s'avère, au moins dans le cas $\mathbf{C}^\infty$, que ce résultat entraîne les théorèmes I et II (2.5). Ceci rendra cet article pratiquement auto-suffisant. Ce résultat est dans un certain sens le seul contenu mathématique (c'est-à-dire du point de vue démonstration) de ce papier. Une idée de sa preuve sera donnée au par. 2. La preuve elle même occupera tous les pars. 4 et 5.

**1.1** *Feuilletages géodésiques locaux* [Zeg4]. Soit $V$ une variété riemannienne.

**Définition.** *On dira qu'une sous-variété $F$ de $V$ est* **relativement complète (dans** $V$**)** *si toute suite de Cauchy de $F$, n'admetant pas de limite dans $F$, n'admet en fait pas non plus de limite dans $V$ (cette définition n'a de sens que pour les sous-variétés).*

Cela singifie en d'autres termes, qu'une géodésique de $F$, est prolongeable dans $F$, tant qu'elle est prolongeable (en tant que courbe) dans $V$. Par exemple si $V$ est complète, alors $F$ est relativement complète si et seulement si elle est complète pour la métrique riemannienne induite.

**Définition.** *Un* **feuilletage local** *de $V$ est la donnée d'un couple $(U, \mathcal{F})$ où $U$ est un ouvert de $V$ (le support du feuilletage local) et $\mathcal{F}$ est un feuilletage de $U$ à feuilles relativement complètes dans $V$. (On notera généralement $(U, \mathcal{F})$ simplement par $\mathcal{F}$).*

Par exemple lorsque $V$ est complète la condition portant sur les feuilles de $\mathcal{F}$ dit simplement qu'elles sont complètes.

Enfin on dira que $\mathcal{F}$ est **géodésique** si toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont (totalement) géodésiques (dans $V$).

**1.2** *Problèmes géométriques engendrant des feuilletages géodésiques locaux*

1.2.1 *Immersions isométriques* (voir [Che-Kui, Gro, O'N-Sti, Spi] et par. 3). Il est connu depuis Gauss, au moins lorsque la variété ambiante est l'espace euclidien à trois dimensions, qu'une surface plate (i.e. de même courbure que l'espace ambiant) isométriquement immergée, est "développable". Elle est en particulier "réglée". D'où l'appartition des feuilletages géodésiques; mais locaux, comme on vient de le formuler.

La propriété de développabilité (et en particulier le caractère reglé) des surfaces plates de l'espace euclidien, se généralise aux immersions isométriques de codimension relativement petite (codimension>dimension) entre variétés à *même courbure constante.*

Plus généralement, soit $W$ et $V$ deux variétés riemanniennes et $f: V \to W$ une immersion isométrique de classe $\mathbf{C}^2$. On oubliera souvent $f$, en disant que $V$ est une sous-variété (immergée) dans $W$ (sous-entendant qu'elle est munie de la métrique induite). Notons $\alpha_x$ la seconde forme fondamentale de $V$ en $x$.

**Définition.** *Le sous-espace* **plat** *ou* **de nullité relative**, *$Fl_x$ de $V$ en $x$, est le noyau de $\alpha_x$ ($X \in Fl_x$ si et seulement si: $\alpha_x(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in T_xV$).*

Evidemment cet espace est partout de codimension 0, i.e. coïncide avec l'espace tangent si et seulement si $V$ est géodésique dans $W$. Il est aussi connu que généralement, lorsqu'il est partout nul (ou même de codimension supérieure à 2), alors $V$ est localement rigide au sens que les déformations isométriques de $V$ se déduisent d'isométries de $W$ [Kob, Nom, Spi]. Entre ces deux cas extrêmes, l'espace plat peut prendre n'importe quelle dimension, mais, il peut surtout changer de dimension d'un point à l'autre.

**Définition.** *La dimension de $Fl_x$ est dite* **l'indice de nullité relative** *de $V$ en $x$. Le minimum des indices de nullité relative des points de $V$, est appelé* **l'indice de nullité relative** *de $V$.*

Le résultat géométrique (folklorique) suivant montre qu'entre les deux cas triviaux, on récupère une structure géométrique modelé par notre notion ci dessus de feuilletage géodésique local.

**Théorème 1** (voir par exemple [Gro] ou [Spi]). *Soit $V$ une sous-variété de classe $C^2$ d'une variété $W$ à* courbure constante. *Soit $U$ l'ouvert de $V$ où la dimension de l'espace plat $Fl$ est minimale (égale à l'indice de nullité relative de $V$). Alors $Fl$ détermine un feuilletage local de $V$, de classe $C^1$ et à support égal à $U$. Les feuilles sont en plus géodésiques dans $W$ (et à fortiori dans $V$). Ce feuilletage sera appelé le feuilletage* plat *de $V$.*

Ce théorème contient deux énoncés. Le premier, analytique, sur le fait que $Fl$ est intégrable dans $U$. Le second, dynamico-géométrique, affirmant qu'il s'agit d'un feuilletage local, i.e. que les feuilles sont relativement complètes dans $V$. Ce fait a été systématiquement étudié et généralisé à bien d'autres situations. Voir [Dom] et [Rec].

L'autre volet de la théorie est (purement) algébrique. Il s'agit de trouver des conditions assurant que l'espace plat est non trivial (de dimension non nulle). Les résultats dans ce domains ne cessent d'accroître. Citons-en le premier et le dernier (à notre connaissance).

**Théorème 2.** *Soit $f: V \to W$ une immersion isométrique de classe $C^2$ entre variétés riemanniennes. Pour un 2-plan $\sigma$ tangent à $V$, notons $K_V(\sigma)$ et $K_W(\sigma)$ ses courbures sectionnelles dans $V$ et $W$ respectivement. L'immersion $f$ est dite parabolique (resp. hyperbolique) si pour tout $\sigma$ on a: $K_V(\sigma) = K_W(\sigma)$ (resp. $K_V(\sigma) \leqq K_W(\sigma)$). On a:*

(i) *Supposons $f$ parabolique (par exemple $V$ et $W$ ayant la même courbure constante). Alors l'espace plat vérifie:* $\dim Fl \geqq 2\dim V - \dim W$. *Il est en particulier non trivial si* $\dim W < 2\dim V$ [Tom1].

(ii) *Supposons $f$ hyperbolique; alors* $\dim Fl \geqq \dim W - 2\dim V$ [Flo] (voir aussi [Bor]).

1.2.2 *Version feuilletée.* Maintenant, au lieu d'une sous-variété de $W$, on se donne un feuilletage local (pas nécessairement géodésique) $\mathcal{F}$ sur $W$. Supposons que $W$ est à courbure constante, $\mathcal{F}$ est de classe $C^2$ et que l'indice de nullité relative de toutes les feuilles est positif (d'après le théorème 2, ceci est bien le cas si toutes les feuilles ont la même courbure constante que $W$, et si $2\dim\mathcal{F} > \dim W$). Alors les feuilletages plats individuels des feuilles de $\mathcal{F}$, se réunissent pour donner un feuilletage géodésique local de $W$, de classe $C^1$.

1.2.3 *Espace de $\kappa$-nullité.* Soit $V$ une variété riemannienne et $\kappa$ un réel.

**Définition.** Notons $R$ le tenseur courbure de $V$ et soit $x \in V$. On définit l'espace de $\kappa$-nullité de $V$ en $x$ par:

$$N_\kappa(x) = \{X \in T_xV/\text{pour tous } Y, Z \in T_xV;\ R(X,Y)Z = \kappa(\langle Y,Y\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)\}\,.$$

Remarquons d'abord que cet espace coïncide partout avec l'espace tangent exactement lorsque $V$ est à courbure constante $\kappa$. En effet, l'expression ci-dessus de $R$ est celle du tenseur courbure d'une variété à courbure constante $\kappa$. Remarquons, également que si $V$ est une sous-variété d'une variété $W$ à courbure constante $\kappa$, alors l'espace de $\kappa$-nullité de $V$ contient son espace plat (qu'on avait également appelé espace de nullité relative). En fait, ces deux espaces sont généralement confondus (pour un indice de nullité relative assez grande). C'est probablement à partir de ce fait, qu'a été dégagé cette notion d'espace de $\kappa$-nullité, exprimant une propriété intrinsèque de l'espace plat. De toute façon, le théorème 1 se généralise en remplaçant l'espace plat par l'espace de $\kappa$-nullité. On retrouve donc un feuilletage géodésique (voir 3.3).

**Définition.** *On dira que $V$ est* **partiellement hyperbolique** *(resp.* **partiellement plate***;* **partiellement elliptique***) si pour tout $x$ de $V$, l'espace de $\kappa$-nullité est non nul pour $\kappa = -1$ (resp. $0$; $+1$).*

1.2.4 *Courbure holomorphe constante.* Tout ce qu'on vient de discuter se généralise au cas où toutes les données sont holomorphes. Plus précisément, on suppose que $W$ et $V$ sont deux variétés hermitiennes. On considère une immersion isométrique holomorphe $f: V \to W$. On suppose maintenant de plus que $W$ est à courbure holomorphe constante. Les théorèmes 1 et 2 sur l'espace plat se généralisent, le feuilletage plat dans ce cas est de plus holomorphe.

1.2.5 *Sous-variétés réglées.* En géométrie euclidienne classique (et aussi en géométrie algébrique), il y a des notions de surfaces (ou plus généralement sous-variétés) reglées. Ces notions sont un peu "vagues", mais il semble dans tous les cas, qu'un feuilletage géodésique, naturellement local (et non global), doit en sortir. On proposera ici deux notions de sous-variétés, **réglées au sens faible**, et **réglées** (dans un sens moins faible que le premier, mais pas si fort!).

**Définition.** *Soit $V$ une sous-variété d'une variété riemannienne $W$. On dira que $V$ est* **réglée au sens faible** *dans $W$ si par tout $x$ de $V$ passe un "morceau de géodésique" de $W$ qui est inclus dans $V$ (il existe $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to W$, une géodésique, à image dans $V$ telle que $\gamma(0) = x$).*

Cette définition modélise bien la structure des sous-variétés décrites au théorème 1, i.e. d'indice de nullité relative positif (on le verra a propos de la définition forte en 3.5.2). Mais, elle paraît très faible, (la plus faible possible). Elle contient en effet les surfaces réglées au sens classique et même les surfaces plissées [Thu] (qui sont des sous-variétés $C^0$). Son intérêt apparaîtra dans le cas analytique.

**1.3** *Du local au global. Applications du feuilletage plat aux immersions isométriques.* Les feuilletages plats des immersions isométriques n'ont été pratiquement exploités que via la géométrie synthétique globale (essentiellement projective) de l'espace ambiant:

*Cas plat.* C'est ainsi qu'on démontre, dans le cas plat, qu'on ne peut pas immerger isométriquement un tore plat de dimension $n$, dans l'espace euclidien à $2n-1$ dimensions [O'N], et ce simplement parce que le tore (compact) ne peut pas contenir une sous-variété géodésique complète et non triviale d'un espace euclidien. Le feuilletage plat n'est par contre "d'aucun intérêt" pour les immersions isométriques entre tores plats (compacts!).

*Cas elliptique.* On reproduira en 3.2.3, pour donner une idée précise sur l'utilisation du feuilletage plat, une belle démonstration de [Gro], d'un résultat de [Fer2] (utilisant des propriétés algébrico-géométriques des sphères euclidiennes), affirmant que toute immersion isométrique de $S^n$ dans $S^{2n-1}$ est standard (i.e. modulo isométrie son image est un équateur).

Un résultat partiel antérieur de [Fer1] montre la même chose avec $2n-1$ remplacé par $2n-\nu_n$ (voir 3.2.2). La preuve cette fois consiste simplement à montrer que les feuilletages géodésiques locaux en question (vérifiant une condition de dimension) n'existent pas.

*Cas hyperbolique.* Maintenant, les plus abondantes parmi les variétés à courbure constante sont certainement hyperboliques (i.e. à courbure constante $-1$). Que peut-on donc en dire? Évidemment on peut faire jouer à l'espace hyperbolique le même rôle que celui de l'espace euclidien (sa géométrie projective est aussi topologiquement triviale). On en déduit ainsi que l'on ne peut pas immerger une $n$-variété hyperbolique compacte (sans bord) dans un espace hyperbolique à $2n-1$ dimensions.

Mais que peut-on dire d'une immersion entre deux variétés hyperboliques, toutes compactes (par exemple)? Le raisonnement pour les sphères n'a plus d'analogue, à moins qu'on adopte le point de vue de [Fer1], c'est-à-dire en montrant que ses variétés n'admettent pas du tout de feuilletage géodésique (en restreignant éventuellement, comme Ferus, les dimensions). C'était là notre principale motivation dans notre étude des feuilletages géodésiques locaux dans [Zeg4].

**1.4** *Résultats de* [Zeg4] *sur les feuilletages géodésiques locaux.* Le résultat principal de [Zeg4] nous intéréssant ici est:

**Théorème I** (Théorème C de [Zeg4]). *Soit $V$ une sous-variété (immergée) d'une variété localement symétrique à courbure négative $W$. Supposons $V$ de volume fini, complète et* $\dim V > 1$. *Alors $V$ n'admet pas de feuilletage local de classe $C^1$ dont les feuilles sont géodésiques* dans $W$.

Ceci entraîne en particulier le résultat suivant qui suffira a lui seul pour pas mal d'applications.

**Théorème II** (Théorême B de [Zeg4]). *Une variété localement symétrique, à courbure négative, complète et de volume fini n'admet pas de feuilletage géodésique local $C^1$.*

**1.5** *Applications.* L'application des ces derniers résultats sur les feuilletages géodésiques locaux, aux problèmes géométriques précédents, donnent les résultats suivants.

1.5.1 *Sous-variétés des variétés hyperboliques.*

**Théorème A.** *Soit $W$ une variété hyperbolique (courbure constante $-1$) et $V$ une sous-variété complète et de volume fini. Alors, ou bien $V$ est géodésique dans $W$, ou bien l'indice de nullité relative de $V$ est nulle, i.e. il existe un point de $V$ où la seconde forme fondamentale est non dégénerée.*

*Preuve.* Sinon, d'après le théorème 1, $V$ supportera un feuilletage local non trivial à feuilles géodésiques dans $W$. Contradiction avec le théorème I. □

1.5.2 *Immersions isométriques entre variétés hyperboliques.*

**Théorème B.** *Soit $W$ une variété à courbure constante $-1$. Soit $V$ une sous-variété de classe $C^2$, complète et de volume fini et de même courbure constante. Supposons que:* $2\dim V > \dim W$. *Alors $V$ est géodésique dans $W$.*

*Preuve.* Cela découle des théorèmes 2 et A. Il pourra également se déduire directement des théorèmes 1, 2 et I. On peut même utiliser le théorème II au lieu du théorème I, puisqu'on suppose pas ici que $V$ est hyperbolique.

1.5.3 *Version feuilletée. Feuilletages hyperboliques.* On a également l'application suivante de 1.2.2 et le théorème II.

**Théorème C.** *Une variété hyperbolique $V$, complète et de volume fini n'admet pas de feuilletage local $\mathscr{F}$ de classe $C^2$, ayant toutes ses feuilles hyperboliques et tel que* $2\dim\mathscr{F} > \dim V$.

1.5.4 *Hyperolicité partielle.*

**Théorème D.** *Soit $V$ une variété complète et de volume fini. Supposons $V$ partiellement hyperbolique. Alors; ou bien $V$ est hyperbolique; ou bien $V$ est un tore hyperbolique, i.e. un quotient compact $\Gamma\backslash SOL(n)$.*

*Preuve.* Cette fois $V$ n'est ni hyperbolique, ni sous-variété d'une variété hyperbolique. Les théorèmes I et II ne s'appliquent donc pas. Il faudra alors étudier des feuilletages géodésiques locaux, vérifiant une hypothèse d'hyperbolicité partielle comme c'est le cas de l'espace de $-1$-nullité $N_{-1}$. Ce sera l'objet du théorème III, énonconé au par. 2. On y trouvera la définition du groupe $SOL(n)$. □

1.5.5 *Immersions isométriques holomorphes.* Les théorèmes A et B se généralisent au cas holomorphe en supposant que $W$ est à courbure holomorphe négative constante $-1$ (pour normaliser), i.e. $W$ est une variété hyperbolique complexe.

**Théorème E.** *Soit $W$ une variété hyperbolique complexe et $V$ une sous-variété holomorphe, complète et de volume fini. Alors, ou bien $V$ est géodésique dans $W$, ou bien l'indice de nullité relative de $V$ est nul, i.e. il existe un point de $V$ où la seconde forme fondamentale est non dégénerée.*

La condition d'holomorphie peut être contournée grâce à un résultat de Dajczer et Rodriguez [Daj-Rod] qui dit qu'une immersion isométrique d'indice de nullité relative positif, d'une sous-variété kählerienne de dimension réelle supérieure à 4, dans une variété hyperbolique complexe, est nécessairement holomorphe. Le théorème $E$ entraîne donc:

**Théorème F.** *Soit $V$ une variété kählerienne telle que* $\dim V \geqq 4$, *et $f: V \to W$, une immersion isométrique dans une variété hyperbolique complexe. Supposons $V$ complète et de volume fini. Alors, ou bien $f$ est d'indice de nullité relative nul, ou bien, $f$ est holomorphe et $f(V)$ est géodésique. En particulier dans ce cas $V$ est également une variété hyperbolique complexe.*

Le théorème B se généralise à son tour au cas holomorphe. Mais, il sera de toute façon contenu dans le résultat suivant de Cao et Mok, qui permet de contourner la condition d'isométrie. Le théorème E permet d'en raccourcir la preuve (voir 3.4.2).

**Théorème G** [Cao-Mok]. *Soit $V$ et $W$ deux variétés hyperboliques complexes et $f: V \to W$ une immersion holomorphe (mais pas à priori isométrique). Supposons que* $2 \dim V > \dim W$. *Alors $f(V)$ est gédésique et $f$ est isométrique.*

1.5.6 *Sous-variétés réglées.* (voir 3.5 pour les preuves).

**Théorème H.** *Soit $W$ une variété localement symétrique à courbure négative (par exemple hyperbolique ou hyperbolique complexe) et $V$ une sous-variété* analytique *complète et de volume fini. Supposons $V$ réglée au sens faible. Alors $V$ est géodésique dans $W$.*

**Théorème J.** *Une sous-variété $C^1$, complète, de volume fini et réglée dans une variété localement symétrique à courbure négative (par exemple hyperbolique ou hyperbolique complexe) est géodésique.*

Ces deux résultats signifient que dans ce contexte, il n'y a pas de sous-variété non trivialement réglée (i.e. qui ne soit pas géodésique).

## 2 Feuilletages partiellement hyperboliques

En vu de démontrer le théorème D sur les variétés riemanniennes partiellement hyperboliques, on va étudier les feuilletages géodésiques locaux de variétés, pas nécesairement hyperboliques, mais vérifiant une condition d'hyperbolicité partielle, touchant uniquement des directions tangentes au feuilletage.

**2.1 Définition.** *On dira qu'un feuilletage local $\mathcal{F}$ d'une variété riemannienne $V$, est* **partiellement hyperbolique** *s'il vérifie* **la condition** (*) *suivante: pour tous, $X$ tangent à $\mathcal{F}$, $Y$ et $Z$ tangents à $V$, on a:*

$$R(X,Y)Z = -1(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)\,. \tag{*}$$

*Ici $R$ est le tenseur courbure de $V$ [donc $R(X,Y)Z$ a la même forme que dans un espace à courbure constante $\kappa = -1$].*

C'est par exemple le cas de tout feuilletage local (géodésique ou non) d'une variété hyperbolique. C'est aussi le cas du feuilletage plat d'une sous-variété d'une variété hyperbolique, qui est de plus un feuilletage géodésique. On se propose dans ce qui suit de classifier les feuilletages géodésiques locaux et partiellement hyperboliques des variétés complètes et de volume fini.

**2.2** *Le groupe $SOL(n)$.* Considérons l'algèbre de Lie $sol(n)$ de dimension $2n+1$ engendré par un élément $\alpha$ et deux sous-algèbres abéliennes $\mathcal{G}^{ss}$ et $\mathcal{G}^{uu}$, tels que pour tout $X$ (resp. $Y$) élément de $\mathcal{G}^{ss}$ (resp. $\mathcal{G}^{uu}$) on a $[\alpha, X]$ (resp. $[\alpha, Y]$) $= -X$ (resp. $Y$) et $[X, Y] = 0$. Appelons $SOL(n)$ le groupe de Lie simplement connexe dont $sol(n)$ est l'algèbre de Lie. Ce n'est rien d'autre que le produit semi-direct $\mathbb{R}.(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n)$ où le facteur $\mathbb{R}$ agit par $expt\, ad(\alpha)\,(x, y) = (e^{-t}x, e^t y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$.

Considérons le flot déterminé par $\alpha$ (c'est-à-dire le flot du champ vectoriel invariant à gauche déterminé par $\alpha$). Il est hyperbolique, c'est-à-dire que $ad\alpha$ n'admet pas de valeurs propres imaginaires pures dans $sol(n)/\mathbb{R}\alpha$. C'est en fait, modulo automorphisme, l'unique flot hyperbolique (il est facile de voir qu'un élément $\beta$ déterminant un flot hyperbolique s'écrit $\beta = a\alpha + X + Y$ où a est un réel non nul, $X \in \mathcal{G}^{ss}$ et $Y \in \mathcal{G}^{uu}$. On construit facilement un automorphisme de l'algèbre envoyant $\alpha$ sur $\beta$). Ceci justifie la:

**2.3 Définition.** *On appellera feuilletage* **standard** *de $SOL(n)$, tout feuilletage (de dimension 1) qui se déduit à l'aide d'un automorphisme du feuilletage défini par l'élément $\alpha$.*

**2.4** *Une $(G, G)$-structure* (où $G$ est un groupe de Lie) sur une variété $V$ est un recouvrement de $V$ par des cartes à valeurs dans $G$, tel que les changements de cartes soient des restrictions de translations à gauche dans $G$. En particulier les champs et les métriques invariantes à gauche sur $G$ se définissent bien sur une telle variété $V$.

Munissons $SOL(n)$, d'une métrique invariante à gauche telle que la norme de $\alpha$ soit égale à 1, et telle que les sous-espaces $\mathbb{R}\alpha$, $\mathcal{G}^{ss}$ et $\mathcal{G}^{uu}$ soient deux à deux orthogonaux (une telle métrique est unique à automorphisme isométrique près).

**Affirmation.** *Soit $V$ une variété admettant une $(SOL(n), SOL(n))$-structure. Alors un feuilletage standard de $V$ (c'est-à-dire correspondant à un feuilletage standard de $SOL(n)$) est géodésique et partiellement hyperbolique.*

**Théorème III.** *Soit $V$ une variété riemannienne de volume* fini, *admettant un feuilletage* géodésique *local non-trivial (i.e. de dimension et codimension non-nulles) de classe $C^\infty$ et à feuilles* complètes. *Supposons que $\mathcal{F}$ est partiellement hyperbolique. Alors: $V$ admet une $(SOL(n), SOL(n))$-structure et $\mathcal{F}$ est un feuilletage standard de $V$ (en particulier $\mathcal{F}$ est de dimension 1). En particulier si $V$ est complète alors elle est un* tore hyperbolique*: un quotient $\Gamma \backslash SOL(n)$ où $\Gamma$ est un réseau (nécessairement co-compact) de $SOL(n)$.*

*Remarques.* 1. Ce théorème est vrai dans le cas $C^1$. La preuve dans ce cas sera plus longue en sa première partie (par. 4). Elle fera recours aux méthodes de [Zeg2].

2. On peut en fait montrer, qu'en général la complétion métrique $\bar{V}$ de $V$ est une variété et s'écrira donc comme un quotient compact $\Gamma \backslash SOL(n)$. On n'inclura pas une démonstration dans ce texte pour ne pas l'encombrer davantage!

**2.5** *Déduction des théorèmes I et II, dans le cas $C^\infty$.* Le théorème II se déduit du théorème III comme suit. Supposons qu'une variété hyperbolique de dimension $n$ supporte un feuilletage géodésique local (non-trivial) de class $C^\infty$. Il est tautologiquement partiellement hyperbolique. Le théorème III entraîne alors en particulier que cette variété et par suite l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, sont localement isométrique à $SOL(n)$. Il est connu que ceci est impossible.

Quant au théorème I, notons que le théorème III se généralise (comme le théorème I vis à vis du théorème II), par la même preuve, au cas d'un feuilletage local d'une sous-variété $V$ dans une variété $W$, à feuilles géodésiques et complètes dans la variété ambiante $W$. Cette fois la condition (*) devient: pour tout $X$ tangent au feuilletage, $Y, Z$ tangents à $W$, on a: $R(X,Y)T = -1(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y)$, où $R$ est le tenseur courbure de $W$.

Ceci s'applique donc en particulier à la situation du théorème I. La conclusion sera que $V$ est un tore hyperbolique $\Gamma\backslash SOL(n)$, muni d'un feuilletage standard (de dimension 1). Montrons que ceci est impossible: un tore hyperbolique $V = \Gamma\backslash SOL(n)$ $(n > 0)$, n'admet pas d'immersion dans une variété hyperbolique $W$, telle qu'un feuilletage standard de ce tore hyperbolique soit géodésique dans $W$. En effet considérons deux orbites périodiques distincts du feuilletage standard (elles existent pour $n > 0$). Elle détermine un groupe résoluble, car $SOL(n)$ est lui même résoluble. Mais, leurs images dans $W$, déterminent un sous-groupe de $\pi_1(W)$, qui n'est résoluble que si les deux orbites sont (géométriquement) confondues [Thu]. □

**2.6** *Idée de la preuve du théorème III.* Notons d'abord que plusieurs idées de la première partie de cette preuve existent en fait dans [Zeg2]. On considère le flot géodésique $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ du feuilletage $\mathcal{F}$ ($T^1\mathcal{F} \subset T^1V$, est le fibré des vecteurs unitaires tangents à $\mathcal{F}$).

*1ère étape. Homogénéité (locale)* (par. 4). La première étape consiste essentiellement à montrer que ce flot est algébrique, c'est-à-dire que c'est un double quotient d'un flot de translations à droite sur un groupe de Lie $G$.

Notons que la condition (*) entraîne que $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ est un flot d'Anosov à exposants de Lyapunov $+1$ et $-1$, et surtout à distributions stable et instable aussi différentiable que $\mathcal{F}$. On est alors tenté d'appliquer le théorème de [B-F-L], affirmant qu'un tel flot est (difféomorphe à) un flot algébrique.

La première objection à faire, c'est que $T^1\mathcal{F}$ n'est pas compact et il n'est pas naturel de le supposer ici (comme pourraient le penser certains). On remédiera à cette difficulté en montrant que $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ préserve une mesure lisse finie.

La seconde objection, plus sérieuse, rappelle la question encore ouverte, à savoir si une variété compacte dont le flot géodésique est isomorphe à celui d'une variété localement symétrique à courbure négative, est elle-même localement symétrique? On veut dire par cela que, montrer que le flot $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ est (isomorphe à) un flot algébrique, ne renseigne nullement sur la compatibilité de l'action (locale) du groupe en question avec les données de départ, c'est-à-dire la structure riemannienne et le feuilletage.

Notre remarque fondamentale ici est que le flot $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ est naturellement "autonome" (par rapport au transport parallèle usuel). En effet, la condition (*) entraîne que le flot géodésique $(St^n\mathcal{F}, \phi)$ sur le fibré des $n$-repères tangents à $\mathcal{F}$ $(n = \dim \mathcal{F})$ est autonome. La notion d'autonomie a été introduite dans [Zeg2]. Toutefois pour préserver au présent texte son atuonomie, on ne va utiliser ce dernier article que légèrement. En fait, la preuve de l'algébricité de $(St^n(\mathcal{F}), \phi)$ ressemble fondamentalement à la preuve du théorème du $C$ de [Zeg2] sauf qu'on a pu ici éviter le problème de régularité (des champs parallèles).

Il ne sera pas difficile, d'après cette preuve, de voir que l'action (locale) du groupe ainsi construit, passe à la variété $V$ elle-même et qu'elle y est isométrique. D'où l'homogénéité locale de $V$.

*2ème étape* (par. 5). Ici on étudie le cas (localement) homogène auquel on est ramené par la première étape. On considéra donc une variété $V$ munie d'un feuilletage vérifiant (*) et munie d'une action (locale) d'un groupe d'isométries transitif respectant le feuilletage. Le problème étant homogène on ne supposera plus comme au paragraphe précédent que $V$ est de volume fini. Un énoncé plus précis et le plan de sa preuve se trouveront dans 5.1 et 5.4.

## 3 Remarques supplémentaires sur les problèmes géométriques liés aux feuilletages géodésiques locaux

**3.1.** *Sur le théorème 1.* Ce théorème se présente dans la littérature sous plusieurs formes et démonstrations. L'approche de [Gro] (la plus synthétique) est la suivante. Le problème étant local, on peut supposer que $W$ est une variété complète simplement connexe à courbure constante donnée. Notons $\tilde{\mathrm{Gr}}(W)$ la Grassmannienne des $n$-plans affines (i.e. sous-variétés géodésiques complètes et connexes de dimension $n$), où $n = \dim V$.

Considérons l'application de Gauss, $G: V \to \tilde{\mathrm{Gr}}(W)$, qui à un point $x$ associe le $n$-plan affine déterminé par l'espace tangent $T_xV$. L'espace plat s'identifie au noyau de $dG$. Le feuilletage plat est donc défini par les niveaux de $G$, dans l'ouvert où le rang de $G$ est minimale. On montre par une manipulation sur le tenseur courbure que ses feuilles sont géodésiques. On renvoie à [Gro, par. 264] pour la preuve de la complétude relative de ses feuilles.

*Remarque.* Partout, l'hypothèse que $V$ soit de classe $C^2$ est optimale. En effet, toutes les preuves (du théorèmes 1 et 2) utilisent le tenseur courbure de $V$. Voir [Kui] pour des contre-exemples au théorème B dans le cas $C^1$.

3.1.1 *Régularité.* Supposons $V$ de classe $C^k$, alors la seconde forme fondamentale $\alpha$ est de classe $C^{k-1}$, et par suite l'espace plat $Fl = \mathrm{Ker}(\alpha)$ est $C^{k-2}$. Montrons qu'ici $Fl$ est en fait $C^{k-1}$. En effet, étant $C^{k-1}$, l'application $G$ admet des sections $C^{k-1}$. Cela veut dire que si $\tau$ est une transversale aux niveaux de $G$, assez petite et $\mathbf{v}$ est un voisinage assez petit de $\tau$, alors l'application $h: \mathbf{v} \to \tau$, qui à un point associe l'intersection de sa plaque avec $\tau$, est $C^{k-1}$. Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème du rang. Notons $\mathscr{F}$ le feuilletage plat et supposons pour fixer les idées qu'il est de dimension 1. Sur $\mathbf{v} - \tau$, considérons l'application $C^{k-1}$, $g(x) = (x, h(x))$. Les feuilles de $\mathscr{F}$ étant des géodésiques, la donné de $T_x\mathscr{F}_x$ est équivalente à celle de $g(x)$. Donc l'application: $x \to T_x\mathscr{F}_x$ est $C^{k-1}$ sur $\mathbf{v} - \tau$. Donc $Fl$ est $C^{k-1}$. $\square$

**3.2** *Immersions isométriques entre variétés à même courbure constante.*

3.2.1 *Sur le théorème 2.* Les estimations de $\dim Fl$ sont basées sur l'équation de Gauss: $K_V(\sigma) = K_W(\sigma) - \langle \alpha_x(X,X), \alpha_x(Y,Y)\rangle - \langle \alpha_x(X,Y), \alpha_x(X,Y)\rangle$, où: $X, Y$ appartiennent à $T_xV$, $\sigma$ est le plan qu'ils engendrent, $K_V$ et $K_W$ sont les courbures sectionelles dans $V$ et $W$ respectivement.

Fixons $x$ et notons $\alpha = \alpha_x$. L'immersion est parabolique (voir théorème 2) si:

$$\text{Pour tous } X \text{ et } Y\text{: } \langle \alpha(X,Y), \alpha(Y,Y)\rangle - \langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y)\rangle = 0\,. \qquad (*)$$

Elle est hyperbolique si:

$$\text{Pour tous } X \text{ et } Y\text{: } \langle \alpha(X,Y), \alpha(Y,Y)\rangle - \langle \alpha(X,Y), \alpha(X,Y)\rangle \leqq 0\,. \qquad (**)$$

On est donc ramené à étudier des formes bilinéaires définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $p = \operatorname{codim} V$, vérifiant la condition (*) ou (**). Le résultats de [Tom1] (resp. [Flo]) affirme que dans le cas le cas parabolique (resp. hyperbolique), on a: $\dim \operatorname{Ker} \alpha \geqq n-p$ (resp. $\dim \operatorname{Ker} \alpha \geqq n-2p$).

3.2.2 *Feuilletages géodésiques locaux en courbure positive constante* $+1$. Les feuilletages géodésiques dans ce cas peuvent exister! (voir 3.5.4) Le résultat de [Fer1] qu'on a cité en 1.3, dit qu'une variété elliptique de dimension $n$ n'admet pas de feuilletage géodésique $\mathcal{F}$, de class $C^1$, à feuilles complètes et vérifiant $\dim \mathcal{F} \geqq \nu_n$. Le nombre $\nu_n$ se définit comme le plus grand entier tel que $\varrho(n-\nu_n) \geqq \nu_n + 1$, et $\varrho(k)$ pour $k$ entier, se définit comme le plus grand entier tel que la fibration $St_k^{\varrho(k)} \to St_k^1 = S^{k-1}$ admet une section globale. Ici $St_k^\varrho$ est la variété de Stiefel de $\varrho$-repères orthonormés dans $\mathbb{R}^k$. Notons que la preuve est de nature "infinitésimale": par positivité de la courbure, des champs de Jacobi normaux adaptés à $\mathcal{F}$ s'annuleront si l'espace normal est de dimension "relativement petite". Le feuilletage est donc singulier! Ceci entraîne la rigidité des immersioins isométriques dans ce contexte, si $p < n - \nu_n$ ($n = \dim V$ et $p = \operatorname{codim} V$).

3.2.3. Voici maintenant une démonstration de [Gro], s'appliquant aux sphères avec les mêmes conditions qu'au théorème B (mais utilisant des propriétés extérieures au feuilletage plat). Notons $f : S^n \to S^{2n-1}$, une immersion isométrique. Soit $F$ une feuille du feuilletage plat (qui est non trivial d'après le théorème 2). Elle est, ainsi que son image $f(F)$, géodésique respectivement dans $S^n$ et $S^{2n-1}$. Elles sont donc invariantes par les antipodes $x \to -x$, dans $S^n$ et $S^{2n-1}$ respectivement. On en déduit que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x$ dans l'ouvert $U$ de $S^n$, support du feuilletage plat. Soit $C$ un grand cercle (géodésique) dans $U$. Son image $f(C)$ est une courbe de même longueur $2\pi$ et invariante (comme $C$) par la symétrie $x \to -x$. Il n'est pas difficile de voir qu'alors $f(C)$ est également un grand cercle géodésique dans $S^{2n-1}$. Des cercles tels que $C$, on en trouve suffisamment pour conclure que $f(S^n)$ est géodésique. En effet pour tout point $x$ de $U$ et tout vecteur de $T_x S^n$, proche de $Fl_x$, le grand cercle tangent à $v$ est inclus dans $U$. □

**3.3** *Espace de $\kappa$-nullité.* La question qui se pose à propos de l'espace de $\kappa$-nullité est de savoir, dans quelle mesure, une variété partiellement hyperolique (resp. plate; elliptique) est (complètement) hyperbolique (resp. plate; elliptique)?

Remarquons tout de suite que le produit d'une variété plate par n'importe quelle autre variété est partiellement plate. La question dans le cas plat est de savoir justement dans quelles conditions la réciproque de ce fait est vraie? Rosenthal [Ros] et Ferus [Fer1] montrent des résultats partiaux respectivement dans le cas plat et elliptique. Ils utilisent essentiellement la généralisation suivante (mentionnée en 1.2.3) du théorème 1.

**Théorème 3** [Che-Kui, Fer, Dom, Spi]. *Soit $V$ une variété riemannienne et $\kappa$ un réel. Supposons $N_\kappa(x)$ non nul pour tout $x$ de $V$. Soit $U$ l'ouvert de $V$ où $N_\kappa$ est de dimension minimale. Alors $N_\kappa$ définit un feuilletage géodésique local $\mathcal{F}$ de $V$, à support égal à $U$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ vérifie une propriété analogue à la condition* (*) *avec* $-1$ *remplacé par $\kappa$, à savoir que pour $X \in T\mathcal{F}$, $Y, Z \in TV$ on a:*

$$R(X, YZZ = \kappa\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).$$

**3.4** *Immersions holomorphes.* Considérons maintenant une variété $W$, Kählerienne à *courbure holomorphe constante.* C'est donc (modulo normalisation de cette constante) localement isomorphe à $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}P^m$ (l'espace projectif complexe à courbure holomorphe $+1$) ou $\mathbb{C}H^m$ (l'espace hyperbolique complexe à courbure holomorphe $+1$). Le théorème 1 s'étend directement aux sous-variétés holomorphes d'une telle variété. Il suffit de considérer cette fois la Grassmannienne des plans affines holomorphes (voir 3.1).

3.4.1 *Immersions holomorphes* (non nécessairement isométriques). Notons d'abord que Ferus [Fer1] montre des résultats de rigidité d'immersions isométriques holomorphes entre variétés à courbure holomorphe $+1$, avec les mêmes restrictions de dimension de 3.2.2. Auparavant, Feder [Fed] montrait dans le cas de $\mathbb{C}P^n$, que toute immersion *holomorphe* $f:\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^{2n-1}$ est à image géodésique dans $\mathbb{C}P^{2n-1}$. Remarquons que cela n'impliquerait pas que $f$ est isométrique puisqu'il existe des automorphismes holomorphes (projectifs) de $\mathbb{C}P^n$ qui ne sont pas isométriques.

3.4.2 *Sur la preuve du théorème G.* Le théorème G de Cao et Mok est donc l'analogue hyperbolique du résultat de Feder. Remarquons d'abord que la conclusion que $f$ est isométrique n'est pas surprenante, puisqu'ici, tous les difféomorphismes holomorphes sont isométriques (les isométries de la boule unité complexe munie de sa structure hermitienne symétrique, sont exactement les difféomorphismes holomorphes qui la respecte). La preuve de [Cao-Mok] commence par un calcul de la classe de Chern totale de $V$. La formule de proportionnalité de Hirzebruch entraîne que cette classe s'écrit comme polynôme universel en la première classe de Chern. Cette dernière s'exprime à l'aide de la forme de Ricci. Dans [Cao-Mok] on exprime cette dernière à l'aide de la forme de Kähler de $V$ et d'une 2-forme $\sigma$ qui s'obtient à partir de la seconde forme fondamentale comme la forme de Kähler s'obtenait à partir de la métrique hermitienne. Des manipulations algébriques exactement comme dans [Fed] entraîneront alors que $\int \sigma^n = 0$. Or $\sigma$ est semi-négative (ceci exprime le fait que la courbure holomorphe d'une sous-variété est inférieure à celle de son espace ambiant). On en déduit que le noyau de $\sigma$ est non trivial. Il s'avère que ce noyau est exactement l'espace plat de l'immersion $f$. On pourrait donc appliquer le théorème E pour conclure que $f(V)$ est géodésique. Quant à Cao et Mok, ils conclurons à l'aide d'une argumentation utilisant des propriétés particulières du feuilletage plat.

3.4.3 *Version feuilletée.* Notons l'analogue holomorphe suivant du théorème C:

**Théorème.** *Une variété $V$ hyperbolique complexe complète et de volume fini n'admet pas de feuilletage local $\mathscr{F}$ tel que:*

(i) $\dim V < 2 \dim \mathscr{F}$.

(ii) *$\mathscr{F}$ est $C^2$.*

(iii) *Les feuilles de $\mathscr{F}$ sont des sous-variétés holomorphes ayant (pour la métrique induite) la même courbure holomorphe constante que $V$.*

3.4.4 *Version feuilletée du théorème G.* Une question naturelle (et intéressante) consiste à se demander si l'on peut remplacer la condition "toute feuille possède la même courbure holomorphe constante que $V$" par "toute feuille admet une métrique à courbure holomorphe constante"? En d'autres termes toute feuille est un quotient holomorphe de la boule unité complexe. Ce serait une version feuilletée du théorème G!

**3.5** *Sous variétés réglées.*

3.5.1 *Idée de la preuve du théorème H.* On ne peut donner que le schéma de la preuve puisqu'elle fait recours à des méthodes et résultats de [Zeg3] qu'on ne peut pas tous rappeler ici. Soit $N$ l'ensemble des vecteurs unitaires tangents aux segments géodésiques de $W$, inclus dans $V$. C'est une partie de $T^1W$, qui est (complètement et pas seulement localement) invariante, par analycité. Toujours, par analycité, c'est une réunion dénombrable de parties rectifiables. On démontre l'existence d'une mesure de Lebesgue finie invariante sur $N$ comme dans [Zeg3] en utilisant la finitude du volume de $V$. On applique par suite le théorème D′ de [Zeg3] qui caractérise une telle partie invariante. Ce théorème affirme en particulier que la projection de $N$ est une réunion dénombrable de sous-variétés géodésiques. Or cette projection est exactement $V$ parce qu'elle est réglée. □

3.5.2 *Une autre notion de sous-variété réglée.* Voici une définition plus restrictive.

**Définition.** *On dira que V est* **réglée***, si*

1) *$V$ admet une partition $V = V_1 \cup \ldots \cup UV_d$ telle que si l'on note $G_i = V_i \cup \ldots \cup UV_d$, alors $V_i$ est ouvert dans $G_i$. En particulier $V_1$ est ouvert dans $V$.*

2) *Toute partie $V_i$ est munie d'une lamination $\mathcal{F}_i$, à feuilles* **géodésiques** *dans $W$ et relativement complètes* (1.1) *dans $G_i$. Dans l'intérieur de tout $V_i$, $\mathcal{F}_i$ est de classe $C^1$. En particulier $\mathcal{F}_1$ est un feuilletage géodésique local de $V$ de classe $C^1$.*

Rappelons d'abord que le terme "lamination" [Thu] signifie la même chose que feuilletage sauf que l'on ne suppose plus que le support est une variété. Cette définition englobe le cas d'une sous-variété $V$ à courbure constante, immergée dans une variété $W$ à même courbure constante, avec $\dim W < 2\dim V$ (voir [Gro, p. 265].

3.5.3 *Preuve du théorème J.* En effet $\mathcal{F}_1$ est un feuilletage géodésique local $C^1$ de $V$. D'après le théorème I, il doit être trivial, i.e. de codimension 0. Donc $V$ est géodésique dans $W$. □

3.5.4 *Remarque.* Le théorème J est faux lorsque la courbure est positive (ainsi que lorsqu'elle est nulle). En effet, même si toute immersion isométrique de $S^3$ dans $S^4$ est rigide (3.2.3), il est possible d'immerger $S^3$ de façon non trivialement réglée dans $S^4$. Soit en effet $M$, l'espace (homogène) des géodésiques de $S^4$. A une application, $f : X \to M$, associons $M_f \subset S^4$, la réunion des géodésiques de $S^4$, éléments de $f(X)$. La sphère standard $S^3 \subset S^4$, se réalise comme $M_f$ où $f : S^2 \to M$ se déduit de la fibration de Hopf $S^3 \to S^2$.

On peut montrer que pour $g$, suffisamment $C^2$-proche de $f$ on a

(i) $M_g$ est difféomorphe à $S^3$.

(ii) $g$ définit un feuilletage de $M_g$, dont les feuilles sont les géodésiques $g(x)$, $x \in S^2$.

Ainsi $M_g$ est réglée. On voit qu'ici $V = V_1$, c'est-à-dire que le feuilletage local est en réalité global. Enfin, évidemment, en général $M_g$ n'est pas géodésique dans $S^4$.

## 4 Preuve du théorème III. Première partie: homogénéité

Dans ce paragraphe, on démontre le lemme suivant, affirmant que la variété riemannienne feuilletée vérifiant les hypothèses du théorème III, est localement homogène. L'énoncé précis utilise un language de structure géometriques qui sera précisé en 4.2 (ceci est dû au fait que la variété n'est pas nécessairement complète).

**4.1 Lemme.** *Soit V une variété de volume fini munie d'un feuilletage géodésique local $\mathcal{F}$, à* feuilles complètes. *Supposons $\mathcal{F}$ partiellement hyperbolique, c'est-à-dire que* *pour $X$ tangent à $\mathcal{F}$ et $Y, Z$ tangents à $V$, on a:*

$$R(X,Y)Z = -(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y).$$

*Alors il existe un groupe de Lie connexe $G$, contenant un sous-groupe compact* $\mathbf{K}$ *tels que:*

(i) *$V$ admet une $(G, G/\mathbf{K})$-structure, compatible avec sa structure riemannienne.*

(ii) *$\mathcal{F}$ est $(G, G/\mathbf{K})$-algébrique.*

*(Lorsque $V$ est complète les deux points précédents signifient que $V$ est isométrique à $\Gamma\backslash G/\mathbf{K}$ où $\Gamma$ est discret, et le relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ dans $G/\mathbf{K}$ est $G$-invariant).*

(iii) *Si $d = \dim \mathcal{F}$ alors $G \supset SO_0(d,1) =$ la composante neutre du groupe d'isométries de espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$.*

(iv) *$G$ est unimodulaire.*

**4.2** *Structures géometriques* [Thu]. Soit $G$ un groupe de Lie et $\mathbf{K}$ un sous-groupe.

**Définition.** *On dira qu'une variété $W$* **admet une $(G, G/\mathbf{K})$-structure** *si $W$ est recouverte par des cartes à valeurs dans $G/\mathbf{K}$ telles que la transition de l'une à l'autre soit la restriction d'une translation à gauche dans $G/\mathbf{K}$.*

**Définition.** *On dira qu'un flot $(W, \phi)$ est* **$(G, G/\mathbf{K})$-algébrique** *si:*

(i) *$W$ est muni d'une $(G, G/\mathbf{K})$-structure.*

(ii) Le champ $\phi$ est localement $G$-invariant, c'est-à-dire que l'expression de $\phi$ dans les cartes définissant la $(G, G/\mathbf{K})$-structure est un champ $X$ sur $G/\mathbf{K}$, qui est $G$-invariant, (un tel champ est la projection d'un champ $X'$ sur $G$ qui est $G$-invariant à gauche et $\mathbf{K}$-invariant à droite).

*Remarque.* Sur une variété ayant une $(G, G/\mathbf{K})$-structure, on a une notion analogue de champs de plans et feuilletages $(G, G/\mathbf{K})$-algébriques.

**Définition.** *On dira qu'une variété riemannienne $W$ admet une $(G, G/\mathbf{K})$-structure compatible avec sa structure riemannienne si la métrique de $W$ provient d'une métrique $G$-invariante sur $G/\mathbf{K}$.*

*Exemple.* Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ les algèbres de Lie respectives de $G$ et $\mathbf{K}$ et $W$ une variété admettant une $(G, G/\mathbf{K})$-structure. Il y a une correspondance biunivoque entre champs $(G, G/\mathbf{K})$-algébriques (resp. métriques compatibles avec la structure) et éléments de $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ (resp. produits scalaires sur $\mathcal{G}/\mathcal{K}$) ad $(\mathbf{K})$-invariants.

L'exemple standard de variétés admettent une $(G, G/\mathbf{K})$-structure (complète) est $\Gamma\backslash G/\mathbf{K}$ où $\Gamma$ est discret dans $G$.

*Cas des $(G, G)$-structures.* Soit $W$ une variété admettant une $(G, G)$-structure. Tout élément de $\mathcal{G}$, définit un champ $(G, G)$-algébrique sur $W$. Ces champs sur $W$ forment une algèbre isomorphe à $\mathcal{G}$. Réciproquement:

4.2.1 **Affirmation.** *Soit $W$ une variété admettant un espace $\mathcal{P}$ de champs de vecteurs dont l'évaluation en tout point $x$ de $W$ établit un isomorphisme avec $T_xW$ (c'est-à-dire que l'application $X \in \mathcal{P} \to X(x) \in T_xW$ est un isomorphisme). Supposons que $\mathcal{P}$ est une algèbre (pour le crochet de Lie) isomorphe à $\mathcal{G}$. Alors $W$ admet une $(G, G)$-structure dont les champs $(G, G)$-algébriques sont les éléments de $\mathcal{P}$. L'action locale (á gauche) de $G$ préserve tout élément de $\mathcal{P}$.*

**4.3 Notations.** Notons $(T^1V, \phi)$ et $(St^nV, \psi)$, les flots géodésiques respectivement sur le fibré unitaire tangent et le fibré des $n$-repères orthonormés de $V$ ($n = \dim V$).

Notons également:

$N = T^1\mathcal{F}$, le fibré des vecteurs unitaires tangents à $\mathcal{F}$.

$L$ =le fibré des repères dont le premier vecteur est tangent à $\mathscr{F}$. C'est l'image réciproque de $N$ par la fibration $St^nV \to T^1V$.

Par géodésibilité de $\mathscr{F}$, $N$ et $L$ sont respectivement invariants par $\phi$ et $\psi$.

4.3.1 *L'idée* dans tout ce qui suit est que pour un élément de $N$ (ou $L$), la dynamique infinitésimale de $\phi$ (ou $\psi$) est la même que pour une variété hyprbolique.

4.3.2. Rappelons que $St^n(V)$ admet un *parallélisme* canonique: pour tous $z$ et $z' \in St^nV$, on a un isomorphisme $H_{z'z}: T_zSt^nV \to T_{z'}St^nV$ (on a de plus la relation de cocycle: $H_{z''z} = H_{z''z'}H_{z'z}$).

Notons par ailleurs que ce parallélisme est isométrique pour la métrique naturelle de $St^nV$ et qu'il respecte les espaces verticaux et horizontaux des fibrations $St^nV \to V$ et $St^nV \to T^1V$.

**Définition.** *On dira qu'une sous-variété (de classe $C^1$) $M$ de $St^nV$ est* **parallèle** *si son espace tangent est invariant par le parallélisme canonique de $St^nV$: pour tous $z$ et $z'$ de $M$, on a $H_{z'z}(T_zM) = T_{z'}M$. On dira qu'un champ $X$ sur une telle $M$ est* **parallèle** *si pour tous $z$ et $z'$ de $M$, on a $H_{z'z}(X(z)) = X(z')$.*

Le résultat qu'on va démontrer dans le présent paragraphe et qui impliquera 4.1 est le suivant:

4.3.3 **Lemme.** *Il existe une sous-variété $M \subset L$, telle que*

(i) *$M$ est invariante par le flot géodésique $\psi$.*

(ii) *$M$ fibre (principalement) sur $N(= T^1\mathscr{F})$ et $V$.*

(iii) *$M$ est* parallèle *et l'espace $\mathscr{P}$ de ses champs parallèles est une* algèbre.

4.3.4 *Preuve de 4.1 d'après 4.3.3.* D'après 4.2.1, notre $M$ admet une $(G, G)$-structure telle que l'algèbre de Lie de $G$ soit isomorphe à $\mathscr{P}$. L'action locale de $G$ respecte tout champ parallèle.

Il est facile de se convaincre que les points (i) et (ii) de 4.1, signifient essentiellement que l'action locale de $G$ passe (par projection) à $V$ et que dans $V$ cette action est isométrique et respecte $\mathscr{F}$.

Maintenant pour voir que l'action locale passe à $V$, il suffit de montrer que cette action locale respecte les fibres de $M \to V$ ou de manière équivalente qu'elle respecte l'espace vertical de $M \to V$. Considérons pour cela un vecteur vertical $\bar{X}$ et $X$ le champ parallèle de $St^nV$ qu'il détermine. C'est un champ vertical pour la fibration $St^nV \to V$, puisque le parallélisme canonique préserve le vertical. La restriction de $X$ à $M$ est, par parallélisme de $M$, tangent à $M$ et vertical pour la fibration $M \to V$. L'action locale de $G$, préserve donc la restriction de $X$ à $M$ et par suite tout l'espace vertical de la fibration $M \to V$, puisque $\bar{X}$ est un vecteur vertical arbitraire.

Pour voir maintanent que l'action locale de $G$ respecte $\mathscr{F}$, remarquons que cette action respecte les orbites de $(M, \psi)$ (car $\psi$ est parallèle) et donc par projection, cette action respecte les géodésiques tangentes à $\mathscr{F}$. D'après ce qui précède, l'action de $G$ respecte les fibres de $M \to V$. Ainsi, deux géodésiques issues d'un même point seront envoyées sur deux géodésiques issues d'un même (autre) point. On constante facilement que cela entraîne que l'action locale de $G$ envoie feuille de $\mathscr{F}$ sur feuille de $\mathscr{F}$.

Reste enfin à voir pourquoi l'action locale est isométrique. Notons $\pi: St^nV \to V$, la projection. Soit $x \in V$, $u \in T_xV$ et $z \in M$ tel que $\pi(z) = x$. Soit $\bar{C} = d\pi_z^{-1}(u)$. C'est un sous-espace affine. Notons $C$ le champ parallèle d'espaces affines tangents à $M$, déterminé par $\bar{C}$. Il est préservé par l'action locale de $G$. Il en va de même pour sa projection $C'$ dans $V$, qui est un champ de "cônes tangents" à $V$. On va montrer que pour tout $x' \in V$ et $u' \in C'(x')$, on a $\|u'\| = \|u\|$. Ceci entraînera que l'action locale de $G$ est isométrique puisque $u$ est arbitraire.

Un élément de $C$ s'écrit dans la décomposition $\mathscr{H} + \mathscr{V}$ =horizontal+vertical= $TSt^nV$, comme $u + v$ (même $u$) (ici on identifie $\mathscr{H}_z$ à $T_xV$). Un élément de $C(z')$ pour $z' \in M$, s'écrit donc $H_{z'z}(u) + H_{z'z}(v) \in \mathscr{H}_{z'} + \mathscr{V}_{z'}$. La projection de cet élément dans $T_{x'}V$ ($x' = \pi(z')$) s'identifie à $H_{z'z}(u)$. En particulier sa norme est égale à celle de $u$.

Quant au point (iii) du lemme 4.1, il se démontre comme suit. Soit $F$ une feuille de $\mathscr{F}$. On va d'abord remarquer que l'action locale de $G$ est localement transitive sur $T^1F$. En effet l'action locale de $G$ sur $M$ passe également à $T^1\mathscr{F} = N$. Elle y est localement transitive comme c'est le cas dans $M$.

Une feuille est localement un espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$ (à cause de l'hyperbolicité partielle). Pour éviter la subtilité d'actions locales, on transformera le problème aux niveaux des algèbres de Lie et on ramènera la preuve à l'affirmation suivante:

**Affirmation** (voir l'affirmation du 5.1). *Soit $H$ un sous-groupe d'isométries de $\mathbb{H}^d$ préservant l'orientation et agissant transitivement sur $T^1\mathbb{H}^d$. Alors $H = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$.*

Enfin, le point (iv) du lemme, qui est trivial lorsque $V$ est complète (car $V$ est de volume fini) sera démontré en 4.7. Ceci achève la démonstration de 4.1 d'après 4.3.3. □

**4.4** *Plan de la preuve de 4.3.3.* La preuve utilise crucialement l'idée de systèmes dynamiques autonomes développée dans [Zeg2]. On fera appel à certaines notions et méthodes de cette référence tout en esayant d'en être le plus indépendant possible. On va dans ce qui suit donner les étapes de la construction de $M$. Les détails de certaines d'entre elles sont reportés aux paragraphes suivants.

4.4.1 *Transport parallèle.* On a un flot fibré de transport parallèle $(TSt^nV, T)$ au dessus de $(St^nV, \psi)$: Si $z \in St^nV$, et $z' = \psi^t z$ alors $T^t\colon T_zST^nV \to T_{z'}St^nV$, coïncide avec le parallélisme canonique $H_{z'z}$. Ce flot fibré se projette en un flot $(TT^1V, T')$ de transport parallèle au dessus du flot géodésique $(T^1V, \phi)$.

Ce dernier flot de transport parallèle pourrait se définir directement à partir du scindement $TT^1V = \mathscr{H} + \mathscr{V}$: les projections sur $\mathscr{H}$ et $\mathscr{V}$ d'un élément de $T_vT^1V$, se transportent parallèlement au sens usuel le long de la géodésique déterminée par $v$ (voir 3.2 de [Zeg2]).

Il y a une interprétation analogue pour $(TSt^nV, T)$.

4.4.2 *Autonomie.* On démontrera au par. 4.5 que $D\psi$ et $T$ commutent au dessus de $L$: $D\psi^sT^t_z = T^tD_z\psi^s$, pour $z \in L$, c'est-à-dire que $D\psi$ restreint à $T(St^nV)/L$ est **T-autonome**.

Pour $z \in L$, considérons le flot structural $S^t_z = T^{-t}D_y\psi^t = \exp tA_z$ où $A_z$ est **l'endomorphisme structurel**. On montrera que par rapport au parallélisme canonique, la matrice de $A_z$ est constante (indépendante de $z \in L$). On a en particulier la relation:

$$S^t_z = H_{zz'}S^t_{z'}H_{z'z}\,.$$

Cet endomorphisme est diagonalisable (dans une base dérivant canoniquement du parallélisme canonique), à spectre $\{0, -1, 1\}$. Toutes ces propriétés se déduisent de la condition (*) (voir 4.5).

4.4.3 *Structure hyperbolique de $N$.* On a un résultat analogue pour $T(T^1V)/N$. Le spectre de l'endomorphisme structural est $\{-1, 0, +1\}$, avec un sous-espace 0-caractéristique se réduisant à la directions du flot $\phi$. Ainsi $N$ est un ensemble hyperbolique du flot géodésique $(T^1V, \phi)$. Cela signifie qu'en tout point **y de N**, l'espace tangent de $T^1V$ admet un scindement $\phi$-invariant: $E_y^{ss} \oplus E_y^{uu} \oplus \mathbb{R}\phi$, tel que $E_y^{ss}$ (resp. $E_y^{uu}$) soit contracté (resp. dilaté) par $\phi^t$. Considérons en effet, le scindement $\mathscr{H}_y + \mathscr{V}_y$ (horizontal+vertical) de l'orthogonal à $y$ dans $T_y(T^1V)$. Il découlera de 4.5.3 et 4.5.5, exactement comme pour une variété hyperbolique que:

$$E_y^{ss} = \{J, -J)/J \in E_z\}; \qquad D\phi^t(J, -J) = e^{-t}(J, -J)$$

et

$$E_y^{uu} = \{(J, J)/J \in E_y\}; \qquad D\phi^t(J, J) = e^t(J, J)$$

où $E_y$ est l'orthogonal à $y$ dans $T_xV$ ($x$ étant la projection de $y$ dans $V$).

4.4.4 *Conservation du volume.* Tout comme dans [Zeg4] (par.2), on montre que $(N, \phi)$ et $(L, \psi)$ préservent des mesures finies équivalentes aux mesures de Lebesgue, et à densités localement bornées par rapport aux mesures riemanniennes. On remarquera plus tard (4.4.6) que ce fait qui sera crucial dans l'analyse de l'application de Gauss ci-dessous, peut lui-même se déduire d'une variante de cette application au moins dans le cas où $L$, ou de manière équivalente $N$, sont compactes.

4.4.5 *Structure d'Anosov et ergodicité de $(N, \phi)$.* La résponse à la question suivante est en général négative [Fra-Rob]: Pour une partie $N$, qui est un ensemble hyperbolique d'un flot $(M, \phi)$ (ici $(T^1V, \phi)$) et qui est une *sous-variété*, est-il vrai que $(N, \phi)$ est un flot d'Anosov? C'est le cas ici, puisque $(N, \phi)$ préserve une mesure de Lebesgue finie [Hir-Pug] [Zeg2, 5.1]). A partir de là, on montre de façon standard qu'il est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue (les feuilletages stables et instables sont $C^\infty$ parce qu-ils s'expriment de la manière algébrique ci-dessus).

4.4.6 *Construction de $M$.*

**Affirmation** ([Zeg2], théorème 7.4). *Soit $U \subset L$ un ouvert $\psi$-invariant et $E \subset T(St^nV)/U$, un sous-fibré au dessus de $U$. Supposons que $E$ est $\psi$-invariant. Alors $E$ est $T$-invariant ($E$ est invariant par transport parallèle).*

*Schéma de la preuve.* Choissisons $z'$ un point arbitraire de $L$. Considérons "l'application de Gauss"

$$f : L \to \mathrm{Gr}^d(T_{z'}(St^nV)), \qquad (d = \dim E),$$
$$f(z) = H_{z'z}(E(z)).$$

Par $\psi$-invariance de $E$ et la formule $S_z^t = H_{zz'}S_{z'}^t H_{z'z}$ (4.4.2), cette application est équivariante entre $(L, \psi)$ et le flot structural $S_{z'}^t$ agissant sur la Grassmannienne des $d$-plans de $T_{z'}(St^nV)$. Autrement dit $f$ semi-conjugue les deux systèmes dynamiques indiqués. En particulier si $z$ est un point récurrent, alors son image $f(z)$ est récurrent par $S_{z'}^t$ agissant sur la Grassmannienne des $d$-plans de $T_{z'}(St^nV)$. Or, les points récurrents de cette action sont des $d$-plans invariants par $S_{z'}^t = \exp tA_{z'}$, car $A_{z'}$ est diagonisable et à spectre réel. Il résulte de la récurrence de Poincaré (découlant de 4.4.4) et de la continuité de $f$ que, pour tout $z$, $f(z)$ est invariant par $S_{z'}^t$. Il découle une deuxième fois de 4.4.2, que $E$ est $T$-invariant.

*Remarque.* La $T$-invariance de $E$ est équivalente à la $\psi$-invariance de l'application de Gauss associée.

Pour construire $M$, considérons l'application de Gauss:

$$f_0 : L \to \mathrm{Gr}^{d_0}(T_{z'}(St^n V)), \qquad (d_0 = \dim L),$$
$$f_0(z) = H_{z'z}(T_z L).$$

Par l'affirmation précédente $f_0$ est $\psi$-invariante. Si cette application est constante, alors $L$ est parallèle. Sinon on définira $f_1$ de la manière suivante: Soit $U_1$ l'ouvert où $\dim \mathrm{Ker}(df_0)$ est minimale et vaut $d_1$. Cet entier $d_1$ est non nul, car par $\psi$-invariance de $f_0$, $\mathrm{Ker}(df_0)$ contient au moins la direction du flot $\psi$. On pose: $f_1(z) = H_{z'z}(\mathrm{Ker}(df_0))$. Cette application est $\psi$-invariante, toujours d'après l'affirmation précédente. Pour $z \in U_1$, $f_1(z)$ n'est autre que l'espace tangent au niveau $\mathscr{F}_1(z)$ de $f_1$ contenant $z : f_1(z) = H_{z'z}(T_z \mathscr{F}_1(z))$.

Soit $U_2$ l'ouvert où $\dim \mathrm{Ker}\, df_1 \cap \mathrm{Ker}\, df_0$ est minimale. Posons pour $z \in U_2$, $f_2(z) = H_{z'z}(\mathrm{Ker}\, D_z f_1 \cap \mathrm{Ker}\, d_y f_0)$. Le terme entre parenthèses n'est rien d'autre que $\mathrm{Ker}(df_1 / \mathscr{F}_1(z))$.

Soit $d_2 = \dim f_2(z)$. Dire que $d_2 = d_1$ (donc $f_2 = f_1$), signifie que les niveaux $\mathscr{F}_1(z)$ sont parallèles.

Si $d_2 < d_1$, on continuera le processus jusqu' à aboutir à un feuilletage (de dimension non triviale) d'un ouvert de $L$, qui soit $\psi$-invariant et à feuilles parallèles.

Ce feuilletage est évidemment moins fin que la décomposition ergodique de $(L, \psi)$. Mais la décomposition ergodique de $(L, \psi)$ qui est invariante par l'action principale $L \to N$, se projette sur celle de $(N, \phi)$. Or cette dernière est triviale par ergodicité de $(N, \phi)$ (4.4.3). Les composantes ergodiques de $(L, \psi)$ se projette donc surjectivement sur $N$. Il en va donc de même pour les feuilles de notre feuilletage.

Enfin, à cause de l'invariance de tout le monde par l'action principale, $L \to N$, il résulte que les feuilles fibrent sur $N$ et par suite sur $V$ également.

4.4.7 *Champs parallèles*. On prendra donc pour $M$, une feuille du feuilletage précédent. La preuve de 4.3.3 sera achevée si l'on démontre que l'espace $\mathscr{P}$ des champs parallèles tangents à $M$ forment une sous-algèbre pour le crochet de Lie. On le fera au par. 4.6.

Remarque (qui servira en 4.7). Il n'est pas difficile de voir que le fait que $M$ soit parallèle, entraîne qu'elle fibre principalement sur $N$. Ceci permettra, à partir de la mesure invariante sur $(N, \phi)$ (4.4.4), de construire une mesure de Lebesgue, invariante et finie sur $(M, \psi)$. Sa densité par rapport à la mesure riemannienne sera localement bornée comme pour $(N, \phi)$.

4.4.8 *Remarque*. Pour la conservation du volume (4.4.4), on peut considérer une application de Gauss comme $f_0$, à valeurs dans la $d_0{}^{\text{ième}}$-puissance extérieure de $T_{z'}(St^n V)$. Cette application permettra de calculer le Jacobien de $D_z \psi^t$ restreint à $L$. Pour $z$ fixé, le carré de ce Jacobien sera un polynôme en $e^t$ et $e^{-t}$. Ce Jacobien sera donc constant si le volume de $L$ était fini (par exemple si $L$ était compacte). Ceci veut dire que $\psi$ préserve la mesure riemannienne sur $L$, elle-même.

**4.5** *Dynamique infinitésimale de* $(St^n V, \psi)$.

4.5.1 *Autonomie* (introduction). Soit $E$ un espace vectoriel et $S^t$ une famille d'automorphisme de $E$, telle que $S^0 = 1$. Pour $J_0 \in E$, considérons $J(t) = S^t J_0$. On a: $J'(t) = A(t)\, J(t)$ où $A(t) = \dfrac{\partial S^t}{\partial t}(S^t)^{-1}$. En d'autres termes, $J(t)$ est solution de l'équation linéaire $J' = A(t) J$.

Remarquons que la donnée de $A(t)$ détermine $S^t$: on a rien dit d'autre qu'une équation différentielle linéaire équivaut à la donnée d'une famille d'automorphsimes comme ci-dessus.

Remarquons enfin que le cas particulier où $S^t$ est un groupe à un paramètre correspond au cas où $A(t)$ est constant (en $t$).

4.5.2 *Exemples.* Appliquons cela aux flots géodésiques $(T^1V, \phi)$ et $(St^nV, \psi)$. Fixons pour cela une fois pour toutes un point $x$ de $V$, un vecteur $y \in T_x^1V$ et $z$ un point de $St^nV$ au dessus de $y$, c'est-à-dire que $z$ est un repère $(x, e^1, \ldots, e^n)$ avec $e^1 = y$.

On va dans ce qui suit interpréter $A(t)$ dans les deux cas suivants:

(i) $S_y'^t = T'^{-t}D_z\phi^t$ et $E = T_y(T^1V)$;

(ii) $S_z^t = T^{-t}D_z\psi^t$ et $E = T_z(St^nV)$.

Ici $T$ et $T'$ désignent les transports parallèles définis au par. 4.4.1. On note $\mathbf{A_y(t)}$ **et** $\mathbf{A_z(t)}$, les endomorphismes obtenus.

4.5.3 *Cas de* $(T^1V, \phi)$ [Ebe]. Notons $x(t)$, la géodésique définie par $y: x(0) = x$ et $x'(0) = y$. Notons $\tau^t: T_xV \to T_{x(t)}V$, le transport parallèle. Notons $B_y(t)(X) = \tau^{-t}(R(x'(t), \tau^tX)x'(t))$ où $R$ est le tenseur courbure (au point $x(t)$).

**Affirmation.** *Dans le scindement* $T_y(T^1V) = \mathscr{H}_y + \mathscr{V}_y$, *en espaces horizontal et vertical, et après identification de chacun dans* $T_xV$, *on a:*

$$A_Z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B_y(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

*En particulier $T'$ et $D\phi$ commutent* le long de *l'orbite de $y$ (par $\phi$) si seulement si $B_y(t)$ est indépendant de $t$.*

*Preuve.* La formule pour $A_y(t)$ est classique. Il s'agit simplement de l'écriture de l'équation de Jacobi $J'' = B_y(t)J$, dans son espace de phase:

$$\begin{pmatrix} J \\ J' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ B_y(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J \\ J' \end{pmatrix}.$$

Le fait que $T'$ et $D\phi$ commutent le long de l'orbite de $y$ équivant au fait que $S_y^t$ soit un groupe à un paramètre. C'est donc équivalent comme on l'a remarqué ci-dessus (4.5.1) au fait que $A_y(t)$ (ou de manière équivalente $B_y(t)$) soit constant en $t$. $\square$

4.5.4 *Cas de* $(St^nV, \psi)$. On garde toujours le repère $z = (x, e^1, \ldots, e^n) = (x, y, e^2, \ldots, e^n)$. L'espace tangent $T_zSt^nV$ s'identifie à un sous-espace de $T_xV \times \ldots \times T_xV$ ($n + 1$ copies). Ceci s'obtient en regardant $St^nV$ comme partie du fibré $E \to V$, des $n$-uplets (sans condition d'orthonormalité) de vecteurs tangents à $V$. Exactement comme dans le cas du fibré unitaire tangent $T^1V$, la décomposition en horizontal et vertival permet d'identifier l'espace tangent à $E$ en un point $z = (x, e^1, \ldots, e^n)$, à $T_xV \times \ldots \times T_xV$ ($n + 1$ copies).

On peut également, de la même façon, identifier $T_zSt^nV$ à un sous-espace du produit de $T_y(T^1V)$ par $n - 1$ copies de $T_xV$.

Notons $B_z^i(t): T_xV \to T_xV$,

$$B_z^i(t)X = \tau^{-t}(R(e^1(t), \tau^tX)e^i(t))$$

où $e^i(t)$ est défini par $\psi^t(z) = (x(t), e^1(t), \ldots, e^n(t))$. Autrement dit $e^i(t) = \tau^t(e^i)$ (en particulier $e^1(t) = x'(t)$), ($\tau^t$ est le transport parallèle le long de $x(t)$). On a en particulier $B_z^1(t) = B_y(t)$.

**Affirmation.** *$A_z(t)$ est la restriction à $T_z(St^nV)$ de l'endomorphisme suivant de $T_xV \times \ldots \times T_xV$:*

$$A'_z(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ B^1(t) & & & \\ B^2(t) & & & 0 \\ B^n(t) & & & \end{pmatrix}.$$

*En particulier $T$ et $D\psi$ commutent le long de l'orbite de $z$ si et seulement si tous les $B^i(t)$ sont constants en $t$.*

*Preuve.* Le dernier point de l'affirmation se démontre comme celui de 4.5.3. Montrons donc le premier point, c'est-à-dire la formule donnant $A_z(t)$.

Une variation de l'orbite de $z$ dans l'ensemble des orbites de $\psi$ s'écrit:

$$(x(s,t), e^1(s,t), \ldots, e^n(s,t))$$

avec:

$x(0,t) = x(t)$, $e^i(0,t) = e^i(t)$, pour tout $s$; $x(s,\cdot)$ est une géodésique telle que $\dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t) = e^1(s,t)$, et enfin $e^i(s,t)$ est parallèle le long de cette géodésique (Tout cela découle de la définition du flot géodésique $\psi$).

Notons $x(s,t) = x_s(t)$ et $e^i(s,t) = e^i_s(t)$.

Notons $\dfrac{\partial}{\partial s} = \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t)$, les champs naturels le long "de la surface $x(s,t)$", $\dfrac{\nabla}{\partial s}$ et $\dfrac{\nabla}{\partial s}$ les dérivations covariantes par rapport à ces champs.

On a $\dfrac{\nabla}{\partial t} e^i_s = 0$ ($e^i_s$ est parallèle le long de $x_s$). Donc $\dfrac{\nabla}{\partial s}\dfrac{\nabla}{\partial t} e^i_s = 0$.

Notons également que $\left[\dfrac{\nabla}{\partial s}, \dfrac{\nabla}{\partial t}\right] = 0$.

On en déduit pour le tenseur courbure: $R\left(\dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial s}\right)e^i_s = \dfrac{\nabla}{\partial t}\left(\dfrac{\nabla}{\partial s} e^i_s\right)$.

Notons $\theta^i(s,t) = \dfrac{\nabla}{\partial s} e^i(s,t)$, $\theta^i(t) = \theta^i(0,t)$ et $J(t) = \dfrac{\partial x}{\partial s}(0,t)$

Avec toutes ces notations, on a: $R(x'(t), J(t))e^i(t) = \dfrac{\nabla}{\partial t}\theta^i(t)$

On sait que $J(t)$ est un **champ de Jacobi le long** de $x_0$. On obtient donc en résumé le système d'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\nabla^2}{\partial t^2} J(t) = R(e^1(t), J(t))e^1(t)\,, \\ \dfrac{\nabla}{\partial t}\theta^i(t) = R(e^1(t), J(t))e^i(t), \qquad i \geqq 2\,. \end{cases}$$

On voit facilement que le transport parallèle de tout le monde en $x$, transforme ce système d'équations en:

$$\begin{cases} \bar{J}''(t) = B^1(t)\bar{J}(t) \\ \bar{\theta}^i(t) = B^i(t)\bar{J}(t)\,, \qquad i \geqq 2\,. \end{cases}$$

L'affirmation qu'on est en train de démontrer est simplement la traduction de ce système d'équations dans son espace de phase. $\square$

4.5.5 *Autonomie et endomorphisme structural.* Revenons maintenant à notre situation, c'est-à-dire que $y \in N = T^1.\mathscr{F}$, $z \in L$ et $\mathscr{F}$ partiellement hyperbolique. Le tenseur courbure le long de la géodésique $x(t)$ s'écrit donc:

$$R(x'(t), X)e^i(t) = -(\langle X, e^i(t)\rangle x'(t) - \langle x'(t), e^i(t)\rangle X).$$

En particulier

$$B^i(t)(X) = -(\langle X, e^i\rangle y - \langle y, e^i\rangle X).$$

On en déduit facilement d'après les affirmations 4.5.4 et 4.5.3 que $D\psi$ et $T$ (respectivement $D\phi$ et $T'$) commutent au dessus de $L$ (respectivement $N$). Autrement dit les flots fibres $D\psi$ et $D\phi$ restreints respectivement à $T(St^nV)/L$ et $T(T^1V)/N$ sont autonomes respectivement par rapport à $T$ et $T'$.

On a mieux pour $T(St^nV)/L$. L'endomorphisme $B^i(t)$, répresente dans la base $\{e^1, \dots, e^n\}$, est une matrice constante (ne dépendant ni de $t$ ni de $z = (e^1, \dots, e^n)$. Il en résulte en particulier la formule: $S_z^t = H_{zz'}S_{z'}^tH_{z'z}$ (4.4.2).

Le reste des affirmations de 4.4.2 sur les spectres des endomorpismes structuraux se déduit facilement à partir des formules ci-dessus des $B^i$, exactement comme pour une variété hyperbolique.

**4.6** *Champs parallèles.* Comme on l'a noté dans 4.4, l'autonomie et ses conséquences permettent de construire $M$, sous-variété $\psi$-invariante, parallèle et fibrant sur $N$ et $V$. Il ne restera donc qu'à montrer que l'espace $\mathscr{P}$ des champs parallèles tangents à $M$, forment une algèbre. Soit $\bar{X}$ un vecteur propre relatif la valeur propre $\lambda$, de la restriction à $T_zM$ de l'endomorhisme structural $A_z$. Soit $X$ le champ parallèle tangent à $M$, tel que $X(z) = \bar{X}$.

**Affirmation.** *On a* $[\psi, X] = -\lambda X$.

*Preuve.* $X$ étant parallèle, on a: $D\psi^{-t}X(\psi^t(z)) = S_z^{-t}(X(z)) = \exp -tA_z(X(z))$ (voir 4.4.2). Donc $[\psi, X](z) = -A_y(X(z))$. $\square$

Soit $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_a, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_a, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_b$, une base de $T_zM$, formée de vecteurs propres de $A_z$ relativement aux valeurs $+1, -1$ et $0$ respectivement. Notons $X_1, \dots, X_a, Y_1, \dots, Y_a, Z_1, \dots, Z_b$ les champs parallèles correspondants. Pour montrer que $\mathscr{P}$ est une algébre il suffit de montrer que le crochet de deux éléments de la base est un champ parallèle, c'est-à-dire que son expression dans cette base est à coefficients constants. Traitons par exemple le crochet $[X_1, Y_1]$. Toutes les autres possibilités se traitent de la même manière.

Notons $Z = [X_1, Y_1]$. L'identité de Jacobi entraîne: $[\phi, Z] = [\phi, [X_1, Y_1]] = [[\phi, X_1, Y_1] + [X_1, [\phi, Y_1]] = -[X_1, Y_1] + [X_1, Y_1] = 0$.

On applique par suite:

**Affirmation.** *Soit $Z$ un champ $C^1$ sur $M$ tel que* $[\phi, Z] = 0$. *Alors $Z$ est parallèle.*

*Preuve.* Soit $z'$ un point de $M$. Notons $Z(t) = Z(\psi^t(z'))$. Écrivons:

$$Z(t) = \sum a_i(t)X_i + \sum b_i(t)Y_i + \sum c_i(t)Z_i.$$

On a $[\phi, Z](t) = \sum \dfrac{\partial a_i}{\partial t} X_i + \sum \dfrac{\partial b_i}{\partial t} Y_i + \sum \dfrac{\partial c_i}{\partial t} Z_i + \sum -a_i(t) + \sum b_i(t)Y_i$.

Ainsi l'égalité $[\phi, Z] = 0$ entraîne le système:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_\imath}{\partial t}(t) - a_\imath(t) = 0\,, \qquad \dfrac{\partial b_\imath}{\partial t}(t) + b_\imath(t) = 0 \\ \dfrac{\partial c_\imath}{\partial t}(t) = 0\,. \end{cases}$$

On a donc $a_\imath(t) = a_\imath(0)e^{-t}$. Supposons le point $z'$ négativement-récurrent (pour $\psi$): il existe $t_n \to -\infty$ tel que $\psi^{t_n}(z') \to z'$. Ceci contredira la continuité de $Z$ à moins que: $a_\imath(0) = 0$, et par suite $a_\imath(t)$ est partout nul. On montre de même que si $z'$ est positivement récurrent alors $b_\imath(0) = 0$. Donc les $a_\imath$ et $b_\imath$ sont nuls. Les $c_\imath$ sont constants d'après la dernière équation du systeme: $\dfrac{\partial c_\imath}{\partial t}(t) = 0$. Donc $Z(t) = \sum c_i(0)Z_i$.

Maintenant, les points positivement et négativement récurrents sont denses parce que $(M, \psi)$ admet une mesure lisse finie. Il en résulte que $Z$ est parallèle. $\square$

**4.7** *Preuve du point* (iv) *du lemme 4.1* (caractère unimodulaire de $G$). Considérons sur $(M, \psi)$ la mesure finie invariante $\mu$ (4.4.7), et la mesure de Haar $m$. La densité $\varrho$ de $\mu$ par rapport à $m$ est localement bornée mais n'est pas à priori intégrable. La mesure de Haar se transforme par $\psi^t$ suivant une loi $\psi^t m = e^{ta}m$ (par définition et existence de la fonction modulaire du groupe $G$). Il en résulte que $\varrho(\psi^t x) = e^{-ta}\varrho(x)$.

On montre, comme à la fin de 4.6, que ceci est impossible si $a$ est différent de 0, car $\varrho$ est localement bornée. On en déduit que $\psi$-invariante. Il s'ensuit que $m$ est une mesure invariante par $\psi$. Pour voir qu'elle est finie il suffit de vérifier que l'image de $\varrho$ est compacte. Ceci découle de l'ergodicité de $(N, \phi)$, du fait que $\varrho$ est localement bornée et $\psi$-invariante et du fait que, $M \to N$ est une fibration à fibres compactes.

Considérons à présent un champ $X$ tangent à $M$ comme en 4.6 (i.e. $[\psi, X] = \lambda X$), et appelons $\xi^t$ son flot local. Comme pour $\psi$, on a $\xi^t m = e^{ta}m$ pour un certain $a$. Pour en déduire (à partir de la finitude de $m$) que $a = 0$, et par conséquent $\xi^t m = m$, il suffit de s'assurer que le flot (local) $\xi^t$ est complet. Il suffit plus généralement de montrer que pour $m$-presque tout $x$, $\xi^t x$ existe pour tout $t$.

Lorsque $\lambda = 0$, le champ $X$ est tangent aux fibres de $M \to N$, qui sont compactes. Le champ est donc complet.

Lorsque $\lambda = -1$, on a la formule: $\psi^s \xi^t = \xi^{t'}\psi^s$, avec $t' = e^s t$. On en déduit que si $\xi^t x$ existe, alors $\xi^{t'}(\psi^s(x))$ avec $t' = e^s t$ existe également. Ainsi si $x$ est positivement récurrent par $\psi$, $\xi^t x$ existe pour tout $t$.

Le même raisonnement s'applique pour $\lambda = 1$. Il s'ensuit que tous ces champs préservent la mesure de Haar. Ces derniers champs engendrent l'algèbre de Lie de $G$ et présérvent la mesure de Haar. Il s'ensuit que le groupe $G$ est unimodulaire. $\square$

## 5 Preuve du théorème III. Cas homogène

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème III dans le cas (localement) homogène. Ceci complétera pratiquement la preuve de ce théorème dans le cas général grâce à 4.1. (on reviendra sur ce point en 5.3).

**5.1 Théorème.** *Soit une variété riemannienne munie d'un feuilletage géodésique $\mathcal{F}$. Soit $G$ un groupe de Lie connexe agissant isométriquement et transitivement sur $W$, en respectant $\mathcal{F}$. Supposons que:*

(i) *$\mathcal{F}$ est partiellement hyperbolique i.e. vérifiant la condition: pour tous vecteurs $X, Y, Z$ tangents à $W$, tels que $X$ soit tangent à $\mathcal{F}$, le tenseur courbure a la forme:*

$$R(X, Y)Z = -1(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y) \qquad (*)$$

(ii) *$G$ est unimodulaire et agit fidèlement sur $W$.*

Alors:

(i) *ou bien $W$ s'identifie à $G'$, le radical de $G$ (c'est-à-dire que l'action de $G'$ sur $W$ est libre) qui sera un quotient $\Gamma\backslash SOL(n)$ où $\Gamma$ est un sous-groupe discret et distingué dans $SOL(n)$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage standard (de dimension 1) (voir 2.4).*

(ii) *ou bien $\mathcal{F}$ est de codimension zéro et $W$ est un espace hyperbolique (i.e. une variété hyperbolique complète et simplement connexe). Le groupe $G$ est tout le groupe d'isométries (conservant l'orientation) de cet espace hyperbolique.*

La dernière partie du point (ii) dit simplement qu'une variété hyperbolique $W$ admettant un groupe d'isométries $L$, transitif et unimodulaire, est l'espace hyperbolique lui-même et que ce groupe est exactement le groupe d'isométries de cet espace hyperbolique.

En effet, il n'est pas difficile de voir que l'espace hyperbolique est la seule variété hyperbolique homogène. Quant au groupe $L'$, on utilise l'affirmation suivante:

**Affirmation.** *Soit $L$ un sous-groupe de* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ *(le groupe d'isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^d$) agissant transitivement sur $\mathbb{H}^d$. Alors:*

(i) *ou bien $L$ fixe un point $z$ à l'infini: $L \subset Z_z$ =le stabilisateur de $z$. Pour toute $l$, géodésique tendant vers $z$, il existe $\gamma^t$, un groupe à un paramètre de $L$ dont $l$ est une trajectoire. De plus $L'$ n'est pas unimodulaire.*

(ii) *Ou bien $L$ ne fixe aucun point à l'infini. Dans ce cas $L =$* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$.

*Preuve.* (i) Le fait que $Z_z$ n'est pas unimnodulaire est bien connu. Pour l'existence de $\gamma^t$, un groupe à un paramètre de $L$ dont $l$ est une trajectoire, il suffit de remarquer l'égalité: $Z_l = \{g \in L/g(l) \cap l \text{ non vide}\} = \{g \in L/g(l) = l\}$ (par suite $Z_l$ agit transitivement sur $l$).

On a $\mathrm{Jac}(\mathrm{Ad}\,\gamma^t) = e^{(d-1)t}$ dans $Z_z$. Comme $Z_z/L$ est compact (car $L$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^d$), la même formule est vraie dans $L$. En particulier $L$ n'est pas unimodulaire.

(ii) $L$ est semi-simple, car sinon il contiendra un sous-groupe normal résoluble. Mais un tel sous-groupe admet un point fixe à l'infini, qui sera un point fixe du groupe $L$ lui-même. Maintenant, l'espace symétrique associé à $L$ est nécessairement $\mathbb{H}^d$ (car $L$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^d$). Il est connu que ceci entraîne que $L = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ [Hel]. $\square$

Cette discussion nous permet de réduire immédiatement la preuve de 5.1 à celle du théorème suivant dont la preuve occupera tout le présent paragraphe.

**5.2 Théorème.** *Soit $W$ une variété riemannienne admettant une action isométrique transitive et fidèle d'un groupe de Lie connexe $G$. Supposons qu'il existe $x_0 \in W$ et $v_0$ un vecteur unitaire tangent en $x_0$ tels que:*

(i) *Il existe un groupe à un paramètre $\gamma^t$ de $G$, tel que la géodésique tangente à $v_0$ soit $\{\gamma^t x_0, t \in \mathbb{R}\}$.*

(ii) *Pour tous $X, Y$ tangents à $W$ en $x_0$ on a: $R(v, X)Y = -1(\langle X, Y\rangle v - \langle v, Y\rangle X)$.*

(iii) *$G$ est unimodulaire.*

*Alors: ou bien $W$ s'identifie à $G'$, le radical de $G$, qui sera un quotient $\Gamma\backslash SOL(n)$, où $\Gamma$ est discret et distingué et le groupe $\gamma^t$ correspondera à un feuilletage standard de $SOL(n)$; ou bien $W = \mathbb{H}^n$ $(n = \dim W)$ et $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$.*

**5.3** *Déduction de 5.1 d'après 5.2. Fin de la preuve du théorème III.* D'après la condition $(^*)$, une feuille s'identifie à un espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$. On applique alors l'affirmation précédente au stabilisateur dans $G$, d'une telle feuille. On obtiendra donc un groupe à un paramètre $\gamma^t$ comme dans 5.2.

Quant à la preuve du théorème III, elle s'achève à l'aide de 4.1 et 5.1, en considérant la variété: $W = G/\mathbf{K}$ (notation du lemme 4.1).

**5.4** *Notations – Plan de la preuve de 5.2.* Notons $T^1W$, le fibré unitaire tangent à $W$ et $N = Gv_0 \subset T^1W$, l'orbite de $v_0$ par $G$. Soient $\mathbf{K}$ (resp. $K$) le groupe d'isotropie de $x_0$ (resp. $v_0$) dans $G$. Alors $W$ (resp. $N$) s'identifie à $G/\mathbf{K}$ (resp. $G/K$).

La partie $N$ est invariante par le flot géodésique $\gamma^t$. En effet $\phi^t(gv_0) = g\gamma^t v_0 \in Gv_0 = N$. Ceci montre également que $(N, \phi)$ est algébrique, c'est-à-dire qu'il s'identifie au flot $\phi^t(gK) = g\gamma^t K$ sur $G/K$ (c'est bien défini car $\gamma^t$ centralise $K$).

Cette partie est contenue dans notre partie $N$, définie au par. 4. Elle lui sera égale si le groupe d'isotropie d'une feuille agit transitivement sur ses vecteurs unitaires tangents.

La preuve de 5.2 exploite les deux faits suivants

1) (5.5) $N$ est un ensemble hyperbolique du flot géodésique $(T^1W, \phi)$.

2) (5.6 et 5.7) $(N, \phi)$ est un flot d'Anosov (algébrique) ayant exactement (après éventuellement une manipulation algébrique) deux "valeurs spectrales" $-1$ et $+1$.

Ces deux faits découlent de l'hyperbolicité partielle (condition $(^*)$).

Les étapes suivantes seront:

3) (5.8) Un "lemme algébrique" sur les flots d'Anosov algébriques ayant exactement deux valeurs spectrales $+1$ et $-1$. On y démontre surtout, qu'alors $G$ est pratiquement soit résoluble, soit semi-simple (ceci n'est pas du tout vrai pour des flots d'Anosov algébriques généraux [Tom2]).

4) (5.9) Le cas résoluble s'analyse facilement.

5) (5.10) Le point 1, c'est-à-dire, l'hyperolicité de $N$ dans $(T^1W, \phi)$ permet de définir un flot sur $W$ dont les orbites sont des géodésiques asymptotes à la géodésique de $v_0$. C'est un flot *contractant* (exponentiellement).

6) (5.11) Dans le cas semi-simple, on remarquera que modulo conjugaison il n'y a qu'un seul flot d'Anosov algébrique (relativement à ce groupe). On démontrera ensuite que le flot des asymptotes ci-dessus est invariant par un grand sous-groupe de $G$, agissant en particulier transitivement sur $W$. On en déduira par comparaison de dimensions que $\mathbf{K}$ est un compact maximal de $G$. Il en résulte que $W$ est l'espace symétrique associé à $G$ qui est ici l'espace hyperbolique.

*Remarque.* Précisions, puisque aucune hypothèse de compacité n'est imposée, que la notion d'hyperbolicité est relative à une métrique invariante par l'action de $G$. Cette invariance du flot et de la métrique jouera un rôle équivalent à la compacité.

**5.5** *Hyperbolicité de $N$.* C'est tautologique, car comme on l'a remarqué ci-dessus, $N$ est contenue dans la partie analogue du paragraphe précédent (4.4.3). Rappelons que dans le scindement $\mathcal{H}y + \mathcal{V}y$ (horizontal+vertical) de l'orthogonal à $y$ dans $T_y(T^1W)$, on a les relations suivantes pour les espaces stables et instables:

$$E_y^{ss} = \{J, -J)/J \in E_y\}, \qquad D\phi^t(J, -J) = e^{-t}(J, -J)$$

et

$$E_y^{uu} = \{(J, J)/J \in E_y\}\,; \qquad D\phi^t(J, J) = e^t(J, J)$$

où $E_y$ est l'orthogonal à $y$ dans $T_xW$ ($x$ étant la projection de $y$ dans $W$).

Remarquons que ce scindement est de plus $G$-invariant. La théorie des variétés stables et instables s'appliquera donc bien (la $G$-invariance compensera la non-compacité).

Pour $y \in N$, notons $W^s(y)$ (resp. $W^u(y)$) sa variété stable (resp. instable) faible.

**Définition.** *On dira que deux géodésiques de $W$ sont positivement (resp. négativement)* **asymptotes** *si elles sont dans une même feuille stable (resp. instable) faible d'un élément de $N$.*

On utilisera cette notion au point 5.9 pour définir un "flot d'asymptotes" sur $W$.

**5.6** *Structure d'Anosov de* $(N, \phi)$. Comme en 4.4.5, la structure hyperbolique de $N$ induira une structure d'Anosov pour $(N, \phi)$. La raison ici est l'homogénéité: par $G$-invariance, il suffit de tout regarder en $v_0 \in N$ $(= G.v_0)$. Le groupe $\gamma^t$ agit isométriquement sur $T^1V$ en conservant $\phi$ et $N$. Il est clair que pour avoir un scindement d'Anosov en $v_0$, il suffit de montrer que $D_{v_0}(\gamma^{-t}\phi^t)$ est hyperbolique (pour tout $t$) dans l'orthogonal à $\mathbb{R}\phi$ *dans* $T_{v_0}N$. Or cela est vrai dans l'orthogonal à $\mathbb{R}\phi$ dans $T_{v_0}(T^1V)$ par définition de l'hyperbolicité de $N$. Il en va de même pour la restriction à $T_{v_0}N$ puisque l'hyperbolicité d'un isomorphisme d'un espace vectoriel de *dimension finie* s'exprime par la condition classique sur le spectre, qui passe bien aux restrictions.

Récapitulons nous: le flot $(N, \phi)$ s'identifie à un flot algébrique sur $G/K$: $\phi^t(gK) = g\exp(t\alpha).K$ où $\alpha$ est un élément de l'algèbre de Lie de $G$ qu'on notera $\mathscr{G}$. Notons $\mathscr{K}$ l'algèbre de Lie de $K$. Alors:

$$\operatorname{Ker}\operatorname{ad}(\alpha) = \mathbb{R}\alpha \oplus \mathscr{K}\,.$$

On a $\mathscr{G} = \mathbb{R}\alpha \oplus \mathscr{K} \oplus \mathscr{G}^{ss} \oplus \mathscr{G}^{uu}$, où $\mathscr{G}^{ss}$ et $\mathscr{G}^{uu}$ sont les espaces (qui sont par ailleurs des sous-algèbres) stables et instables de $\exp\operatorname{ad}\alpha$. On a les identifications:

$\mathscr{G}^{ss} = T_{v_0}N \cap E^{ss}$

$\mathscr{G}^{uu} = T_{v_0}N \cap E^{uu}$, où $E^{ss}$ et $E^{uu}$ sont les espaces stable et instable en $y = v_0$ (Notations de 5.5).

Munissons $G$ d'une métrique invariante à gauche, tenant compte des identifications précédentes ($N$ étant muni de la métrique induite de $T^1V$), et quelconque sur $\mathscr{K}+\mathbb{R}\alpha$.

**Affirmatioin.** *Notons* $A^t = \operatorname{Ad}(\exp t\alpha)\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ $(A^tu = (\exp -t\alpha)u(\exp t\alpha))$.

On a:

$$|A^tu| = e^{-t}|u| \quad si \quad u \in \mathscr{G}^{ss}\,, \qquad |A^tu| = e^t|u| \quad si \quad u \in \mathscr{G}^{uu}\,.$$

*Preuve.* Soit $u \in \mathscr{G}^{ss}$, d'après 5.5, $|D\phi^tu| = e^{-t}|u|$. Les métriques de $N = G/K$ et $G$ sont $G$-invariantes, il en résulte que:

$$|(\exp -t\alpha)u(\exp t\alpha)| = |D\phi^tu| = e^{-t}|u|\,.$$

La seconde formule se démontre de la même façon. □

**Corollaire.** $\operatorname{Ad}\alpha$ *est semi-simple. Ses valeurs propres dans* $\mathscr{G}^{ss}$ *(resp.* $\mathscr{G}^{uu}$*) ont une partie réelle égale à* $-1$ *(resp.* $+1$*).*

**5.7.** Il n'est pas vrai à priori que $A^t u = e^{-t} u$ dans $\mathscr{G}^{ss}$ (ou $A^t u = e^t u$ dans $\mathscr{G}^{uu}$). On va cependant montrer qu'on peut s'y ramener à l'aide d'une "manipulation algébrique". La situation algébrique, simple, ainsi produite sera traitée dans le lemme algébrique (5.8) ci-dessous.

5.7.1. Considérons le groupe à un paramètre d'isomorphismes de $\mathscr{G}$ (en tant qu'espace vectoriel) défini par:

$$B^t u = u = A^t u\,, \quad \text{si} \quad u \in \mathscr{K} + \mathbb{R}\alpha$$
$$B^t u = e^t A^t u\,, \quad \text{si} \quad u \in \mathscr{G}^{ss}$$
$$B^t u = e^{-t} A^t u\,, \quad \text{si} \quad u \in \mathscr{G}^{uu}\,.$$

**Affirmation.** (i) *$B^t$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathscr{G}$ (en tant qu'algèbre).*

(ii) *$|B^t u| = |u|$, si $u$ appartient à $\mathscr{K} + \mathbb{R}\alpha$, $\mathscr{G}^{ss}$ ou $\mathscr{G}^{uu}$ ($B^t$ sera isométrique si les espaces considérés sont orthogonaux). En particulier l'adhérence $\mathbb{T}$ de $\{B^t, t \in \mathbb{R}\}$ dans* Aut $\mathscr{G}$ *est un tore compact.*

*Preuve.* (i) Le corollaire ci-dessus et l'identité de Jacobi entraînement:

**Lemme** (voir l'étape 4 de 5.8). *Soient $X, X' \in \mathscr{G}^{ss}$, $Y \in \mathscr{G}^{uu}$ et $Z \in \mathscr{K} + \mathbb{R}\alpha$. Alors:*

1) $[X, X'] = 0$
2) $[X, Y] \in \mathscr{K} + \mathbb{R}\alpha$
3) $[X, Z] \in \mathscr{G}^{ss}$.

Ainsi:

$$B^t[X, X'] = 0 = [B^t X, B^t X']\,,$$
$$[B^t X, B^t Y] = [e^t A^t X, e^{-t} A^t Y] = [A^t X, A^t Y] = [X, Y] = B^t[X, Y]\,,$$
$$B^t[Z, X] = e^t A^t[Z, X] = e^t[A^t Z, A^t X] = [A^t Z, e^t A^t X] = [B^t Z, B^t X]\,.$$

On traitera les autres crochets de la même façon, ce qui montre que $B^t$ est un automorphisme pour tout $t$.

(ii) Ce point est évident. □

Supposons $G$ simplement connexe. Le tore $\mathbb{T}$ (adhérence de $B^t$) agit donc par automorphisme sur $G$. Soit $G_0 = \mathbb{T}.G$ le produit semi-direct ainsi obtenu. Soit $\beta$ l'élément de $\mathscr{C}$ (l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}$) défini par $B^t = \exp t\beta$.

**Affirmation.** *Soit $\alpha_0 = -\beta + \alpha$. Alors:*

(i) $\mathscr{G}_0 = (\mathscr{C} + \mathscr{K}) + \mathbb{R}\alpha_0 + \mathscr{G}_0^{ss} + \mathscr{G}_0^{uu}$; $\mathscr{C} + \mathscr{K} \subset \operatorname{Ker} \operatorname{ad} \alpha_0$. *Si $K_0 = \mathbb{T}.K$, alors $G_0/K_0 = G/K = W$.*

(ii) $\mathscr{G}_0^{ss} = \mathscr{G}^{ss} = \{X \in \mathscr{G}/[\alpha_0, X] = -X\}$.

$\mathscr{G}_0^{uu} = \mathscr{G}^{uu} = \{X \in \mathscr{G}/[\alpha_0, X] = X\}$. *C'est équivalent à dire que* $\operatorname{Ad}(\exp t\alpha_0)u = e^{-t}u$ *(resp. $e^t u$) si $u \in \mathscr{G}^{ss}$ (resp. $\mathscr{G}^{uu}$). En particulier spectre* $(\operatorname{ad} \alpha_0) = \{0, -1, 1\}$.

*Preuve.* Les preuves de tous ces points sont directes. Par exemple, si $u \in \mathscr{G}^{ss}$, alors $\exp t\alpha_0 u = \exp t(-\beta + \alpha)u = B^{-t} A^t u = e^{-t} u$. □

La suite de la preuve de 5.2, utilise le lemme algébrique suivant, valable lorsque le spectre de $\operatorname{ad} \alpha$ est égal à $\{0, -1, 1\}$. L'affirmation précédente et un raisonnement élémentaire assurent qu'on peut effectivement le supposer (sans rien modifier à la conclusion du théorème 5.2).

**5.8 Lemme algébrique.** *Soit $G$ un groupe de Lie connexe unimodulaire dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet un élément $\alpha$ vérifiant:*

1) $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\,\alpha) = \mathbb{R}\alpha \oplus \mathcal{K}$ *où $K$ est une sous-algèbre compacte au sens que $K = \exp\mathcal{K}$ est compact.*

2) *Sur $\mathcal{G}/\mathbb{R}\alpha\oplus\mathcal{K}$,* $\mathrm{ad}\,\alpha$ *est semi-simple et admet exactement deux valeurs propres $-1$ et $+1$.*

3) *L'action de $G$ sur $G/K$ est fidèle.*

*Alors: ou bien $G$ est un produit semi-direct $K.G'$ où $G'$ est un quotient de $SOL(n)$ par un sous-groupe distingué et discret (en particulier $G/K$ s'identifie à $G'$); ou bien $G$ est semi-simple de type non compact.*

*Remarque.* Ce lemme n'est pas aussi évident qu'on pourrait le penser. Prenons par exemple $G$ le produit semi-direct usuel, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).\,\mathbb{R}^2$ et pour $\alpha$ l'élément de l'algèbre de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (le flot géodésique). On est tenté à croire (à tort) que les valeurs propres non triviales de $\mathrm{ad}\,\alpha$ sont $-1$ et $+1$. On vérifie que $-2$ et $+2$ sont également valeurs propres de $\mathrm{ad}\,\alpha$!

*Preuve.* La condition 3 sur le fait que l'action de $G$ sur $G/K$ est fidèle ne sera *utilisée qu'à l'étape finale* de la preuve. Ceci nous permettra de *passer à des quotients* tout en préservant les deux premières conditions du lemme.

*Etape 1. Notations.* Soit $\mathcal{R}$ le radical de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{N}$ son radical nilpotent (plus grand idéal nilpotent). Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{H} + \mathcal{S}) + \mathcal{R}$ une décomposition de Levi de $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{H} + \mathcal{S}$ soit semi-simple, $\mathcal{H}$ de type compact et $\mathcal{S}$ de type non compact (la somme $\mathcal{H} + \mathcal{S}$ est directe au sens d'algèbres).

Pour $\mathcal{L}$ un idéal de $\mathcal{G}$, notons: $\mathcal{L}^{ss}$ (resp. $\mathcal{L}^{uu}$) l'espace propre de $\mathrm{ad}\,\alpha/\mathcal{L}$, relatif à $-1$ (resp. $+1$). On a

$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{ss} \oplus \mathcal{L}^{uu} \oplus \mathcal{L} \cap (\mathbb{R}\alpha + \mathcal{K})$,
$\mathcal{L}^{ss} = \mathcal{L} \cap \mathcal{G}^{ss}$, $\mathcal{L}^{uu} = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{uu}$,
$\mathcal{G}^{ss} = \{X \in \mathcal{G}/[\alpha, X] = -X\}$ et
$\mathcal{G}^{uu} = \{X \in \mathcal{G}/[\alpha, X] = +X\}$.

*Étape 2.* On a $\mathcal{N} \cap (\mathbb{R}\alpha + \mathcal{K}) = \mathcal{N} \cap \mathcal{K} \subset Z(\mathcal{G})$ où $Z(\mathcal{G})$ est le centre de $\mathcal{G}$.

*Preuve.* Supposons par l'absurde que $\mathcal{N} \cap (\mathbb{R}\alpha + \mathcal{K})$ soit différent de $\mathcal{N} \cap \mathcal{K}$. Il existe donc $k \in \mathcal{K}$ et $n \in \mathcal{N}$ tels que $\alpha + k = n$. Par hypothèse sur $\alpha$ et compacité de $\mathcal{K}$, $\mathrm{ad}\,\alpha$ et $\mathrm{ad}\,k$ sont semi-simples. La somme $\mathrm{ad}(\alpha + k)$ l'est également puisque $\alpha$ et $k$ commutent. On en déduit puisque $n$ est nilpotent que, $\alpha + k = 0$. Pour conclure utilisons le fait suivant qui sera utile le long de toutes ces étapes de la démonstration.

5.8.1 *Fait.* Soit $\mathcal{L}$ une sous-algèbre compacte de $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire que $\exp\mathcal{L}$ est compact). Alors pour tout $l \in \mathcal{L}$, $\mathrm{ad}(l)$ est semi-simple, à valeurs propres imaginaires pures.

Montrons maintenant que $\mathcal{N} \cap \mathcal{K} \subset Z(\mathcal{G})$. Par compacité de $\mathcal{K}$ et nilpotence de $\mathcal{N}$ on a $\mathcal{N} \cap \mathcal{K} \subset Z(\mathcal{N})$ le centre de $\mathcal{N}$ (5.8.1). Ce centre est un idéal de $\mathcal{G}$. Soit $N'$ le sous-groupe (abélien) déterminé par $Z(\mathcal{N})$. Il s'écrit comme un produit $T \times E$ où $T$ est compact et $E$ est abélien libre.

*Observation.* Tout automorphisme de $T \times E$ respecte $T$. (*Preuve.* Soit $f$ un tel automorphisme. Il est affine pour la structure euclidienne sur $T \times E$. En effet les géodésiques sont exactement les translatées des groupes à un paramètre. Ces derniers sont respectés par les automorphismes. Donc $f(T)$ est une sous-variété géodésique compacte de $T \times E$. Il en va de même pour sa projection sur $E$. Cette projection est donc réduite à 0. Autrement dit $f(T) = T$).

On a une représentation adjointe $G \to \mathrm{Aut}(T \times E)$. Elle se factorise en une représentation $G \to \mathrm{Aut}(T)$. Cette dernière est triviale puisque $\mathrm{Aut}\,T$ est discret (si $d = \dim T$ alors $\mathrm{Aut}\,T = \mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$). On a ainsi montré que $T$ est dans le centre de $G$. En particulier $\mathcal{N} \cap \mathcal{K} \subset Z(\mathcal{G})$. $\square$

*Étape 3.* Si $\alpha \in \mathcal{H} + \mathcal{R}$; alors $\mathcal{S} = 0$.

*Preuve.* En effet $\mathcal{H} + \mathcal{R}$ étant un idéal de $\mathcal{G}$, $\mathrm{ad}\,\alpha$ sera trivial sur $\mathcal{G}/\mathcal{H} + \mathcal{R} = \mathcal{S}$. Donc $\mathbb{R}\alpha + \mathcal{K}$ se projette surjectivement sur $\mathcal{S}$. Contradiction avec le fait que $\mathcal{S}$ est de type non compact. $\square$

On va désormais supposer que $\alpha \notin \mathcal{H} + \mathcal{R}$ et que $\mathcal{R}$ est non trivial. On montrera alors, au bout de l'étape 7, que *$\mathcal{N}$ est compact.*

*Étape 4.* Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{G}$, alors on a:

1) $[\mathcal{G}^s, \mathcal{I}^s] = 0$
2) $[\mathcal{G}^s, \mathcal{I}^u] \subset \mathcal{I} \cap (\mathbb{R}\alpha + \mathcal{K})$
3) $[[\mathcal{G}^s, \mathcal{G}^u], \mathcal{N}] = 0$.

*Preuve.* Il suffit de montrer 1 et 2 pour $\mathcal{I} = \mathcal{G}$. Ces égalités se déduisent de l'identité de Jacobi: "Si $X$ et $X'$ sont deux vecteurs propres de $\mathrm{ad}\,\alpha$, relativement aux valeurs propres $\lambda$ et $\lambda'$ alors $[X, X']$ est un vecteur propres pour $\lambda + \lambda'$".

Pour la première égalité on considère $\lambda = \lambda' = -1$ donc $\lambda + \lambda' = -2$. Or $-2$ n'est pas valeur propre de $\mathrm{ad}\,\alpha$. Donc $[X, X'] = 0$.

Pour la seconde on prend $\lambda = -\lambda' = -1$.

Pour montrer la dernière égalité, considérons $X \in \mathcal{G}^s$, $X' \in \mathcal{G}^u$ et $n \in \mathcal{N}$. On a: $[[X, X'], n] = [X, [X', n]] + [X', [X, n]]$.

Écrivons $n = n^s + n^u + n^0 \in \mathcal{N}^s + \mathcal{N}^u + \mathcal{N} \cap (\mathbb{R}\alpha + \mathcal{K})$. D'après, l'étape 2, $n^0 \in Z(\mathcal{G})$ donc $[X, n] = [X, n^s + n^u] = 0 + [X, n^u]$, d'après l'égalité 1. D'après l'égalité 2, on a $[X, n^u] \in \mathcal{N} \cap (\mathbb{R}\alpha + \mathcal{K})$. Encore d'après l'étape 2, $[X, n^u] \in Z(\mathcal{G})$, donc $[X', [X, n^u]] = 0$. On a ainsi montré que $[X', [X, n]] = 0$. On traite de la même façon l'autre terme. $\square$

*Étape 5. Cas semi-simple.*

5.8.2 **Proposition.** *Supposons $\mathcal{R} = \mathcal{H} = 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{G}$ est semi-simple de type non compact. Alors $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie du groupe d'isométries d'un espace hyperbolique et après conjugaison $\alpha$ correspondra au flot géodésique de cet espace.*

*Preuve.* Ce résultat reste vrai en supposant $\alpha$ semi-simple, à spectre réel et en remplaçant (dans la conclusion) l'espace hyperbolique par un espace symétrique à courbure négative [Tom2]. L'espace hyperbolique se caractérise parmi ces espaces par le fait que le spectre de $\alpha$ est réduit à $\pm 1$ $\square$.

*Étape 6.* Il existe $h \in \mathcal{H}$ et $r \in \mathcal{R}$ tels que sur $\mathcal{N}$ on a: $\mathrm{ad}\,\alpha = \mathrm{ad}\,h + \mathrm{ad}\,r$.

*Preuve.* Soit $\pi: \mathcal{G} \to \mathcal{G}/(\mathcal{H} + \mathcal{R}) = \mathcal{S}$. Il est connu que $[\pi(\mathcal{G}^{ss}), \pi(\mathcal{G}^{uu})] = \mathcal{S}$. Dans $\mathcal{G}$, cela singifie qu'il existe $s \in [\mathcal{G}^{ss}, \mathcal{G}^{uu}]$, $h \in \mathcal{H}$ et $r \in \mathcal{R}$ tels que $\alpha = s + h + r$. Or d'après l'étape 4, $\mathrm{ad}(s)/\mathcal{N} = 0$. L'affirmation en découle. $\square$

*Étape 7.* $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$.

Montrons d'abord que $R/N$ est compact ($R$ et $N$ sont les sous-groupes correspondants respectivement à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{N}$). Projetons tout dans $\mathcal{G}' = \mathcal{G}/\mathcal{N}$. Le radical $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{G}'$ est $\mathcal{R}/\mathcal{N}$. Il est donc abélien (car $[\mathcal{R},\mathcal{R}] \subset \mathcal{N}$) et coïncide avec le radical nilpotent $\mathcal{N}'$. La formule de l'étape 6 devient ici: $\mathrm{ad}\,\alpha = \mathrm{ad}\,h$ (dans $\mathcal{N}'$) puisque $\mathrm{ad}(r)/\mathcal{N}' = 0$. De la compacité de $\mathcal{H}$, on déduit que $\mathrm{ad}\,\alpha$ est trivial sur $\mathcal{N}' = \mathcal{R}/\mathcal{N}$. On a donc $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}\alpha + \mathcal{K} + \mathcal{N}$. On montre facilement comme à l'étape 2, qu'en fait $\mathcal{R} \subset \mathcal{K} + \mathcal{N}$ (on avait supposé $\mathcal{S} \neq 0$). Donc $R/N$ est compact.

Soit $T \subset H$, le sous-groupe compact (abélien) engendré par $\{\exp th, t \in \mathbb{R}\}$ où $h$ est l'élément de $H$ trouvé dans l'étape 6. Soit $L$ le produit semi-direct $H.R$; il est résoluble et son radical unipotent $L'$ contient $N$. En particulier $L/L'$ est compact.

**Lemme.** *Soit $L$ un groupe résoluble et $L'$ son radical unipotent. Supposons $L/L'$ compact. Alors pour tout $\beta \in \mathcal{L}$, le spectre de* $\mathrm{ad}\,\beta$ *est imaginaire pur.*

*Preuve.* Considérons la représentation adjointe de $L$ dans $\mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ (le complexifié de $\mathcal{L}$). On peut trouver une base de $\mathcal{L}$, telle que $\mathrm{ad}\,\beta$ soit une matrice triangulaire supérieure pour tout $\beta \in \mathcal{L}$; de plus si $\beta \in \mathcal{L}'$, alors $\mathrm{ad}\,\beta$ est à diagonale nulle.

Supposons, par l'absurde que $\beta \in \mathcal{L}$, aie une valeur propre $a + ib$ telle que $a \neq 0$. Un élèment $x$ de $L'$, ne contient que 1 sur la diagonale. On en déduit que $\exp t\beta.x^{-1}$ contient $\exp t(a+ib)$ sur la diagonale. Or la compacité de $L/L'$ entraîne qu'il existe $t_n \to \infty$, et $x_n \in N$ tels que $\exp t\beta.x_n^{-1} \to 1$. Contradiction! □

Considérons maintenant l'élément $\beta = h + r$ de l'étape 6. On a $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{ss} + \mathcal{N}^{uu} + \mathcal{N} \cap \mathcal{K}$. Si $\mathcal{N}^{ss} \neq 0$ (resp. $\mathcal{N}^{uu} \neq 0$) alors $-1$ (resp. $+1$) serait une valeur propre de $\mathrm{ad}\,\alpha/\mathcal{N}$. Donc $-1$ (resp. $+1$) est une valeur propre de $\mathrm{ad}\,\beta$, car $\mathrm{ad}\,\beta/\mathcal{N} = \mathrm{ad}\,\alpha/\mathcal{N}$. Contradiction avec le lemme précédent. Donc $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap \mathcal{K}$. □

*Étape 8. Fin de la preuve du lemme algébrique.* En résumé, on a montré que:

Soit $\alpha \in \mathcal{H} + \mathcal{R}$ et $\mathcal{S} = 0$ (en d'autres termes $\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{R}$);

soit $\alpha \notin \mathcal{H} + \mathcal{R}$; et alors $\mathcal{N} \subset \mathcal{K}$. Ceci contredira le fait que l'action de $G$ sur $G/K$ est fidèle ($K$ contiendrait un idéal!) sauf si $\mathcal{N} = 0$ et par suite $\mathcal{R} = 0$. En d'autres termes $\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{S}$.

*Cas résoluble* ($\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{R}$). Montrons que $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathbb{R}\alpha \oplus \mathcal{N}$. Considérons le quotient $(\mathcal{H} + \mathcal{R})/\mathcal{N} = \mathcal{H} + \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est abélien. Sur $\mathcal{H} + \mathcal{A}$, $\mathrm{ad}\,\alpha$ admet un spectre imaginaire pur. Donc $\mathrm{ad}\,\alpha$ est trivial sur le quotient. Autrement dit $\mathcal{H} + \mathcal{R} \subset \mathcal{K} + \mathbb{R}\alpha + \mathcal{N}$. Cette somme est directe d'après l'étape 2 (car $\mathcal{G}$ est à centre trivial). Prenons $\mathcal{G}' = \mathbb{R}\alpha + \mathcal{N} = \mathbb{R}\alpha + \mathcal{G}^{ss} + \mathcal{G}^{uu}$. C'est un idéal de $\mathcal{G}$. Or $\mathcal{G}$ est unimodulaire, donc $\dim \mathcal{N}^{ss} = \dim \mathcal{N}^{uu}$. Il est facile de voir d'après l'étape 4, qu'alors $\mathbb{R}\alpha + \mathcal{N}$ est isomorphe à une algèbre $sol(n)$ ($n = \dim \mathcal{N}^{ss}$). □

*Cas semi-simple* ($\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{S}$). On va montrer que $\mathcal{H} = 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{G} = \mathcal{S}$ est semi-simple de type non compact. En effet $\mathrm{ad}\,\alpha$ est trivial sur $\mathcal{G}/\mathcal{S}$. Donc $\mathcal{K}$ se projette surjectivement sur $\mathcal{H}$. Il en résulte que $\mathcal{S}$ se surjette sur $\mathcal{G}/\mathcal{K}$. Donc $\mathcal{G}/\mathcal{K} = \mathcal{S}/\mathcal{S} \cap \mathcal{K}$. Par suite $H$ agit trivialement sur $G/K$. Par conséquent $H$ est trivial puisque par l'hypothèse 3 du lemme, l'action de $G$ sur $G/K$ est fidèle. Ceci achève la preuve du lemme algébrique. □

**5.9** *Preuve du théorème.*

*Cas résoluble.* Appliquons le lemme algébrique aux données du théorème 5.2. Le premier cas du théorème correspond parfaitement au premier cas du lemme.

*Cas semi-simple.* Il reste à montrer que: si $G$ est semi-simple, alors $W$ est un espace hyperbolique. On sait déjà d'après la proposition 5.7.2 que $\mathscr{G}$ est l'algèbre de Lie d'isométries d'un espace hyperbolique (ceci équivaut à dire que $G$ est le groupe d'isométries préservant l'orientation de cet espace hyperbolique). Il s'agit maintenant de montrer, via la condition d'hyperbolicité partielle, que $W = G/\mathbf{K}$ est hyperbolique (c'est pratiquement équivalent à dire que $\mathbf{K}$ est un compact maximal).

En particulier le groupe $G$ (par exemple $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$) lui même n'admet pas de métrique invariante à gauche et vérifiant la conditioin d'"hyperbolicité partielle" du théorème 5.2. Il est connu qu'une métrique invariante à gauche sur un tel groupe (c'est-à-dire qui soit semi-simple) ne peut jamais être à courbure négative [Aze-Wil]. La démonstration qu'on va donner de 5.2 dans le cas semi-simple, s'adapte au cas général suivant:

**Proposition.** *Soit $G$ un groupe de Lie semi-simple agissant isométriquement et transitivement sur une variété $W$. Supposons qu'il existe $v_0 \in T^1V$ tel que la géodésique tangente à $v_0$ soit définie par un groupe à un paramètre de $G$. Supposons de plus que la courbure sectionnelle de tout plan contenant $v_0$ soit négative. Alors $W$ est un espace symétrique à courbure négative (On en déduit par exemple que les métriques naturelles sur les fibrés unitaires tangents des variétés localement symétriques ne sont pas à courbure négative le long du flot géodésique).*

La preuve, qu'on ne fera ici que dans notre cas particulier, utilise crucialement la construction suivante.

**5.10** *Flot des asymptotes.* Remarquons les deux faits suivants (notations de 5.4).

(i) Tout vecteur $y \in N$, détermine une géodésique qui se projette injectivement dans $W$. Il suffit en effet de le vérifier pour $y = v_0$, auquel cas la géodésique en question est l'orbite de $x_0$ par le groupe à un paramètre $\gamma^t$.

(ii) D'après la formule explicite de $E_y^s$ (5.5), la variété stable faible $W_y^s$, se projette difféomorphiuement sur $W$, au voisinage du point $y$ de $N$.

Notons $\mathscr{L}_0$ la géodésique définie par $v_0$. Les remarques précédentes, ainsi que la $G$-invariance (de tout le monde) nous permettent de trouver: un $\varepsilon$-voisinage de $\mathscr{L}_0$ et un "semi-flot" dedans, dont les orbites sont des "demi" géodésiques positivement asymptotes à $\mathscr{L}_0$ (5.5).

Pour ne pas compliquer les notations en emballant toutes ces données, supposons que le semi-flot est en fait global (il revient au même à dire que $W_{v_0}^s$ se projette difféomorphiquement sur $W$). On aura donc en résumé un flot $(W, \psi)$ dont les orbites sont des géodésiques asymptotes à $\mathscr{L}_0$.

**Affirmation.** *Le flot $(W, \psi)$ est invariant par le sous-groupe stable faible $G^{so}$, tangent à la sous-algèbre $\mathbb{R}\alpha + \mathscr{K} + \mathscr{G}^{ss}$. On notera $(\bar{W}, \bar{\psi})$ le flot quotient.*

*Preuve.* En effet $G^{so}$ préserve le flot $(N, \phi)$ ainsi que la feuille stable faible $W_{v_0}^s$. Il préserve donc la restriction de $\phi$ à $W_{v_0}^s$. La projection $\pi : W_{v_0}^s \to W$ conjugue les flots $(W_{v_0}^s, \phi)$ et $(W, \psi)$, ainsi que les actions de $G^{so}$ sur $W_{v_0}^s$ et $W$. Il en résulte que $G^{so}$ respecte $(W, \psi)$. $\square$

**5.11** *Etude de* $(\bar{W}, \bar{\psi})$. La projection $G \to G/K = W$ détermine une projection (surjective) $G^{so}\backslash G \to G^{so}\backslash W = \bar{W}$.

**Affirmation.** *Si $G$ est semi-simple, alors $\bar{W}$ est compact.*

*Preuve.* En effet, d'après la proposition 5.8.2, on peut supposer que $(N, \phi)$ est le flot géodésique d'un espace symétrique $H$, à courbure négative. Dans ce cas $G^{so}\backslash G$ n'est rien d'autre que la sphère à l'infini de $H$. □

**Corollaire.** *$\bar{W}$ est réduit à un point.*

*Preuve.* Pour cela, il suffit simplement de remarquer que $\bar{\psi}$ est contractant, ce qui ne peut se produire dans un espace compact non trivial.

En termes plus précis, notons $p: W \to \bar{W}$, la projection.

Munissons $\bar{W}$ de la distance: $\bar{d}(p(x), p(y)) = d_H(G^{so}x, G^{so}y))$, où $d_H$ est la distance de Hausdorff. Notons, puisque l'action de $G^{so}$ est isométrique que:

$$d_H(G^{so}x, G^{so}y)) = d(G^{so}x, G^{so}y) = \inf\{d(g_1x, g_2y), g_1, g_2 \in G^{so}\}\,.$$

Soit $B$ un voisinage compact de $x_0 \in \mathcal{V}_0$ tel que $p(B) = \bar{W}$. Donc $p(\psi^t B) = \bar{W}$ pour tout $t$. Par suite: diamètre $(\bar{W}) \leqq$ diamètre $\psi^t(B)$. Or il découle du caractère contractant de $\psi$ et la compacité de $B$ que, diamètre $(\psi^t(B)) \to 0$ quand $t \to 0$ (et même exponentiellement). Donc $\bar{W}$ est réduit à un point. □

**5.12** *Fin de la preuve.* L'affirmation précédente signifie que $G^{so}$ agit transitivement sur $W$. Il en va de même pour le groupe quotient $G^s = G^{so}/K$ (tangent à la sous-algèbre $\mathbb{R}\alpha + \mathcal{G}^{ss}$) puisque $K$ stabilise $v_0$ et par conséquent stabilise également $x_0 \in W$. Soit $H$ l'espace symétrique associé à $G$. On a $H = G/\mathbf{K}'$ où $\mathbf{K}'$ est un compact maximal. Il est connu que $\dim H = \dim G^s$. On en déduit que $\dim H \geqq \dim W$. Par conséquent $\dim \mathbf{K}' \leqq \dim \mathbf{K}$. Donc $\mathbf{K}$ est un compact maximal de $G$.

Pour conclure utilisons l'affirmation suivante.

**Affirmation.** *Soit $G$ un groupe simple de type non compact agissant transitivement sur une variété $W$. Supposons $\dim W \leqq \dim H$ où $H$ est l'espace symétrique associé à $G$. Alors, moyennant éventuellement une multiplication de la métrique de $W$ par une constante, $W$ est isométrique à $H$.*

*Preuve.* Les compacts $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}'$ (notations ci dessus) étant maximaux, sont donc conjugués dans $G$. On en déduit un difféomorphisme $f: W \to H$, commutant avec les actions de $G$. L'image par $f$ de la métrique de $W$ est une métrique $G$-invariante sur $H$. Or le groupe d'isotropie des points de $H$ est irréductible ($G$ est simple). Cette métrique est donc multiple de la métrique initiale de $H$. □

*Remerciements.* Je remercie le referee pour toutes ses remarques et suggestions

## Références

[Aze-Wil] Azencott, R., Wilson, E.: Homogeneous manifolds, with negative curvature, Part II. Mem. Am. Math. Soc. **8**, 178 (1976)

[BFL] Benoit, Y., Foulon, F., Labourie, F.: Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables. Prépublication, Ecole Polytechnique (1990)

[Bor] Borisenko, A.: Complete 1-dimensional surfaces of nonpositive extrinsic curvature in a Riemannian space. Math Sb. **33**, 485–499 (1977)

[Cao-Mok] Cao, H.-D., Mok, N.: Holomorphic immersions between compact hyperbolic space forms. Invent. Math. **100**, 49–61 (1990)

[Che-Kui] Chern, S.S., Kuiper, N.H.: Some theorems on the isometric imbeddings of compact Riemannian manifolds in Euclidean space. Ann. Math. **56**, 422–430 (1952)

[Daj-Rod] Dajczer, M., Rodriguez, L.: On isometric immersions into complex space forms (Preprint 1992)

[Dom] Dombrowski, P.: Jacobi fields, totally geodesic foliations and geodesic differential forms. Result. Math. **1**, 156–194 (1979)

[Ebe] Eberlein, P.: When is a geodesic flow of Anosov type? J. Differ. Geom. **8**, 437–463 (1973)

[Fed] Feder, S.: Immersions and embeddings in complex projective spaces. Topology **4**, 143–158 (1965)

[Fer1] Ferus, D.: Totally geodesic foliations. Math. Ann. **188**, 313–316 (1970)

[Fer2] Ferus, D.: Isometric immersions of constant curvature manifolds. Math. Ann. **217**, 155–156 (1975)

[Flo] Florit, L.: On submanifolds with nonpositive extrinsic curvature. (Preprint 1993)

[Fra-Rob] Franks, J., Robinson, C.: A quasi Anosov diffeomorphism that is not Anosov. Trans. Am. Math. Soc. **223**, 267–278 (1976)

[Gro] Gromov, M.: Partial differential relations. Berlin Heidelberg, New York: Springer 1986)

[GLP] Gromov, M., Lafontaine, J., Pansu, P.: Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: CEDIC-Fernand Nathan 1981

[Hel] Helgason, S.: Differential geometry and symmetric spaces. New York: Academic Press 1962

[Hir-Pug] Hirsch, M., Pugh, C.: Stable manifolds and hyperbolic sets. In: Chern, S.-S., Smale, S. (eds.) Global analysis. (Proc. Symp. Pure Math., vol. 14) Provicence, RI: Am. Math. Soc. 1970

[Kui] Kuiper, N.H.: On $C^1$-isometric imbeddings, I. Proc. K. Ned. Akad. Wet., Ser. A **58**, 545–556 (1958)

[Kob-Nom] Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of differential geometry, vol. 2. New York: Springer 1969

[O'N] O'Neil, B.: Isometric immersions of flat Riemannian manifolds in euclidean space. Mich. Math. J. **9**, 199–205 (1962)

[O'N-Sti] O'Neil, B., Stiel, E.: Isometric immersions of constant curvature manifolds. Mich. Math. J. **10**, 335–339 (1963)

[Rec] Reckziegel, H.: Completeness of curvature surfaces of an isometric immersion. J. Differ. Geom. **14**, 7–20 (1979)

[Ros] Rosenthal, A.: Riemannian manifolds of constant nullity. Mich. Math. J. **14**, 469–480 (1967)

[Spi] Spivak, M.: A comprehensive intrduction to differential geometry. Berkeley Publish or Perish 1979

[Thu] Thurston, W.: Geometry and topology of 3-manifolds. Lecture Notes Princeton (1978)

[Tom1] Tomkins, C.: Isometric imbedding of flat manifolds in Euclidean space. Duke. Math. J. **5**, 38–61 (1939)

[Tom2] Tomter, P.: Anosov flows on infra-homogeneous spaces. In: Chern, S.-S., Smale, S. (eds.) Global anaylsis. (Proc. Symp. Pure Math., vol. 14, pp. 299–327) Providence, RI: Am. Math. Soc. 1970

[Zeg1] Zeghib, A.: Feuilletages géodésiques des variétés localement symétriques et applications. Thèse. Dijon (1985)

[Zeg2] Zeghib, A.: Sur une notion d'autonomie de systèmes dynamiques, appliquée aux sous-ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques. Lyon: ENS Preprint 1991

[Zeg3] Zeghib, A.: Ensembles invariants des flots géodésiques des variétés localement symétriques. Lyon: ENS Preprint 1992

[Zeg4] Zeghib, A.: Feuilletages géodésiques des variétés localement symétriques. Lyon: ENS Preprint 1992