



PII: S0040-9383(96)00033-X

FEUILLETAGES GÉODÉSINIQUES DES VARIÉTÉS LOCALEMENT SYMÉTRIQUES

A. ZEGHIB[†]

CNRS: UMPA, ENS-Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

(Received 10 June 1994; in revised form 3 February 1996)

We prove here that a hyperbolic manifold of finite volume (not necessarily complete!) does not possess a locally Lipschitz foliation with totally geodesic and complete leaves. © 1997 Elsevier Science Ltd. All rights reserved

On démontre ici qu'une variété hyperbolique de volume fini (pas nécessairement complète!) n'admet pas de feuilletage localement Lipschitz, dont les feuilles sont totalement géodésiques et complètes. © 1997 Elsevier Science Ltd. All rights reserved

1. INTRODUCTION

Nombreux sont les problèmes de géométrie donnant lieu à des feuilletages avec certaines propriétés géométriques tangentielles ou transversales, voir [1, 5, 7, 10, 12, 19] pour une variété d'exemples. Malheureusement, ces feuilletages ne sont généralement pas "définis partout": ils se présentent généralement comme niveaux d'applications de rang non nécessairement constant. Ceci a rendu l'étude de tels "feuilletages", isolée de leurs problèmes géométriques d'origine, pratiquement difficile.

Notre but dans cet article est de montrer que certaines conditions sur un feuilletage (en fait ici tangentielles) même s'il n'est pas défini partout pourraient impliquer de fortes restrictions.

Essayons d'abord de formaliser la situation (sans prétendre avoir atteint une terminologie optimale). Soit donc V une variété riemannienne (pas nécessairement complète).

Définition 1. On dira d'une sous variété (injectivement immergée) $F \subset V$ qu'elle est relativement complète si toute géodésique de F est prolongeable dans F tant qu'elle est prolongeable (en tant que courbe) dans V . Autrement dit toute suite de Cauchy de F , qui diverge dans F , diverge également dans V .

Définition 2. Un feuilletage local de V est un couple (U, \mathcal{F}) où U est un ouvert de V et \mathcal{F} est un feuilletage de U à feuilles relativement complètes dans V .

L'ouvert U sera appelé le support du feuilletage local. On notera généralement le feuilletage local \mathcal{F} au lieu de (U, \mathcal{F}) .

Par exemple la restriction d'un feuilletage (global) de V à un ouvert invariant détermine un feuilletage local.

La théorie classique des feuilletages (globaux) est beaucoup mieux développée pour les variétés compactes que pour les variétés ouvertes. Les feuilletages locaux des variétés

[†]E-mail: Zeghib@umpa.ens-lyon.fr.

compactes, se situent entre les feuilletages (globaux) des variétés compactes et ceux des variétés ouvertes. En effet il ne semble pas correct de considérer les feuilletages locaux des variétés compactes comme simplement des feuilletages de variétés ouvertes. Pour un ouvert U d'une variété V compacte, supporter un feuilletage local de V est beaucoup plus restrictif qu'un simple feuilletage de cet ouvert. Par exemple, en codimension 1, un tel feuilletage local "tendrait" à se prolonger en un feuilletage d'un compact, pour lequel U serait un ouvert saturé. La situation devient beaucoup plus rigide en présence de conditions géométriques comme on le verra ci-dessous.

Notons qu'il y a aussi une notion "duale" de celle de feuilletage local, qui est celle de *lamination* [15]. Dans ce cas le support est fermé au lieu d'être ouvert. C'est donc une notion, plus faible car le support n'est pas nécessairement une variété, mais aussi plus forte puisque sur un fermé on a de la continuité uniforme, en supposant la variété ambiante compacte.

Définition 3. On dira qu'un feuilletage local est géodésique si toutes ses feuilles sont (totalement) géodésiques.

Les feuilletages locaux qui nous intéresseront ici seront géodésiques. Ils étaient assez étudiés en courbure positive (voir par exemple [4]). La non globalité dans ce cas ne posait aucun problème, puisque toutes les feuilles sont compactes (car complètes). Ici on s'intéresse au cas où la courbure est négative. Nos résultats seront (comme la courbure) négatifs, c'est-à-dire d'inexistence. Nos feuilletages locaux seront supposées avoir, essentiellement une régularité (locale) Lipschitz. Ceci est assez naturel (voir [18] pour une application) et pratiquement optimal. Ce type de régularité marque un autre point de divergence entre le présent approche et la théorie classique des feuilletages. Enfin notre méthode ici est "dynamique":

1.1. Dynamique des feuilletages géodésiques

Soit V une variété riemannienne et (T^1V, ϕ) son flot géodésique (ϕ^t est un flot local lorsque V n'est pas complète). Soit (U, \mathcal{F}) un feuilletage géodésique local de V .

Pour étudier sa dynamique, on "désingularise" \mathcal{F} en passant à $N = T^1\mathcal{F} \subset T^1V$, qui est le fibré sur U des vecteurs unitaires tangents aux feuilles de \mathcal{F} .

Le fait que \mathcal{F} soit un feuilletage géodésique local équivaut à dire que N est une partie invariante par ϕ . Cela veut dire que si $x \in N$, alors $\phi^t(x) \in N$ tant que $\phi^t(x)$ existe (dans T^1V).

Hypothèse: A partir d'ici, sauf mention explicite du contraire, V est localement symétrique et à courbure non-positive.

Dans [21], on a mené une étude d'ensembles invariants des flots géodésiques des variétés considérées. La morale de cette étude est une rigidité des ensembles invariants, vérifiant une certaine régularité (essentiellement, une rectifiabilité locale) et une certaine récurrence (essentiellement, conservation d'une mesure de Lebesgue). En voici un exemple de résultat:

THÉORÈME 1 (Théorème D de [21]). *Supposons V à courbure négative et $N \subset T^1V$ une partie rectifiable (essentiellement, N est l'image d'une application Lipschitz définie sur un borné d'une variété riemannienne compacte, et donc en particulier de mesure de Hausdorff finie)*

invariante par le flot géodésique. Alors (N, ϕ) préserve la mesure de Hausdorff et il existe W , une sous-variété de V (pas nécessairement connexe), fermée, géodésique et de volume fini telle que N soit de mesure de Hausdorff totale dans T^1W .

(Le terme sous-variété signifie ici que W est l'image d'une immersion, pas nécessairement injective, d'une certaine variété dans V , autrement dit, W peut avoir du self-intersection).

Essayons d'appliquer ce théorème aux feuilletages, i.e. pour $N = T^1\mathcal{F}$. Il s'applique bien aux feuilletages globaux d'une variété compacte, ou plus généralement aux feuilletages locaux, uniformément Lipschitz de telles variétés. Il entraînera alors que le feuilletage est réduit à une seule feuille! (Voir la preuve du Théorème A).

Cependant pour un feuilletage local, une condition de type uniformément Lipschitz est beaucoup moins naturelle et moins intéressante que Localement Lipschitz. Dans ce dernier cas $T^1\mathcal{F}$ sera localement rectifiable, mais à priori de mesure de Hausdorff infinie, même si le volume du support de \mathcal{F} , ou de la variété ambiante est fini.

Évidemment, le Théorème 1 ne s'étend pas aux sous-ensembles localement rectifiables quelconques. Il se généralise cependant (voir l'énoncé du Théorème 2 au cours de la preuve du Théorème A) en supposant, au lieu d'avoir une mesure de Hausdorff finie (auquel cas elle sera conservée), qu'il existe une mesure finie *invariante*, équivalente à la mesure de Hausdorff.

L'apport principal de cet article est de montrer que de telles mesures existent bien dans le cas des sous-ensembles invariants *provenant de feuilletages*. Cet article décrit en effet un phénomène de récurrence pour les feuilletages géodésiques ou plus généralement "géométriques".

Historique (dans l'ordre chronologique inverse!). La dernière question de récurrence ci-dessus, posé pour une sous-variété géodésique *individuelle*, au lieu d'un feuilletage, nous amène directement à la conjecture de Raghunathan, résolue récemment (1990) par M. Ratner (voir [6] pour un rapport sur la question). En effet le Théorème de Ratner entraîne l'inexistence de feuilletages géodésiques locaux, même C^0 . Cependant, il ne s'applique qu'aux feuilletages de dimension au moins 2, et tels que la variété ambiante *soit complète et de volume fini*. Le présent article reproduit les résultats de ma thèse (1985) énoncés dans le cas C^1 , utilisant des techniques très élémentaires par rapport à celles de Ratner.

2. RÉSULTATS

Le phénomène de récurrence des feuilletages géodésiques dégagé dans le présent article, permettant ainsi l'applicabilité des résultats de [21] (essentiellement le Théorème D, et aussi dans le cas analytique le Théorème 12.2), donne les résultats qui suivent:

2.1. Cas où V est à courbure négative et de volume fini

THÉORÈME A. *Soit V une variété localement symétrique à courbure négative et de volume fini. Soit \mathcal{F} un feuilletage géodésique local de V , localement Lipschitz (de dimension non triviale). Alors pour presque toute feuille de \mathcal{F} , presque toute géodésique tangente est incomplète.*

Par géodésique incomplète, on veut dire qu'elle explose dans V , c'est-à-dire que si $u \in T^1V$ est un vecteur tangent à cette géodésique alors $\phi^t(u)$ (ϕ^t étant le flot géodésique)

n'est pas défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit \bar{V} la complétion métrique de V et $\partial V = \bar{V} - V$ le bord de V . Le fait que la géodésique soit incomplète équivaut à dire que la projection de $\phi^t(u)$ dans V , appartient à ∂V pour un certain t (fini).

Par définition de feuilletage local on a le corollaire suivant:

THÉORÈME B. *Une variété complète localement symétrique à courbure négative et de volume fini n'admet pas de feuilletage géodésique local (de dimension non triviale) qui soit localement Lipschitz.*

Preuve (du Théorème A). Les preuves de la majorité des résultats de ce papier consiste à considérer le sous-ensemble invariant $N = T^1\mathcal{F}$ du flot géodésique (T^1V, ϕ) . Il s'agit précisément de voir, via la "rigidité" de [21], dans quelles mesures un tel ensemble invariant pourrait correspondre à un feuilletage local?

La partie N est σ - m -rectifiable pour $m = \dim V + \dim \mathcal{F} - 1$, au sens qu'elle est réunion dénombrable de parties m -rectifiables. Ceci signifie que chacune de ces parties est image par une application Lipschitz d'un borné de \mathbb{R}^m . Ces applications s'obtiennent simplement d'une trivialisations locale Lipschitz de $N = T^1\mathcal{F}$. Elles seront définies sur des parties bornées de \mathbb{R}^m , et ouvertes (ce qu'on n'impose pas dans la définition). Ces applications sont de plus dans notre cas des plongements.

Notons \mathcal{H}^m la mesure de Hausdorff m -dimensionnelle sur T^1V . La formule de l'aire classique [3], i.e. celle permettant de calculer la mesure de Hausdorff de l'image d'une application Lipschitz, montre que la restriction de \mathcal{H}^m à chacune des parties précédentes est une mesure finie (et non triviale). La mesure \mathcal{H}^m est donc σ -finie (et même de Radon) sur N .

On dira que N est σ - \mathcal{H}^m -rectifiable, pour indiquer ce dernier fait, en plus de la σ - m -rectifiabilité modulo un sous-ensemble \mathcal{H}^m négligeable. Il en va de même pour le sous-ensemble N_0 des points de N à ϕ -orbites complètes, qui est donc une partie (complètement) invariante du flot géodésique sur T^1V . Il est donc σ - \mathcal{H}^m -rectifiable, mais peut être, trivialement, au sens qu'il est simplement \mathcal{H}^m -négligeable. Il est facile de voir que le Théorème A équivaut justement à ce fait: N_0 est \mathcal{H}^m -négligeable.

Supposons le contraire. Remarquons d'abord que la projection de N_0 dans V , ne sera alors pas négligeable au sens de la mesure de Lebesgue sur V . Ceci découle comme précédemment de la formule de l'aire.

On démontre à la Section 3 (Théorème H), puisque V est de volume fini, que (N_0, ϕ) conserve une mesure finie équivalente à la restriction de \mathcal{H}^m à N_0 . On applique maintenant:

THÉORÈME 2 (Théorème D' de [21]). *Supposons V à courbure négative et N_0 une partie σ - \mathcal{H}^m -rectifiable invariante par le flot géodésique. Supposons que (N_0, ϕ) préserve une mesure finie équivalente à la mesure de Hausdorff. Alors il existe une suite dénombrable W_i de sous-variétés géodésiques dans V telle que N_0 soit de mesure totale dans la réunion des T^1W_i .*

Il découle de ce qui précède qu'il existe W_i telle que la projection de T^1W_i dans V , c'est-à-dire W_i , soit non-négligeable au sens de la mesure de Lebesgue sur V . Ceci entraîne évidemment qu'elle est ouverte dans V , et en particulier: $\dim W_i = \dim V = n$. Mais $\dim T^1W_i = m = n + \dim \mathcal{F} - 1$. Il en résulte que $\dim \mathcal{F} = n$, i.e. \mathcal{F} est de dimension triviale (\mathcal{F} est réduit à une seule feuille). \square

La preuve précédente s'adapte aux feuilletages locaux presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) différentiables. L'idée est succinctement la suivante. Supposons pour simplifier que $\dim \mathcal{F} = 1$ et que \mathcal{F} est orientable. Le feuilletage (U, \mathcal{F}) s'identifie donc

à une section $X:U \rightarrow T^1V$. Supposons X presque partout dérivable. Il est connu [3] qu'alors, il existe une suite de parties $U_n \subset U$, dont la réunion U' est de mesure totale dans U et telles que la restriction de X à U_n soit Lipschitz. La restriction N' de $T^1\mathcal{F}$ à U' , sera donc une partie $\sigma\text{-}\mathcal{H}^n$ -rectifiable (voir ci-dessus), invariante par le flot géodésique. L'invariance signifie ici que pour \mathcal{H}^n presque tout $x \in N'$, et presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi^t x \in N'$. C'est dans ce sens que l'invariance a été entendue dans [21] et en particulier au théorème D' de ce papier. La preuve précédente s'adapte bien à notre cas puisqu'en fait le Théorème H sur la conservation du volume s'étend au cas presque partout différentiable (Théorème I).

On pourra également abandonner la condition que le "support du feuilletage local soit ouvert". Précisons ici qu'une partie $U \subset V$ est dite \mathcal{H}^k -rectifiable si elle est $\sigma\text{-}\mathcal{H}^k$ -rectifiable (comme dans la preuve ci-dessus) et de plus de mesure de Hausdorff finie. La propriété de conservation de volume (Théorème H) se généralise aux feuilletages géodésique (au sens de V), à support dans une partie \mathcal{H}^k -rectifiable (voir 3.4.1 et Théorème I). La même démonstration que celle du Théorème A donne:

THÉORÈME C. *Soit V une variété localement symétrique à courbure négative et U une partie \mathcal{H}^k -rectifiable de V (par exemple une sous-variété C^1 de volume fini). Alors il n'existe pas de feuilletage (de dimension non triviale) de U , presque partout différentiable (par exemple localement Lipschitz) et telle que toute feuille soit complète, et géodésique dans V .*

2.2. Cas où V est à courbure négative et volume infinie

Soit \mathcal{F} un feuilletage géodésique local de V (qui est localement symétrique et à courbure négative comme on l'a supposée ci-dessus). Supposons V complète et pour simplifier et que le support de \mathcal{F} est connexe.

Une feuille de \mathcal{F} est localement symétrique à courbure négative, si $\dim \mathcal{F} \geq 2$. Il est connu, vu le caractère géodésique de \mathcal{F} , que ses feuilles sont localement isométriques entre elles [9]. Elles sont donc toutes modelées sur un même espace symétrique à courbure négative \tilde{F} .

Une feuille F de \mathcal{F} est donc quotient de \tilde{F} par un sous-groupe Γ de $\pi_1(V)$. Si Γ est non-trivial et n'est pas élémentaire parabolique, il contiendra un élément hyperbolique [15]. Il existera donc des géodésiques fermées (périodiques) dans F . Par conséquent, il n'y a qu'un nombre dénombrable de telles feuilles puisqu'il y a un nombre dénombrable de géodésiques fermées dans V .

Las autres feuilles seront appelées génériques. Elles sont soit simplement connexes, i.e. isométriques à \tilde{F} , soit leur groupe fondamental est élémentaire parabolique. Dans tous les cas, elles ont la même croissance (de volume) que \tilde{F} , i.e. le même comportement asymptotique de la fonction volume $v_x^F(r) = \text{Vol}(B^F(x, r))$ où $B^F(x, r)$ est la boule de F , de centre x et rayon r .

On dira que la croissance de V est (strictement) dominée par celle de F si pour un x de V , on a:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}(B^V(x, r))}{\text{Vol}(B^F(x, r))} = 0.$$

THÉORÈME D. *Soit V une variété localement symétrique complète à courbure négative. Soit \mathcal{F} un feuilletage géodésique local de V , de classe C^1 . Alors la croissance de V ne peut être dominée par celle d'une feuille générique de \mathcal{F} .*

Le cas hyperbolique “réel” (c’est-à-dire courbure constante = -1) s’énonce de façon explicite. Rappelons que la croissance de l’espace hyperbolique réel de dimension $d + 1$ est représentée par la fonction $u(r) = \exp dr$, i.e. $\text{Vol}(B^V(x, r))/\exp dr$ est borné, quand $r \rightarrow \infty$.

THÉORÈME E (Corollaire du Théorème D). *Soit V une variété hyperbolique complète à croissance dominée par $\exp(dr)$. Alors V n’admet pas de feuilletage géodésique local de dimension $d + 1$ et de classe C^1 .*

Preuve (du Théorème D). On démontre à la Section 4 (Théorème J) que sous l’hypothèse de l’absurde (du Théorème D), $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ est non errant (i.e. tous ses points sont non-errants). D’après ([21, Théorème D’]), qui est l’analogie du théorème D' , dans le cas non-errant, cela suffit pour en déduire que N correspond à une réunion dénombrable de sous-variétés géodésiques de V . La contradiction est la même que celle dans la preuve du Théorème A. \square

Remarque. On verra à la Section 4 qu’une estimation préliminaire semblable à celles de la Section 3, entraînera sous nos hypothèses que le feuilletage \mathcal{F} est non-errant. Cela veut dire qu’il n’y a pas d’ouvert \mathcal{F} -saturé où \mathcal{F} est topologiquement trivial. De là, déduire que le flot géodésique de \mathcal{F} est non-errant n’est pas une évidence. La Section 4.6 contient une discussion complémentaire sur ce fait dans le cas général.

2.3. Cas où V est à courbure non-positive

Soit G le groupe d’isométries de \tilde{V} , x_0 un point base dans \tilde{V} , K son groupe d’isotropie et $\pi: G \rightarrow G/K = \tilde{V}$, la projection. Soit $\mathcal{G} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k}$ la décomposition de Cartan de \mathcal{G} telle que \mathfrak{k} soit l’algèbre de Lie de K .

Soit H un sous groupe de G , connexe et fermé. Soit $f \in G$ et $x = \pi(f)$. Les H -orbites de x et f sont liées par: $\pi(H \cdot f) = H \cdot \pi(f) = H \cdot x = \pi(f(f^{-1}Hf)) = f(\pi(f^{-1}Hf))$. En d’autres termes, l’isométrie f envoie l’orbite du point base x_0 par $f^{-1}Hf$, sur l’orbite de x par H .

Soit \mathcal{H} , l’algèbre de Lie de H . On montrera dans la Section 5 la:

PROPOSITION. *L’orbite Hx_0 admet un feuilletage (éventuellement de dimension triviale) H -invariant dont les feuilles sont géodésiques dans \tilde{V} . La feuille de x_0 étant tangente à $\mathcal{H} \cap \mathfrak{p}$ (après identification de \mathfrak{p} à $T_{x_0}\tilde{V}$).*

La H -orbite d’un point x comme ci-dessus sera munie du feuilletage image par f , du feuilletage de l’orbite de x_0 déterminé par le groupe $f^{-1}Hf$.

On voit ainsi que \tilde{V} est partitionnée en sous-variétés géodésiques. Dans l’ouvert où la dimension de ces sous variétés (c’est-à-dire celle de $f^{-1}\mathcal{H}f \cap \mathfrak{p}$) est minimale, on a bien un feuilletage géodésique.

On a ainsi associé à tout sous-groupe H un feuilletage géodésique local de \tilde{V} . Il est d’ailleurs analytique.

Évidemment ce feuilletage peut être de dimension triviale. Voici deux exemples où il ne l’est pas:

(1) On prend: $G = \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$, $\tilde{V} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ (\mathbb{H}^2 étant l’espace hyperbolique à 2 dimensions) et $H = \{(g, g), g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})\}$, i.e. $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ plongé diagonalement. On a $\dim \mathcal{G} = 6$, $\dim \mathfrak{p} = \dim \tilde{V} = 4$ et $\dim \mathcal{H} = 3$, donc $\dim(f^{-1}\mathcal{H}f \cap \mathfrak{p}) \geq 1$. On verra dans ce qui

suit que la dimension du feuilletage local, c'est-à-dire la dimension minimale de $(f^{-1}\mathcal{H}f)\cap p$ est en fait égale à 1.

Ce feuilletage, de dimension non triviale n'est pas non plus "géométriquement trivial" au sens qu'il correspond à un facteur dans la décomposition $\tilde{V} = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, comme c'est le cas du feuilletage déterminé par le sous-groupe $H = \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \{1\}$.

Une description géométrique de ce feuilletage s'obtient de la façon suivante. Soit $(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ tel que x et y soient distincts. Soit $c(t)$ la géodésique de \mathbb{H}^2 joignant x et y : $c(0) = x$ et $c(T) = y$. Alors la feuille de (x, y) est la géodésique $(c(t), c(t + T))$. On voit en particulier que le support de ce feuilletage géodésique local est $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 -$ (la diagonale).

(2) Ici $G = \text{SL}(n + 1, \mathbb{R})$, $K = \text{SO}(n + 1)$ et $H = \text{SL}(n, \mathbb{R})$. On a: $\dim G = (n + 1)^2 - 1$, $\dim H = n^2 - 1$ et $\dim p = \dim G - \dim K = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1$.

On en déduit que $\dim(f^{-1}Hf \cap p)$ est au moins de l'ordre de $\frac{1}{2}n^2$ (pour tout f). Le feuilletage ainsi obtenu est donc de dimension non-triviale (pour n grand).

Il ne peut pas être "géométriquement trivial" puisque G est simple ou de façon équivalente puisque l'espace symétrique $\text{SL}(n + 1, \mathbb{R})/\text{SO}(n + 1)$ est irréductible. Remarquons enfin que les feuilles ne sont généralement pas plates puisque le rang de $\text{SL}(n + 1, \mathbb{R})$ est égal à n .

Feuilletages géodésiques locaux des variétés de volume fini. Les restrictions des feuilletages précédents à certains ouverts invariants peuvent déterminer des feuilletages locaux de variétés de volume fini, c'est-à-dire qu'ils se "projetent bien".

Considérons par exemple le premier exemple. Prenons $\pi_1(V) = \Gamma \times \Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$ où \mathbb{H}^2/Γ est une surface compacte. La diagonale Δ est une orbite de H . Les H -orbites voisines se projettent donc en 3-variétés compactes plongées dans V . Elles forment ainsi un feuilletage de dimension 3 d'un voisinage U de Δ . Notre feuilletage géodésique (de dimension 1) est un sous feuilletage du feuilletage précédent, et se projette donc bien dans $U - \Delta$.

En résumé, des feuilletages géodésiques locaux non-triviaux de variétés localement symétriques à courbure non-positive existent bien.

Il est naturel de se poser maintenant la question d'existence (et classification) de feuilletages globaux.

Les résultats de [21] sur les ensembles invariants des flots géodésiques entraînent qu'en général, un feuilletage géodésique local (localement Lipschitz) d'une variété de volume fini, est essentiellement "réunion" de feuilletages construits comme dans la proposition précédente. Toute la difficulté réside ensuite dans le fait que le groupe H en question n'est pas nécessairement partout le même.

Disons qu'un feuilletage géodésique (global) de V est *trivial* si son relèvement dans \tilde{V} s'obtient à l'aide de facteurs de la décomposition de de Rham de \tilde{V} .

On démontre à la Section 5 le:

THÉORÈME F. *Supposons \tilde{V} sans facteur plat et V complète et de volume fini. Alors tout feuilletage géodésique (global) analytique de V est trivial. En particulier V n'admet pas de feuilletage géodésique analytique (de dimension non triviale) si elle est localement irréductible (c'est-à-dire que \tilde{V} est irréductible).*

Cas plat. Ici les choses "se font à la main". Toutefois une description complète de ces feuilletages géodésiques (locaux ou globaux) est difficile à formuler. Le résultat suivant concerne le cas analytique.

THÉORÈME G. *Supposons que V est un tore plat de dimension n . Soit (U, \mathcal{F}) un feuilletage géodésique local analytique de V . Supposons U connexe. Alors, il existe un feuilletage \mathcal{L} de V par tores (fermés) parallèles entre eux de dimension m (c'est-à-dire que dans \tilde{V} , les relevées des feuilles de \mathcal{L} sont des d -plans affines parallèles) tel que $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{L}_x$ pour tout x de U . On a : $m < n$ à moins que toutes les feuilles de \mathcal{F} soient parallèles entre elles et denses (dans V).*

Remarque. On verra dans la démonstration de ce théorème qu'un feuilletage géodésique local, même de classe C^0 , est "réunion" de feuilletages du type décrit dans ce théorème. On donnera par contre un exemple de feuilletage (global) C^∞ qui n'est pas (globalement) du type indiqué.

3. CONSERVATION DU VOLUME

Soit V une variété localement symétrique à courbure non-positive (pas nécessairement complète).

Soit \mathcal{F} un feuilletage géodésique local, localement Lipschitz. Notons $N = T^1\mathcal{F}$, le fibré sur U de tous les vecteurs de T^1V , tangents aux feuilles de \mathcal{F} . Soit ϕ (ou ϕ^t) le flot géodésique sur T^1V . C'est un groupe à un paramètre local puisque V pourrait être incomplète. Par définition de feuilletage géodésique local, N est invariant par ϕ . Cela veut dire pour tout $x \in N$, si $\phi^t x$ existe (dans T^1V) alors $\phi^t x \in N$. Soit N_0 l'ensemble des points de N où $\phi^t x$ est défini pour tout t . Le feuilletage \mathcal{F} étant localement Lipschitz, N est donc réunion dénombrable de parties m -rectifiables avec $m = \dim V + \dim \mathcal{F} - 1$ [21]. Par mesure de Lebesgue sur N , on entendra la mesure de Hausdorff m -dimensionnelle. Le flot géodésique sur N ou N_0 sera simplement noté ϕ .

3.1. THÉORÈME H. *Supposons V de volume fini et N_0 de mesure de Lebesgue positive. Alors (N_0, ϕ) conserve une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue.*

Lorsque V est complète on a $N_0 = N$, d'où :

COROLLAIRE. *Le flot géodésique d'un feuilletage géodésique local d'une variété localement symétrique à courbure non-positive et de volume fini, conserve une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue.*

Remarque. Ce théorème n'est pas une conséquence directe du Théorème A de [20] sur la conservation du volume des ensembles invariants (de volume fini) des systèmes dynamiques autonomes. Il n'est pas non plus conséquence du Théorème C de [21]. En effet le volume de N pourrait *a priori* être infini même si celui de V est fini. Il est cependant vrai que l'idée des démonstrations est fondamentalement la même.

Avant d'entamer sa preuve, donnons un contre exemple à ce théorème lorsque V est localement homogène mais n'est pas localement symétrique (voir également 4.6).

On prend V , le fibré unitaire tangent d'une surface compacte S , à courbure constante égale à -1 . Pour \mathcal{F} on prend le feuilletage horocyclique (le feuilletage stable faible du flot géodésique).

On a $V = T^1\mathbb{H}^2/\Gamma$ où $\Gamma = \pi_1(S)$ et \mathbb{H}^2 est l'espace hyperbolique à 2 dimensions. Le fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$ s'identifie au groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et Γ à un sous-groupe discret cocompact.

Soit $\tilde{\mathcal{F}}$ le relevé de \mathcal{F} dans $T^1\mathbb{H}^2$. On munit $T^1\mathbb{H}^2$ d'une métrique telle que la projection $T^1\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ soit une submersion riemannienne dont l'horizontal est l'espace tangent à $\tilde{\mathcal{F}}$. La métrique le long des fibres s'obtient en les identifiant à un (même) cercle, grâce à l'action principale de $SO(2)$. Une telle métrique est homogène, en effet les isométries de \mathbb{H}^2 se relèvent en isométries pour cette métrique. De plus $\tilde{\mathcal{F}}$ géodésique au sens de cette métrique car clairement, une holonomie de l'orthogonal, i.e. les fibres, induit une isométrie entre des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$.

La projection identifie isométriquement toute feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ à \mathbb{H}^2 . L'espace des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ s'identifie au cercle à l'infini S^∞ .

Soit $y \in S^\infty$, $\tilde{\mathcal{F}}_y$ s'identifiant à \mathbb{H}^2 , son espace de géodésiques s'identifie alors à $S^\infty \times S^\infty - \Delta$ ($\Delta =$ diagonal) L'espace des orbites du flot géodésique de $T^1\tilde{\mathcal{F}}$ s'identifie ainsi à $(S^\infty \times S^\infty - \Delta) \times S^\infty$. L'ensemble non errant du flot géodésique de $T^1\tilde{\mathcal{F}}$ est la projection de l'ensemble $\tilde{\Omega}$ des points non errants de l'action de Γ sur $(S^\infty \times S^\infty - \Delta) \times S^\infty$.

AFFIRMATION. *On a:*

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y, z) \in S^\infty \times S^\infty \times S^\infty \text{ tels que } x = z \text{ ou } y = z \text{ et } x \neq y\}.$$

Preuve. Le fait que $\tilde{\Omega}$ contient l'ensemble du second membre se déduit du fait que le flot géodésique de T^1S est non-errant (car S est compacte). Pour l'inclusion inverse on utilise l'.

AFFIRMATION (folklore). *Un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$ agit proprement sur l'ensemble des triplets de points distincts de S^∞ (i.e. un compact de cet espace coupe un nombre fini de ses itérés par le sous-groupe).* □

On voit ainsi que l'ensemble non-errant du flot géodésique de $T^1\tilde{\mathcal{F}}$ s'identifie à deux copies de T^1S , qui est évidemment maigre dans $T^1\tilde{\mathcal{F}}$. En particulier $(T^1\tilde{\mathcal{F}}, \phi)$ ne conserve pas de mesure équivalente à la mesure de Lebesgue.

3.2. Cas où $\dim \mathcal{F} = 1$

Supposons \mathcal{F} de dimension un et orientable. Considérons un groupe à un paramètre (local) ψ^t engendré par un champ unitaire X tangent à \mathcal{F} . C'est une section localement Lipschitz du fibré unitaire tangent $\pi: T^1V \rightarrow V$. Si ϕ est le flot géodésique sur T^1V , alors $\pi\phi^t X = \psi^t$. Il en résulte que si un point x de $U = \text{support}(\mathcal{F})$, est un point de différentiabilité de X , alors x est un point de différentiabilité de ψ^t pour tout t . Soit $Y \in T_x V$. Par définition $\bar{Y}(t) = D_x \psi^t(Y)$ est un champ de Jacobi le long de la géodésique $\psi^t(x)$.

La variété V étant localement symétrique on peut trouver la forme générale explicite de $\bar{Y}(t)$ puisqu'il est solution d'une équation de la forme $\bar{Y}'' = B\bar{Y}$ où B est une matrice symétrique, indépendante de t , mais dépendante en général de $X(x)$ ([20], section 3).

Quant au Jacobien $j_x(t)$ de $D_x \psi^t$, il se calcule comme le déterminant de Gramm:

$$j_x(t) = \sqrt{\det \langle \bar{Y}_i(t), \bar{Y}_j(t) \rangle_{ij}}$$

où les conditions initiales $Y_i = \bar{Y}_i(0)$, forment une base orthonormée de $T_x V$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de B , alors $j_x^2(t)$ s'écrit comme un polynôme en $\exp \sqrt{\lambda_i} t$, où on convient de prendre $\exp \sqrt{\lambda_i} t = t$ pour $\lambda_i = 0$. Il suffit pour le voir de résoudre l'équation $Y'' = BY$.

Notons justement \mathcal{B} l'algèbre des fonctions de \mathbb{R} , engendrée par les fonctions $t, \exp \omega t, \omega$ étant un réel quelconque, et \mathcal{A} l'ensemble des racines carrées des éléments positifs de \mathcal{B} .

La section X identifie $U = \text{support } \mathcal{F}$ à N . La mesure promise va être simplement, comme le confirmera le lemme suivant, l'image par X de la mesure riemannienne sur U . Remarquons qu'elle ne coïncide à priori pas avec la mesure de Hausdorff sur N , mais qu'elle lui est bien équivalente car X est localement Lipschitz. Rappelons pour cela que le théorème de Rademacher dit que X est Lebesgue presque partout différentiable.

LEMME. Soit ψ^t un groupe à un paramètre local de N . Soit μ une mesure finie sur N telle que $\psi^t \mu = j_x(t) \mu$ où $j_x \in \mathcal{A}$ pour μ -presque tout x de N . Soit N_0 l'ensemble des points de N où $\psi^t x$ est défini pour tout t . Alors ψ^t conserve la restriction de μ à N_0 .

(Notons que généralement, on considère des images directes de mesures, par des applications mesurables. Ici on ne manipule que des difféomorphismes, auquel cas, il y a équivalence entre la théorie covariante et la théorie contravariante).

Preuve. La seule propriété des éléments de \mathcal{A} qu'on utilisera pour cette preuve est:

3.2.1. Un élément j de \mathcal{A} vérifie: Si j n'est pas constant alors ou bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} j(t) = \infty \quad \text{ou bien} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} j(t) = \infty.$$

Soit N_1 une partie mesurable de N_0 où $\lim_{t \rightarrow +\infty} j_x(t) = \infty$.

Pour a réel soit: $A(n, a) = \{x \in N_1 / j_x(t) \geq a \text{ pour tout } t \geq n\}$.

Pour tout a ; on a: $N_1 \subset \bigcup_n A(n, a)$. C'est une réunion croissante. Il existe donc n tel que $\mu(A(n, a)) \geq \frac{1}{2} \mu(N_1)$. Par définition $\mu(\psi^n(A(n, a))) \geq a \mu(A(n, a)) \geq \frac{1}{2} a \mu(N_1)$. Donc $\mu(N) \geq \frac{1}{2} a \mu(N_1)$. Il s'ensuit que $\mu(N_1) = 0$ puisque a est arbitraire.

De cette façon on montre que presque partout dans N_0 , j_x est constant. Donc $j_x \equiv j_x(0) = 1$, c'est-à-dire que ψ^t préserve μ . □

3.3. Cas général: $\dim \mathcal{F} > 1$

Notons comme toujours $N = T^1 \mathcal{F}$ et soit $p: N \rightarrow U = \text{support } (\mathcal{F})$ la projection. Soit m la mesure de Lebesgue de U . Considérons sur N , la mesure μ "image réciproque" de m définie comme suit. Pour $F \subset N$:

$$\mu(F) = \int_U \mathcal{H}^d(F \cap p^{-1}(x)) dm(x)$$

où $d = \dim \mathcal{F} - 1$ et \mathcal{H}^d est la mesure de Hausdorff correspondante. Remarquons que lorsque \mathcal{F} est trivial: $\text{codim } (\mathcal{F}) = 0$, alors μ est la mesure de Liouville sur $T^1 V$.

C'est cette mesure μ qui répondra à notre théorème. Il suffit pour le montrer d'appliquer la proposition suivante et le lemma précédent comme dans le cas $\dim \mathcal{F} = 1$.

PROPOSITION. V étant une variété localement symétrique à courbure non-positive (pas nécessairement de volume fini). Si ϕ^t note le flot géodésique sur N , alors $\phi^t \mu = j_u(t) \mu$ où $j_u \in \mathcal{A}$ (\mathcal{A} étant défini dans 3.2).

Preuve. Soit $x \in V$ et $u \in T^1 V$. On va tout transporter parallèlement en x (dans le même esprit que [20]) le long de la géodésique déterminée par u . L'orthogonal dans $T_u(T^1 V)$ au flot géodésique ϕ se scinde en: horizontal + vertical = $\mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. Chacun d'eux s'identifie à l'orthogonal E à u dans $T_x V$.

Soit $(h, v) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \approx E \oplus E$. Après transport parallèle, $D\phi'(h, v)$ s'identifie à $(h(t), h'(t)) \in E \oplus E$ où $h(t)$ est solution de l'équation de Jacobi $h'' = Ah$ avec $Ah = R(u, h)u$, R étant le tenseur courbure. De plus $h(t)$ vérifie les conditions initiales $h(0) = h$ et $h'(0) = v$. Soit $E' = E \cap T^1\mathcal{F}_x$. Alors l'orthogonal à ϕ dans $T^1\mathcal{F}_x$ s'identifie à $E' \oplus E' \subset E \oplus E$.

AFFIRMATION 1. *$D\phi'$ conserve $E' \oplus E'$ ainsi que $(E')^\perp \oplus (E')^\perp$ (après transport parallèle) où $(E')^\perp$ est l'orthogonal dans E à E' . (Remarquons qu'en fait $(E')^\perp \oplus (E')^\perp$ est précisément l'orthogonal à $E' \oplus E'$ dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$, lorsque T^1V est muni de sa métrique naturelle).*

Preuve. Le caractère géodésique de \mathcal{F}_x entraîne que l'opérateur de courbure A conserve E' . Or A est symétrique donc conserve également $(E')^\perp$. Par conséquent si un champ de Jacobi $h(t)$ est à conditions initiales $h(0)$ et $h'(0)$ dans E' (resp. $(E')^\perp$); alors $h(t) \in E'$ (resp. $(E')^\perp$) pour tout t . \square

On démontre sans difficulté l'affirmation suivante.

AFFIRMATION 2. *Soit $p: T^1\mathcal{F} \rightarrow U = \text{support}(\mathcal{F})$, la projection et $\alpha = P^*(dv)$ où dv est la forme volume de V . Soit β la forme volume des fibres de $T^1\mathcal{F}$. Alors la forme $\alpha \wedge \beta$ détermine précisément la mesure μ .*

Considérons maintenant une base orthonormée $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_{2d}$, de l'orthogonal à ϕ dans T_uN telle que: $A_i \in (E')^\perp \oplus (E')^\perp$ et $B_i \in E' \oplus E'$ ($k = \text{codim } \mathcal{F}$ et $d = \text{dim } \mathcal{F} - 1$).

Écrivons $A_i = (a_i, a'_i)$ et $B_i = (b_i, b'_i)$. Ainsi $D\phi'(A_i)$ et $D\phi'(B_i)$ s'identifient respectivement à $A_i(t) = (a_i(t), a'_i(t))$ et $B_i(t) = (b_i(t), b'_i(t))$ où $a_i(t)$ et $b_i(t)$ sont les champs de Jacobi correspondants. Si n est dimension de V alors:

(i) Si $C_i(t) = (c_i(t), c'_i(t))$, $i = 1, \dots, n-1$, sont $(n-1)$ champs extraits des champs précédents, alors α appliquée à $(\phi, C_1(t), \dots, C_{n-1}(t))$ vaut exactement le déterminant de Gramm des composantes horizontales: $\alpha(\phi, C_1(t), \dots, C_{n-1}(t)) = \sqrt{\det(\langle c_i(t), c_j(t) \rangle)_{ij}}$.

(ii) Soient maintenant $C_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, d champs extraits des champs considérés. Si l'un des champs est de la forme A_i , alors $\beta(C_1(t), \dots, C_d(t)) = 0$. La raison est que $A_i(t)$ est orthogonal à $E' \oplus E'$ et en particulier à $0 \oplus E'$ qui est l'espace tangent des fibres de $T^1\mathcal{F}$. Si tous les $C_i(t)$ sont de la forme $B_i(t)$ alors: $\beta(C_1(t), \dots, C_d(t)) = \sqrt{[\det(\langle c'_i(t), c'_j(t) \rangle)_{ij}]}$. (La racine du déterminant des composantes verticales.)

Fin de la preuve de la proposition. Comme dans 3.2, on voit que chacun des déterminants entrant en jeu s'écrit comme un polynôme en t et $\exp \omega t$, pour certains ω . Donc: $j_u(t) = \alpha \wedge \beta(A_1(t), \dots, A_k(t), B_1(t), \dots, B_{2d}(t)) \in \mathcal{A}$. \square

3.4. Généralisations

Beaucoup de conditions du Théorème H peuvent être affaiblies:

3.4.1. Feuilletages supportés par des parties \mathcal{H}^k -rectifiables. Dans la preuve du Théorème H, le fait que \mathcal{F} soit défini sur un ouvert n'avait aucune importance (sauf pédagogique). On peut en effet supposer que U est simplement une partie \mathcal{H}^k -rectifiable (pour un

certain k). On abandonne dans ce cas la condition de finitude du volume de V , puisqu' on suppose dans la définition de la \mathcal{H}^k -rectifiabilité que U est de mesure de Hausdorff k -dimensionnelle finie.

3.4.2. Complétude. Avec les notations de la preuve précédente, il est possible de construire une mesure μ' équivalente à la mesure finie μ sur N (pas seulement N_0) et qui soit ψ' -invariante. L'invariance ici signifie que pour toute partie mesurable F de N on a $\mu'(\psi^t(F)) = \mu'(F)$ tant que ψ^t est défini dans F (ou en d'autres termes: $(\psi^t \mu' - \mu')/t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$). l'idée est simplement la suivante. Supposons pour simplifier que \mathcal{F} est de dimension 1 et reprenons les notations de 3.2. Pour $x \in U$, notons $T^+(x)$ (resp. $T^-(x)$) le dernier temps positif (resp. négatif) d'existence de $\psi^t(x)$. On définit alors $\mu'' = f\mu$, avec $f(x) = 1$ si l'orbite est complète (i.e. $T^+(x) = +\infty$ et $T^-(x) = -\infty$); $f(x) = (j_x(T^+(x)))^{-1}$ si $T^+(x) < +\infty$; et $f(x) = (j_x(T^-(x)))^{-1}$ si $T^-(x) > -\infty$. La mesure μ'' est invariante. On peut la rendre finie en la multipliant par une fonction invariante assez petite. La mesure μ' ainsi obtenue sera une mesure finie invariante.

3.4.3. Courbure quelconque. Le Théorème H reste vrai pour les variétés localement symétriques à courbure quelconque (pas nécessairement non-positive). Dans notre raisonnement (3.2), il faut considérer l'algèbre \mathcal{B} des fonctions du type $\exp \omega t$ où ω est cette fois un complexe quelconque. La propriété 3.2.1 disant qu'une fonction de \mathcal{A} tend vers l'infini quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, n'est plus vraie. Cependant la "quasi-périodicité" des fonctions du type $\exp \omega t$, pour $\omega \in \sqrt{-1} \mathbb{R}$, garantit aux éléments de \mathcal{A} un comportement à l'infini "contrôlable". La finitude du volume permet comme dans 3.2 de chasser du Jacobien j_x toutes les fonctions $\exp \omega t$, pour ω réel. Ce Jacobien est donc combinaison de fonctions de la forme $\exp \omega t$, pour $\omega \in \sqrt{-1} \mathbb{R}$. Une moyennisation fera alors l'affaire, comme dans le cas du Théorème A de [20].

3.4.4. Régularité. Comme on l'a remarqué avant l'énoncé du Théorème C (Section 2), on peut simplement supposer que \mathcal{F} est presque partout différentiable.

3.4.5. Ces quatre dernières extensions nous donnent:

THÉORÈME I. Soit \mathcal{F} un feuilletage d'une partie \mathcal{H}^k -rectifiable (par exemple une sous variété C^1 de volume fini) d'une variété V , localement symétrique. Supposons \mathcal{F} presque partout différentiable (par exemple localement Lipschitz) et à feuilles géodésiques (dans V). Alors le flot géodésique sur $T^1 \mathcal{F}$ conserve une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue.

3.4.6. Feuilletages ombilics "généralisés". Le Théorème I se généralise à une classe plus large de feuilletages géométriques: les feuilletages ombilics "généralisés", qui se définissent comme suit. Soit V une variété riemannienne et \tilde{V} son revêtement universel. Supposons pour simplifier que V est complète. Soit G le groupe d'isométries de \tilde{V} . Une sous-variété \tilde{F} de \tilde{V} sera dite ombilic au sens généralisé si elle est orbite d'un sous-groupe connexe H de G : $\tilde{F} = Hx$, pour un certain x . On dira qu'une sous-variété F de V est ombilic si elle est projection dans V d'une sous-variété ombilic de \tilde{V} . On dira que F est une courbe ombilic si de plus $\dim F = 1$. Les sous-variétés géodésiques et en particulier les géodésiques, des

variétés localement symétriques sont ombilics (ce n'est pas le cas des variétés localement homogènes générales).

Construisons maintenant le "flot ombilic" de V qui agira sur un certain espace SV . On le définit d'abord pour \tilde{V} , et il passera naturellement à V . Considérons l'espace $S\tilde{V}$ des courbes $c: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{V}$, telles que $c(s) = g^s x$, pour un certain x de \tilde{V} et un certain groupe à un paramètre g^s de G . On suppose de plus (pour normaliser) que $g^s = \exp s\alpha$, où α est un élément de norme 1 de l'algèbre de Lie de G , munie d'une norme fixé, mais quelconque. On a une évaluation $e: S\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$, $e(c) = c(0)$. Elle est à fibre compacte (à cause de notre normalisation), et est en général une fibration localement triviale en dehors d'un certain lieu singulier. Elle est (partout) une fibration localement triviale lorsque \tilde{V} est homogène. Le flot ombilic sur $S\tilde{V}$ se définit maintenant par: $\tilde{\phi}^t(c)(s) = c(s + t)$.

Le groupe G agit sur $S\tilde{V}$. Son action est par définition transitive sur toute orbite de $\tilde{\phi}$. On a donc au sens de [20] un flot autonome (Voir section 3.6 de [20]). Tout passe au quotient et on obtient donc un flot autonome (SV, ϕ) .

Le Théorème A de [20] sur la conservation du volume qui dit que la restriction de ce flot à toute sous-variété C^1 invariante de volume fini, conserve une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue, s'applique donc bien.

On a de plus comme précédemment la généralisation suivante aux sous-ensembles invariants définis par des feuilletages ombilics.

Un feuilletage local \mathcal{F} de V est dit ombilic si toutes ses feuilles sont ombilics. Si \mathcal{F} est de dimension supérieur à 1, on le désingularise en $S\mathcal{F}$, qui n'est rien d'autre que les points des orbites de ϕ , dont la projection dans V est (entièrement) contenue dans une feuille de \mathcal{F} . C'est par définition un sous-ensemble invariant de (SV, ϕ) .

En définitif, le résultat "maximal" de conservation du volume qu'on peut démontrer par les méthodes développées ici est le suivant:

THÉORÈME I. *Soit \mathcal{F} un feuilletage d'une partie \mathcal{H}^k -rectifiable d'une variété riemannienne V . Supposons \mathcal{F} localement Lipschitz et à feuilles ombilics au sens généralisé (dans V). Alors $(S\mathcal{F}, \phi)$ conserve une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue.*

Notons cependant, qu'en dehors du cas des variétés localement symétriques, notre notion de sous-variété ombilic ici ne coïncide pas avec celle de sous-variété ombilic en géométrie riemannienne. Notre définition ci-dessus est faite de telle façon à en dériver un flot autonome comme ci-dessus, et par suite un phénomène de conservation de volume (voir [20]).

4. NON-ERRANCE

Soit V une variété localement symétrique et (U, \mathcal{F}) un feuilletage géodésique local de V . On suppose pour simplifier que U est connexe. Rappelons (voir également 4.6) qu'un point est non-errant par un flot, si tout voisinage de ce point contient des points qui y reviennent sous l'action du flot. Le flot lui-même est non errant si tous ces points le sont, i.e. il n'y a pas de transversale au flot, qui soit coupée au plus une fois par toute orbite. Le résultat principal de cette partie est le suivant:

THÉORÈME J. *Supposons \mathcal{F} localement Lipschitz. Supposons les feuilles de \mathcal{F} complètes (tel est le cas si V est complète, par définition de feuilletage géodésique local) et à courbure négative. Supposons que la croissance de V est (strictement) dominée par celle du revêtement*

universel d'une feuille de \mathcal{F} (ce revêtement universel est le même pour toutes les feuilles car \mathcal{F} est géodésique [9]). Alors le flot géodésique de \mathcal{F} est non errant.

4.1 Idée de la preuve

La preuve se divise en deux parties:

- (i) Une estimation de la croissance du volume de certains flots adaptés à $\tilde{\mathcal{F}}$ (le relevé de \mathcal{F} dans \tilde{V}).
- (ii) A partir de cela, une interprétation géométrique de la condition de croissance du volume.

Chacune des deux étapes s'illustre mieux dans un cas particulier.

4.1.1. Un cas particulier de la première étape: $\dim \mathcal{F} = 1$. Il est vrai qu'ici les feuilles ne sont pas à courbure négative. Le résultat reste néanmoins vrai. La condition du théorème est évidemment remplie lorsque V est de volume fini. On a démontré à la Section 3 qu'alors le flot déterminé par \mathcal{F} (supposé orientable!) conserve une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue.

Lorsque V n'est pas de volume fini, mais vérifie une condition de croissance comme au théorème J , \mathcal{F} ne conservera pas nécessairement le volume mais sera "conservatif". Plus précisément, par la même méthode de la Section 3, on montre: si $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Vol}(B^r(x, r))/r = 0$ (pour un point x de V); alors le flot déterminé par \mathcal{F} est conservatif. Cela veut dire que dans toute partie mesurable non-négligeable, il existe une orbite revenant une infinité de fois dans cette partie. C'est évidemment plus fort que la non errance (qui en est l'équivalent topologique).

4.1.2. Un cas particulier de la deuxième étape: $\text{codim } \mathcal{F} = 0$. Le théorème s'énonce dans ce cas: si la croissance de V est dominée par celle de \tilde{V} , alors le flot géodésique de V est non-errant. C'est un fait simple qui se démontre classiquement comme suit. Supposons le contraire, cela veut dire que le domaine de discontinuité $D_\Gamma = S^\infty - L_\Gamma$ est non-vide, où $\Gamma = \pi_1(V)$ et L_Γ est son ensemble limite dans la sphère à l'infini S^∞ [2]. Il est connu que Γ agit totalement discontinument dans $\tilde{V} \cup D_\Gamma$ [2]. Soit z un point de D_Γ et U un voisinage de z dans $\tilde{V} \cup D_\Gamma$, disjoint de tous ses itérés par Γ . Soit x un point de $U \cap \tilde{V}$. Il existe un cône C_x de sommet x tel que $C_x \subset U$. Il est connu que $C_x \cap B(x, r)$ possède un volume "proportionnel" à celui de $B(x, r)$: il existe α tel que $\text{Vol}(C_x \cap B(x, r)) \geq \alpha \text{Vol} B(x, r)$, pour tout r . Notons x' la projection de x dans V et $B^V(x', r)$ la boule de V , projection de $B(x, r)$. Par définition de U , $C_x \cap B(x, r)$ s'injecte dans $B^V(x', r)$. Donc $\text{Vol} B^V(x', r) \geq \alpha \text{Vol} B(x, r)$. Contradiction avec l'hypothèse que V croît (strictement) moins vite que \tilde{V} . \square

4.1.3. Plan de la preuve. On va d'abord donner une autre preuve de 4.1.2 ($\text{codim } \mathcal{F} = 0$) qui s'adaptera au cas général ($\text{codim } \mathcal{F}$ quelconque). On reviendra par la suite à la "première étape" d'estimation du volume pour voir comment imiter cette preuve du cas particulier, $\text{codim } \mathcal{F} = 0$.

4.2. Une preuve (géométrique) du théorème lorsque $\text{codim } \mathcal{F} = 0$

Pour $x \in \tilde{V}$, notons $\exp_x: T_x^1 \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$, l'application exponentielle en x . Soit v un vecteur unitaire en x . Notons $C'(v, t, \alpha)$, le cône d'angle α autour de v et de "longueur" t .

$$C'(v, t, \alpha) = \{\exp_x u, u \in T_x V / \sphericalangle(u, v) \leq \alpha \text{ et } \|u\| \leq t\}.$$

Ici $\| \cdot \|$ note la norme dans $T_x V$ et $\sphericalangle(u, v)$ l'angle entre u et v . Notons $C(v, t, \alpha)$ le "cône tronqué": $C(v, t, \alpha) = C'(v, t + 1, \alpha) - C'(v, t, \alpha)$.

Définition. On dira que deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont proportionnelles s'il existe une constante c telle que $c^{-1}g(t) \leq f(t) \leq cg(t)$ pour t grand.

AFFIRMATION 1. *Le volume de $C(v, t, \alpha)$ est proportionnel à celui de $B(x, t)$.*

Preuve. La croissance de \tilde{V} étant exponentielle, on en déduit que le volume de $B(x, t + 1) - B(x, t)$ est proportionnel à celui de $B(x, t + 1)$.

L'espace symétrique \tilde{V} étant à courbure négative, il est donc isotrope c'est-à-dire que tous les vecteurs unitaires sont congrus modulo le groupe d'isométries de \tilde{V} . Les cônes tronqués de même "longueur" t et même angle α ont donc tous un même volume. On recouvre $B(x, t + 1) - B(x, t)$ par un nombre fini (dépendant de α et $\dim V$) de tels cônes tronqués. Le volume de chacun d'eux est donc proportionnel à $Vol B(x, t)$. □

AFFIRMATION 2. *Pour t grand, il existe $\gamma = \gamma_t \in \pi_1(V)$ et $y = y_t \in C(v, t, \alpha)$ tels que $y' = \gamma(y) \in C(v, t, \alpha)$ et $d(x, \gamma^{-1}(x)) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$.*

Preuve. La condition sur la croissance de V entraîne d'après l'affirmation 1, que $C(v, t, \alpha)$ ne peut s'injecter dans V pour t grand. On en déduit l'existence de γ et y appartenant aux ensembles considérés. A vrai dire la condition de croissance entraîne l'existence de "beaucoup" de tels γ et y . On peut ainsi choisir un γ tel que $d(x, \gamma^{-1}(x)) \rightarrow \infty$ puisque $\pi_1(V)$ est discret. □

4.2.1. Notations. Notons $z = \gamma^{-1}(x)$, (t étant fixé) et u (resp. u') le vecteur unitaire tangent en z à la géodésique orientée xz (resp. zy). Notons enfin $u'' = \gamma u'$.

AFFIRMATION 3. *On a:*

$$| \sphericalangle(u, u') - \sphericalangle(\gamma u, v) | \leq \sphericalangle(u'', v) \leq \alpha.$$

Preuve. On a $\sphericalangle(\gamma u, \gamma u') = \sphericalangle(u, u')$. Or $u'' = \gamma u'$ est le vecteur unitaire tangent en x à xy' (car $\gamma(z) = x$ et $\gamma(y) = y'$). Maintenant $y \in C(v, t, \alpha)$. Donc $\sphericalangle(u, u'') \leq \alpha$. Donc $| \sphericalangle(\gamma u, u'') - \sphericalangle(\gamma u, v) | \leq \sphericalangle(u'', v) \leq \alpha$. □

4.2.2. Calcul d'angles

AFFIRMATION 4. *Les angles $\sphericalangle(xy, xz)$ et $\sphericalangle(zx, zy)$ tendent vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. En particulier $\liminf \sphericalangle(\gamma y, v) \geq \pi - \alpha$ quand $t \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire que $\limsup \sphericalangle(\gamma u, -v) \leq \alpha$ quand $t \rightarrow \infty$).*

Preuve. Considérons le triangle $\Delta = xyz$. Il est "presque isocèle" au sens que ses côtés sont presque égaux. En effet $y \in C(v, t, \alpha)$, donc $t \leq |xy| \leq t + 1$ où $|xy|$ note la longueur de xy . De même $y = \gamma^{-1}(y') \in \gamma^{-1}C(v, t, \alpha)$, car $y' \in C(v, t, \alpha)$. Or $\gamma^{-1}C(v, t, \alpha) = C(\gamma^{-1}v, t, \alpha)$. On a $\gamma^{-1}v \in T_z^1 \tilde{V}$, donc $t \leq |zy| \leq t + 1$. On en déduit que $||yz| - |yx|| \leq 1$.

La preuve de l'affirmation sera achevée quand on aura démontré la:

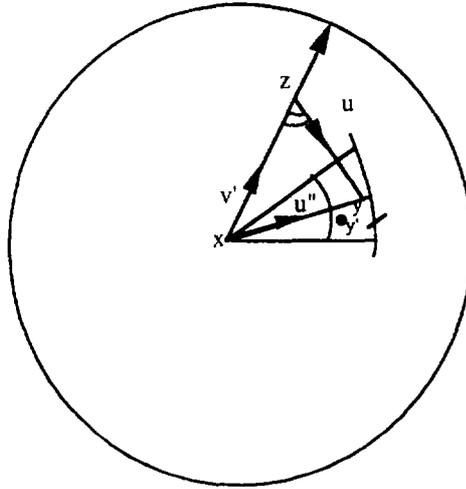


Fig. 1.

PROPOSITION. Soit $\Delta = ABC$ un triangle dans une variété complète simplement connexe à courbure inférieure à une constante négative. Supposons que les deux côtés a et b sont presque égaux, c'est-à-dire que $|a - b| \leq 1$. Alors les angles opposés \hat{A} et \hat{B} tendent vers 0 lorsque tous les côtés du triangle tendent vers l'infini.

Preuve. Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer la proposition pour l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . En effet le théorème de comparaison de Toponogov affirme que les angles de Δ sont plus petits que leurs homologues du triangle de mêmes côtés dans l'espace hyperbolique à courbure $-c$, si $-c$ majore la courbure de notre variété.

Le triangle de \mathbb{H}^n étant inclus dans un 2-plan géodésique, on se remène donc au cas du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 . La preuve dans ce dernier cas est standard. \square

4.2.3. Interprétation dynamique (Fig. 1).

Notations. Notons $\pi: T^1\tilde{V} \rightarrow T^1V$ la projection et v' le vecteur unitaire tangent à xz . Notons ϕ^t (resp. $\tilde{\phi}^t$) de flot géodésique sur T^1V (resp. $T^1\tilde{V}$). Soit $T = d(x, z)$, alors $\tilde{\phi}^T(v') = u$. Donc $\phi^T(\pi(v')) = \pi(\tilde{\phi}^T(v')) = \pi(u) = \pi(\gamma u)$.

D'après l'affirmation 4: $\angle(\pi(v), \pi(v')) = \angle(v, v')$ est proche de α . De même $\angle(\phi^T(\pi(v')), -\pi(v)) = \angle(\gamma u, -v)$ est proche de α .

En d'autres termes, étant donné $\pi(v) \in T^1V$, il existe $\pi(v')$, un vecteur α -proche et un temps grand T , tel que $\phi^T(\pi(v'))$ soit α proche de $-\pi(v)$.

Il y a maintenant plusieurs façons de conclure que (T^1V, ϕ) est non-errant. En voici une: Notons les ε -voisinage par O_ε . Considérons $\phi^T(O_\alpha(\pi(v))) \cap O_\alpha(-\pi(v))$. C'est un voisinage de $\phi^T(\pi(v'))$, donc contient un ε -voisinage de $\phi^T(\pi(v'))$ pour un certain $\varepsilon \leq \alpha$. Ce voisinage contient donc un vecteur w pour lequel il existe un temps grand T' tel que $\phi^{T'}(w) \in O_\varepsilon(-\phi^T(\pi(v')))$ (on applique une deuxième fois l'affirmation 4). On a donc:

$$\begin{aligned} d(\phi^{T'}(w), \pi(v)) &\leq \varepsilon + d(-\phi^T(\pi(v')), \pi(v)) \\ &\leq \varepsilon + d(\phi^T(\pi(v')), -\pi(v)) \\ &\leq \varepsilon + \alpha \leq 2\alpha. \end{aligned}$$

Or $w \in \phi^T(O_x(\pi(v))) \cap O_x(-\pi(v))$. Il existe donc $w' \in O_x(\pi(v))$ tel que $w = \phi^T(w')$. En résumé, il existe w', α proche de $\pi(v)$ tel que $\phi^{T+T'}(w') (= \phi^T w)$ soit 2α -proche de $\pi(v)$. Le réel positif α étant arbitraire, on en déduit que $\pi(v)$ est non-errant.

Le flot géodésique est donc non-errant. □

4.3. Croissance du volume. Première étape de la preuve dans le cas général

Retournons maintenant à la première étape de la preuve, permettant de ramener la preuve du Théorème J à 4.2.

Soient $(\tilde{U}, \tilde{\mathcal{F}})$ le relèvement de \mathcal{F} dans \tilde{V} , $x_0 \in \tilde{U}$, τ une petite transversale à $\tilde{\mathcal{F}}$ contenant x_0 et $v_0 \in T_{x_0}^1 \tilde{\mathcal{F}}$.

On prolonge v_0 de façon Lipschitz en une section de $T^1 \tilde{\mathcal{F}}/\tau : x \in \tau \rightarrow v(x) \in T_x \tilde{\mathcal{F}}$, avec $v(x_0) = v_0$. On construit à l'aide de ce prolongement des cônes et cônes tronqués comme dans 4.2: $C(v, t, \alpha) = \{\exp_x u/u \in T_x \tilde{\mathcal{F}}, \angle(u, v(x)) \leq \alpha \text{ et } |u| \leq t\}$ et de même: $C(v, t, \alpha) = C(v, t + 1, \alpha) - C'(v, t, \alpha)$.

Le résultat principal de cette partie est le suivant (vrai pour tout feuilletage local de \tilde{V} même s'il n'est pas le relevé d'un feuilletage d'une variété vérifiant la condition de croissance).

4.3.1. PROPOSITION. *Notons $g(t)$ le volume d'une boule de rayon t dans \tilde{F} et pour une section v , notons $f(v, t)$ le volume de $C(v, t, \alpha)$ (α étant fixé). Alors pour tout v_0 , on a soit, $f(v, t)$ est au moins proportionnel à $g(t)$ pour toute section v prolongeant v_0 ; soit $f(-v, t)$ est au moins proportionnel à $g(t)$ pour toute section v prolongeant v_0 . En d'autres termes, les sections v prolongent v_0 , vérifient toutes, soit, $\liminf f(v, t)/g(t)$ est positive, soit $\liminf f(-v, t)/g(t)$ est positive.*

Preuve. Considérons le semi-flot radial centré en τ et adapté à $\tilde{\mathcal{F}}$, noté ψ^t , défini comme suit:

$$\psi^t(\exp_x su) = \exp_x(s + t)u, \text{ pour } u \in T_x^1 \tilde{\mathcal{F}} \text{ et } x \in \tau, t > 0.$$

C'est un semi-flot singulier en τ . La restriction de ψ^t à une feuille $\tilde{\mathcal{F}}_x$ est le semi-flot radial de $\tilde{\mathcal{F}}_x$ centré en x . Notons le F^t . La croissance de F^t , c'est-à-dire, $\det D_y F^t$ est fonction de $d(y, x)$ et $t (y \in \tilde{\mathcal{F}}_x)$. Notons: $h(d(x, y), t) = \det D_y F^t$. Cela ne dépend pas de la feuille $\tilde{\mathcal{F}}_x$ puisqu'elles sont toutes isométriques.

AFFIRMATION. *Soit $y \in \tilde{\mathcal{F}}_x$ on a $\det D_y \psi^t = h(d(x, y), t) \cdot p(u(x, y), t + d(x, y))$ où $u(x, y)$ est le vecteur unitaire tangent à la géodésique xy et $p(u, t)$ est (comme fonction de t) un élément de l'ensemble des fonctions \mathcal{A} défini dans 3.4.3.*

Preuve. Considérons la géodésique $c(t) = \exp_x tu$. où $u = u(x, y)$. Notons $T = d(x, y)$, c'est-à-dire que $y = c(T)$. L'idée de la preuve est que le flot ψ^t est dans un certain sens, "transversalement non-singulier". Soit en effet Y_1 un élément de \mathcal{N}_y l'orthogonal à $T_y \tilde{\mathcal{F}}$ Soit $Y_1(t) = D_y \psi^t(Y_1)$. Cette égalité n'a de sens a priori que pour $t \in]-T, \infty[$. Le champ de Jacobi $Y_1(t)$ est par contre défini pour tout t . On démontre sans difficulté:

Pour $t > 0, s > 0$ et $z = c(-s)$, on a:

$$Y_1(-T - s + t) = D_z \psi^t(Y_1(-s - T)). \tag{*}$$

Soit maintenant Y_1, \dots, Y_k une base de \mathcal{N}_y et X_1, \dots, X_{d+1} une base de $T_y\tilde{\mathcal{F}}$. On a: $\det(D_y\psi^t) = \|X_1(t) \wedge \dots \wedge X_{d+1}(t) \wedge Y_1(t) \dots \wedge Y_k(t)\|$

$$\|X_1(0) \dots \wedge X_{d+1}(0) \wedge Y_1(0) \wedge \dots \wedge Y_k(0)\|^{-1}.$$

Notons $Y_i^N(t)$ la projection orthogonale de $Y_i(t)$ sur $\mathcal{N}_{\psi^t(y)}$. Alors

$$\|X_1(t) \wedge \dots \wedge Y_k(t)\| = \|X_1(t) \wedge \dots \wedge X_{d+1}(t)\| \cdot \|Y_1^N(t) \wedge \dots \wedge Y_k^N(t)\|.$$

Par définition on a:

$$h(d(x, y), t) = \|X_1(t) \wedge \dots \wedge X_{d+1}(t)\| \|X_1(0) \wedge \dots \wedge X_{d+1}(0)\|^{-1}.$$

Il suffit maintenant de montrer que $\|Y_1^N(t) \wedge \dots \wedge Y_k^N(t)\| \in \mathcal{A}$; le reste de l'affirmation découlera de la relation (*).

Transportons tout parallèlement dans $T_y\tilde{V}$. Les champs $Y_i(t)$ sont solutions d'une équation $Y_i'' = AY_i$ où A est l'opérateur de courbure. Par le caractère géodésique de \mathcal{F}_x , A conserve $T_y\tilde{\mathcal{F}}$; donc conserve également \mathcal{N}_y puisque A est symétrique. On en déduit que les projections $Y_i^N(t)$ sont également solutions de l'équation considérée. Par définition de l'algèbre \mathcal{A} , on a $\|Y_1^N(t) \wedge \dots \wedge Y_k^N(t)\| \in \mathcal{A}$. □

Fin de la preuve de la proposition. Pour alléger l'exposé supposons que \tilde{V} est à courbure négative. Dans ce cas les éléments de \mathcal{A} auront la forme simple décrite dans 3.2 et vérifient notamment la propriété 3.2.1: un élément de \mathcal{A} , par exemple $p(u, t)$, tend vers l'infini au moins quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Notons:

$$D = \{u \in T^1\tilde{\mathcal{F}}/\tau \text{ tel que } p(u, t) \text{ est soit constant soit tend vers } l' \infty \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}.$$

Montrons à présent que si la section v est à valeurs dans D , alors $f(v, t)$ est au moins proportionnel à $g(t)$. On a $C(v, t + 1, \alpha) = \psi^t(C(v, 1, \alpha))$. Donc:

$$\text{Vol}(C(v, t + 1, \alpha)) = \int_{C(v, 1, \alpha)} h(d(x, y), t) \cdot p(u(x, y), t + d(x, y)) dy. \tag{**}$$

Pour $c > 0$, considérons $D_T^c = \{u \in T^1\tilde{\mathcal{F}}/\tau; p(u, t) \geq c \text{ si } t \geq T\}$. Notons $D_T^{c'} = \exp D_T^c$. Pour $t > T$, on a:

$$\text{Vol } C(v, t + 1, \alpha) \geq c \int_{C(v, 1, \alpha) \cap D_T^{c'}} h(d(x, y), t) dy.$$

Pour T assez grand, $C(v, 1, \alpha) \cap D_T^{c'}$ est de mesure positive dans \tilde{V} . La mesure dy est approximativement égale au produit de la mesure riemannienne de $\tilde{\mathcal{F}}_{x_0}$ et une mesure de Lebesgue sur τ . Il en résulte qu'à une constante multiplicative près on a

$$\text{Vol } C(v, t, \alpha) \geq c \int_A h(d(x, y), t),$$

où A est une partie de $\tilde{\mathcal{F}}_{x_0}$ de mesure positive. La preuve de notre énoncé s'achèvera à l'aide du fait classique suivant qui peut se démontrer directement.

AFFIRMATION. Soit $\tilde{\mathcal{F}}_{x_0}$ un espace symétrique à courbure négative et A une partie bornée de mesure positive. Alors $\text{Vol } F^t(A)$ est proportionnel au volume de la boule $B(x_0, t)$ (F^t est comme précédemment un flot radial). Autrement dit à l'aide des notations précédentes: $\int_A h(d(x, y), t)$ est proportionnel à $g(t)$.

Retournons à la preuve de la proposition. D'après la relation (*) on a $D \cup (-D) = T^1 \mathcal{F} / \tau$. Si \mathcal{F} était C^1 , alors $p(u, t)$ serait un polynôme en $\exp \lambda_t t$, dont les coefficients sont des fonctions continues en u . Il s'ensuit que D est fermé et en particulier $\text{int}(D) \cup \text{int}(-D)$ est dense dans $T^1 \mathcal{F} / \tau$. Si v_0 appartient à $\text{int}(D)$ ou $\text{int}(-D)$, alors il en sera de même pour toute section Lipschitz v prolongeant v_0 . Ainsi, d'après ce qu'on vient de montrer, la proposition est vraie pour un tel v_0 . Si v_0 appartient à l'adhérence de $\text{int}(D)$, alors tout cône tronqué $C(v, t, \alpha)$ contient un cône tronqué $C(v', t, \alpha')$, avec α' petit par rapport à α et v' à valeurs dans $\text{int}(D)$. On conclut alors par densité de $\text{int}(D) \cup \text{int}(-D)$ dans $T^1 \mathcal{F} / \tau$.

Dans le cas général, i.e. lorsque \mathcal{F} est Lipschitz, les coefficients de $p(u, t)$ dépendent mesurablement de u . Le raisonnement ci-dessus peut alors se refaire, en remplaçant la condition $v_0 \in \text{int}(D)$, par la condition, v_0 est un point de densité de D (au sens de la mesure de Lebesgue sur $T^1 \mathcal{F} / \tau$, par exemple celle provenant d'une trivialisatation $T^1 \mathcal{F} / \tau = T^1_{x_0} \mathcal{F} x \tau$). \square

4.4. Fin de la preuve du théorème

Maintenant V vérifie la condition du théorème sur la croissance du volume.

AFFIRMATION. *Pour tout $v_0 \in T^1 \mathcal{F} / \tau$, et toute section v le prolongeant, on a: $\text{Vol}(C(v, t, \alpha))$ est au moins proportionnel à $g(t)$ (4.3.1 affirme seulement que si cela n'est pas vrai pour v alors c'est vrai pour $-v$).*

Preuve. La discussion précédente permet d'associer à tout x dans le support de \mathcal{F} , une partie E_x de $T^1_x \mathcal{F}$ formée de vecteurs $v_0 \in T^1_x \mathcal{F}$, tels que $\text{Vol}(C(v, t, \alpha))$ soit au moins proportionnel à $g(t)$ pour toute section v prolongeant v_0 . On obtient ainsi une partie E de $T^1 \mathcal{F}$, vérifiant d'après ce qui précède la propriété $E \cup -E = T^1 \mathcal{F}$. De plus E est $\pi_1(V)$ -invariante et également invariante par le flot géodésique de $T^1 \mathcal{F}$ comme on peut le vérifier sans difficulté.

Montrons d'abord que E est dense dans $T^1 \mathcal{F}$. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'un élément $-v_0$ n'est pas dans \bar{E} . Il s'ensuit que v_0 est dans l'intérieur de E .

Revenons alors aux considérations et notations de la Section 4.3. Le cône tronqué $C(v_0, \alpha, t)$ possède un volume au moins proportionnel à $g(t)$. Le raisonnement de 4.2 s'applique parfaitement jusqu'à 4.2.2. Il nous fournit, un vecteur u proche de v_0 (qui est donc dans E , car v_0 est un point intérieur dans E), un réel T et $\gamma \in \pi_1(V)$ tel que $\gamma(\tilde{\phi}^T(u))$ soit proche de $-v_0$ ($\tilde{\phi}^T$ est le flot géodésique de $T^1 \mathcal{F}$). Or $\gamma \tilde{\phi}^T(u) \in E$ (par $\pi_1(V)$ et ϕ -invariance de E). Contradiction avec le fait que $-v_0 \notin \bar{E}$.

Ainsi, on a montré que E est dense. Pour finir remarquons qu'en fait E est fermé. En effet comme ci-dessus, un cône $C(v, t, \alpha)$ déterminé par un point d'accumulation de E , contient un certain cône $C(v', t, \alpha')$ déterminé par un point de E . Donc $C(v, t, \alpha)$ vérifie lui aussi la condition de croissance de volume. \square

Fin de la preuve du théorème. L'affirmation précédente nous donne l'analogie de l'affirmation 1 de 4.2. Le reste des développements de 4.2 s'applique intégralement pour ainsi démontrer le Théorème J en toute généralité. \square

Remarque 1. Les conditions du Théorème J pour une variété hyperbolique V , feuilletée trivialement (par une seule feuille), signifient que V est complète et à croissance dominée par celle de l'espace hyperbolique de même dimension. Dans ces conditions, Sullivan [14]

a démontré (avec des techniques plus profondes qu'ici) qu'alors le flot géodésique est en fait conservatif (voir 4.6 pour la définition) et même ergodique.

Remarque 2. On peut se demander si le Théorème J n'est en fait pas vrai pour une sous-variété géodésique, au lieu d'un feuilletage. Ceci se déduit du théorème de Ratner (mentionné dans l'introduction) lorsque la variété ambiante V est complète et de volume fini. C'est même pratiquement équivalent à ce théorème dans ce contexte. En prenant pour V un voisinage d'un $d + 1$ -plan \mathbb{H}^{d+1} de l'espace hyperbolique \mathcal{H}^n , exponentiellement mince à l'infini, on voit que le Théorème J ne s'étend pas au cas des sous-variétés des variétés non complètes, mais une version faible reste à espérer.

4.5. Cas où les feuilles sont plates

L'affirmation sur les angles des triangles sera alors évidemment fausse. Le théorème est à son tour faux. Considérons en effet $V = \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^n$, muni du feuilletage \mathcal{F} , produit de \mathbb{R}^k par \mathcal{F}' où \mathcal{F}' est un feuilletage du tore plat \mathbb{T}^n par $(d + 1)$ -plans (géodésiques) denses. Les feuilles sont isométriques à $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d+1}$ donc croissent comme r^{k+d+1} . Par contre V croît comme r^k . Enfin l'ensemble non-errant de \mathcal{F} est contenu (après identifications) dans $T^1(\mathbb{T}^n) \subset T^1V$.

Remarquons en contrepartie le fait (amusant) général suivant: "Soit \mathcal{F} un feuilletage d'une variété riemannienne V , tel que la métrique induite sur toute feuille soit plate. Alors le flot géodésique de \mathcal{F} est chain-récurrent!" (voir [13] pour la définition de cette notion de récurrence). Pour le voir, il suffit de remarquer que le flot géodésique de \mathbb{R}^n (le fibré unitaire tangent de \mathbb{R}^n étant muni de la métrique naturelle) est *chain-récurrent* ! Cela découle du fait que dans \mathbb{R}^n , il existe des polygones réguliers à angles aussi petits que l'on veut et à côtés grands.

4.6. Remarque: Relations entre la récurrence d'un feuilletage et celle de son flot géodésique

Comme on l'a remarqué dans l'introduction, la récurrence d'un feuilletage diffère de celle de son flot géodésique. A titre de complément, discutons un peu en généralité cette question.

Soit \mathcal{F} un feuilletage (pas nécessairement géodésique) d'une variété riemannienne V . Moyennant une différentiabilité suffisante de \mathcal{F} , il est possible de définir un "flot géodésique" $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ qui sera appelé le flot géodésique de \mathcal{F} [16]. Discutons dans ce qui suit quelques notions de récurrence de feuilletages, généralisant les notions classiques de récurrence de systèmes dynamiques. Soit $x \in V$, considérons l'application exponentielle de \mathcal{F}_x , $\exp_x: T_x\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_x$. Notons: $B'(x, t) = \exp_x\{u \in T_x\mathcal{F} / \|u\| \geq t\}$.

Définition 1. On dira que x est non-errant si pour tout voisinage U de x et tout t , il existe $y \in U$ tel que $B'(y, t) \cap U$ soit non-vide.

Définition 2. On dira que \mathcal{F} est non-errant si tous ses points sont non-errants.

Définition 3. Si μ est une mesure de V , on dira qu'elle est conservative si pour tout U de mesure positive et tout t , il existe $y \in U$ tel que $B'(y, t) \cap U \neq \emptyset$.

Soit ν une mesure transverse invariante par holonomie. En tensorisant par la mesure riemannienne des feuilles, on obtient une mesure μ sur V . Cette mesure sera conservative si elle est finie (théorème de récurrence de Poincaré).

Considérons maintenant le flot géodésique $(T^1\mathcal{F}, \phi)$. On a les faits suivants:

(i) $(T^1\mathcal{F}, \phi)$ non-errant (resp. conservatif pour μ) \Rightarrow \mathcal{F} non-errant (resp. conservatif pour l'image de μ).

(ii) La réciproque est fautive comme le montre l'exemple 3.1 qui est en fait un contre-exemple au Théorème J lorsque V est localement homogène mais non-localement symétrique. Le volume de V était d'ailleurs fini et \mathcal{F} était conservatif.

(iii) On peut tensoriser la mesure transverse ν par les mesures de Liouville sur les fibres unitaires tangentes aux feuilles pour ainsi obtenir une mesure μ' invariante par $(T^1\mathcal{F}, \phi)$. Lorsque la mesure μ ci-dessus est finie, μ' le sera à son tour. Elle sera par suite conservative. Voici un exemple où μ est conservative (mais infinie) alors que μ' ne l'est pas. Soit S une variété hyperbolique et X l'espace des géodésiques de \tilde{S} . Le groupe fondamental $\pi_1(S)$ agit sur \tilde{S} . On prend $V = S \times X / \pi_1(S)$, feuilleté par $S \times \{\cdot\}$. Remarquons que l'exemple 3.1 s'obtient de la même façon en remplaçant X par la sphère à l'infini de \tilde{S} . Ce feuilletage admet une mesure transverse invariante: la mesure de Liouville sur X (elle est infinie). Pour cette mesure le feuilletage est conservatif et même ergodique si S est compacte. Cependant l'ensemble non-errant du flot géodésique de ce feuilletage est maigre. Il se calcule comme celui de l'exemple 3.1.

5. PREUVES DES THÉORÈMES F et G

5.1. Preuve de la proposition de la Section 2.3 (Voir également [21], Section 10).

Soit $K' = H \cap K$ le sous groupe d'isotropie de x_0 dans H . L'orbite Hx_0 s'identifie donc à H/K' . Montrons que $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap p \subset \mathcal{H}$ (\mathcal{H} étant l'algèbre de Lie de H) est $\text{Ad}(K')$ -invariant. En effet il découle de la définition de décompositions de Cartan que p est $\text{Ad}(K)$ -invariant et à fortiori $\text{Ad}(K')$ -invariant. Maintenant $K' \subset H$, donc \mathcal{H} est $\text{Ad}(K')$ -invariant. Par conséquent $\mathcal{H} \cap p$ est $\text{Ad}(K')$ -invariant.

On en déduit que le champ de plans sur H , invariant à gauche, et déterminé par $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap p$, passe en un champ H -invariant sur le quotient H/K' .

Pour montrer que ce champ détermine un feuilletage géodésique, il suffit de montrer que $\exp_{x_0}(\mathcal{H}')$ est géodésique dans \tilde{V} , car le champ est H -invariant (ici $\exp_{x_0}: T_{x_0}\tilde{V} = p \rightarrow \tilde{V}$ est l'application exponentielle). Le critère classique permettant de le vérifier est le suivant [8]: Si $X, Y, Z \in \mathcal{H}'$ alors le triplet de Lie $[X, [Y, Z]] \in \mathcal{H}'$. Or si $X, Y, Z \in p$ alors $[X, [Y, Z]] \in p$ (c'est le cas trivial de ce critère). De même si $X, Y, Z \in \mathcal{H}$ alors $[X, [Y, Z]] \in \mathcal{H}$ puisque \mathcal{H} est une sous-algèbre. Le critère est donc bien rempli par \mathcal{H}' . \square

5.2. Preuve du Théorème F

Soient \mathcal{F} un feuilletage géodésique analytique de V (qui est une variété localement symétrique à courbure non-positive et de volume fini). Notons $\tilde{\mathcal{F}}$ son relèvement dans \tilde{V} et G le groupe d'isométries de \tilde{V} .

PROPOSITION. Il existe un sous-groupe connexe H non-trivial conservant $\tilde{\mathcal{F}}$: $h(\tilde{\mathcal{F}}_x) = \tilde{\mathcal{F}}_{h(x)}$ pour tout x appartenant à \tilde{V} et $h \in H$.

Preuve. Considérons $N = T^1\mathcal{F} \subset T^1V$. D'après le Théorème H, (N, ϕ) conserve une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue. Appliquant le Théorème 12.2 de [21] qui précise le Théorème D' (cité en 2.1) de ce même article, sur les composantes ergodiques dans le cas analytique:

THÉORÈME [21, 12.2]. *Soit N une sous-variété analytique connexe invariante par le flot géodésique d'une variété localement symétrique de courbure non-positive. Supposons que la restriction du flot géodésique à N respecte une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue. Alors toute composante connexe de \tilde{N} est invariante par un sous-groupe connexe H non-trivial.*

Dans notre cas, si $\dim \mathcal{F} > 1$, alors \tilde{N} est connexe car $\tilde{N} = T^1\tilde{\mathcal{F}}$. Lorsque $\dim \mathcal{F} = 1$, $T^1\tilde{\mathcal{F}}$ possède exactement deux composantes connexes (car $\tilde{\mathcal{F}}$ est orientable, puisqu'il est défini sur une boule topologique), on prendra \tilde{N} l'une de ces deux composantes.

Montrons que H respecte $\tilde{\mathcal{F}}$. Le point est que H respecte les fibres de la projection $\pi: T^1\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{V}$. Donc si $h \in H$ et $y = h(x)$, alors $h(T_x^1\tilde{\mathcal{F}}) = T_y^1\tilde{\mathcal{F}}$. Ceci entraîne puisque $\tilde{\mathcal{F}}$ est géodésique que: $h(\tilde{\mathcal{F}}_x) = \tilde{\mathcal{F}}_y$. □

Soit $L \subset G$ le sous-groupe (fermé) de toutes les isométries conservant $\tilde{\mathcal{F}}$. Notons \mathcal{L} son algèbre de Lie. Elle n'est pas triviale puisque $H \subset L$. On a: $\pi_1(V) \subset L$. On en déduit que $\text{Ad}(\pi_1(V))$ conserve \mathcal{L} . La fermeture de Zariski de $\text{Ad}(\pi_1(V))$ conserve également \mathcal{L} . Or d'après le théorème de densité de Borel, $\pi_1(V)$ est Zariski dense dans G [11]. Donc \mathcal{L} est $\text{Ad}(G)$ -invariant, c'est-à-dire que la composante neutre L' est normale dans G . C'est donc un facteur de G .

Soit $G = G_1 \times \dots \times G_n$ la décomposition en G en groupes simples (\tilde{V} est supposée sans facteur plat). Alors, quitte à permuter ces facteurs on peut supposer que $G = L' \times L''$, avec $L' = G_1 \times \dots \times G_k$ et $L'' = G_{k+1} \times \dots \times G_n$. A cela correspond une décomposition de l'espace symétrique: $\tilde{V} = \tilde{V}' \times \dots \times \tilde{V}_n$ en: $\tilde{V} = \tilde{V}' \times \tilde{V}''$, avec $\tilde{V}' = \tilde{V}'_1 \times \dots \times \tilde{V}'_k$ et $\tilde{V}'' = \tilde{V}''_{k+1} \times \dots \times \tilde{V}''_n$.

Il découle de la définition de L' (comme composante neutre de L) et du fait que L est fermé que: $L = L' \times \Gamma$, où Γ est un sous-groupe discret de L'' .

Comme $\pi_1(V)$ est contenu dans L , la projection de $\pi_1(V)$ sur L'' est sous-groupe discret, donc un réseau (car la projection d'un réseau est toujours de covolume fini). Il s'ensuit que $\pi_1(V)$ intersecte L' en un réseau. Cela a deux conséquences géométriques. D'abord, les projections des sous-variétés $\tilde{V}' \times \{x''\}$ dans V sont fermées, et aussi de volume fini. De plus, on a une projection naturelle $V \rightarrow V''$, où $V'' = L''/(\pi_1(V))''$, où $(\pi_1(V))''$ est la projection de $\pi_1(V)$ dans L'' (à indice fini près cela coïncide avec Γ).

Observons maintenant que, grâce au fait que $\tilde{\mathcal{F}}$ est invariant par $L' \times \Gamma$, le feuilletage \mathcal{F} se projette en un feuilletage géodésique \mathcal{F}'' de V'' . Dans le revêtement universel, la feuille $\tilde{\mathcal{F}}_{x''}$, d'un point x'' de \tilde{V}'' est la projection de la feuille $\tilde{\mathcal{F}}_{(x', x')}$ où x' est un point quelconque de \tilde{V}' .

Fixons $x = (x', x'') = (x_1, \dots, x_n)$ un point de \tilde{V} et notons $p_i = T_{x_i}\tilde{V}'_i$, $p'' = T_{x''}\tilde{V}''$ et K_i le groupe d'isotropie de x_i dans G_i . Il agit irréductiblement sur p_i , puisque \tilde{V}'_i est irréductible.

AFFIRMATION 1. $T_x\tilde{\mathcal{F}}$ est somme directe de certains sous-espaces p_i , $1 \leq i \leq k$, et un sous-espace de p'' .

Preuve. Remarquons que $T_x\tilde{\mathcal{F}}$ est invariant par $K_1 \times \dots \times K_k$. Cela découle du fait que $\tilde{\mathcal{F}}$ est L' -invariant. Ensuite, on utilise l'

AFFIRMATION 2. Soit $E \subset p_1 \times \dots \times p_k \times p''$ un sous-espace $Ad(K_i)$ -invariant pour tout $1 \leq i \leq k$. Alors E est somme directe de certains p_i et d'un sous-espace de p'' .

Preuve (standard). Supposons pour simplifier que $k = 1$. Supposons que E n'est pas inclus dans p'' . Sa projection dans p_1 est donc surjective puisque $Ad(K_1)$ agit irréductiblement sur p_1 . Il doit exister $g \in K_1$ dont l'action sur E admet une valeur propre λ différent de 1, car sinon cette action serait triviale dans E et par suite dans p_1 et donc réductible.

Soit (u_1, u'') un λ -vecteur propre de g . On a $Ad(g)(u_1, u'') = (\lambda u_1, \lambda u'')$. Donc $u'' = 0$. Ainsi $(u_1, 0) \in E$, c'est-à-dire que $E \cap p_1 \neq 0$. Par irréductibilité on a: $E \cap p_1 = p_1$. Donc E s'écrit sous la forme $E = p_1 \oplus E''$ où $E'' \subset p''$. □

La démonstration du théorème se termine par récurrence. Si $\tilde{\mathcal{F}}$ est tangent à \tilde{V}' , alors l'affirmation 1 entraîne que \mathcal{F} est trivial. Sinon \mathcal{F} se projette en un feuilletage \mathcal{F}'' de V'' , de dimension non nulle. Par l'hypothèse de récurrence, ce feuilletage est géométriquement trivial, i.e. correspond à un facteur de \tilde{V}'' . Il est facile de voir, vu que $\tilde{\mathcal{F}}$ est scindé comme dans l'affirmation 1, qu'il correspond lui aussi à un facteur de \tilde{V} . □

5.3. Preuve du Théorème G

Soit $V = \mathbb{T}^n$ un tore plat à n dimensions. On le regarde comme groupe additif (compact). Soit L_1, \dots, L_k, \dots , la liste de ses sous-groupes compacts (sous-tores).

Soit (U, \mathcal{F}) un feuilletage géodésique local de V avec U connexe. L'adhérence $\bar{\mathcal{F}}_x$ d'une feuille \mathcal{F}_x s'écrit $\bar{\mathcal{F}}_x = x + L_i$. Le feuilletage \mathcal{F} dans $(x + L_i) \cap U$, est défini par des feuilles parallèles à \mathcal{F}_x . Elles ont donc toutes la même adhérence $x + L_i$. Il en résulte également que $(x + L_i) \cap U = x + L_i$, car c'est un ouvert \mathcal{F} -invariant dans $x + L_i$. Son complémentaire, s'il n'est pas vide sera dense.

Soit $E_i = \{x \in U / \bar{\mathcal{F}}_x = x + L_i\}$. Ce qui précède montre que le feuilletage \mathcal{L}_i défini par L_i répond bien aux conditions du théorème dans E_i , ainsi que dans l'adhérence \bar{E}_i par continuité. Remarquons que dans \bar{E}_i , le feuilletage \mathcal{F} est invariant par l'action du groupe L_i . On a $U = \cup E_i$, il existe donc d'après le théorème de Baire un i tel que l'intérieur $\text{int}(\bar{E}_i)$ soit non vide. Donc la restriction de \mathcal{F} à un ouvert est invariante par L_i . Il s'ensuit lorsque \mathcal{F} est analytique, qu'il est invariant par L_i . Soit L le sous-groupe \mathbb{T}^n préservant \mathcal{F} . Il contient tous les L_i tels que $\text{int}(\bar{E}_i)$ soit non-vide. Donc dans $\text{int}(\bar{E}_i)$, l'adhérence $\bar{\mathcal{F}}_x$ est contenue dans $x + L$. Comme le réunion de ces intérieurs est dense dans U , on a: $\bar{\mathcal{F}}_x \subset x + L$, pour tout $x \in U$. Le feuilletage \mathcal{L} énoncé au théorème est celui déterminé par L , i.e. $\mathcal{L}_x = x + L$. □

Exemple dans $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. Munissons \mathbb{R}^3 de coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Sur le plan affine $z = a$, considérons le feuilletage par droites parallèles de ce plan, de pente $\mathcal{O}(a)$ où $\mathcal{O}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une certaine fonction.

Le feuilletage de \mathbb{R}^3 ainsi construit passe à \mathbb{T}^3 si \mathcal{O} est périodique. Il est de même classe de différentiabilité que \mathcal{O} .

Il n'est pas difficile de voir que tout feuilletage géodésique local de classe C^0 , de \mathbb{T}^3 est soit essentiellement (i.e. après isométrie de \mathbb{R}^3) de cette forme, soit à feuilles parallèles denses.

Les choses diffèrent de \mathbb{T}^4 . Voici un *exemple de feuilletage C^∞* de \mathbb{T}^4 qui n'est pas du type décrit dans le théorème. Considérons $\mathbb{T}^4 = \mathbb{T}^3 \times S^1$. Soit g^1, \dots, g^n, \dots une suite de géodésiques fermées disjointes de \mathbb{T}^3 . Pour tout i , considérons un voisinage tubulaire T^i de

g^i , $T^i = \tau^i \times g^i$ où τ^i est une boule 2-dimensionnelle. Il est feuilleté par les géodésiques parallèles à g^i , $g_x^i = \{x\} \times g^i$, $x \in \tau^i$.

Considérons une fonction $\mathcal{O}: \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que \mathcal{O} soit constante le long de toute géodésique g_x^i et nulle dans $\mathbb{T}^3 - \cup T^i$.

Associons à \mathcal{O} , un feuilletage géodésique (global) $\mathcal{F}_\mathcal{O}$ de \mathbb{T}^4 , de dimension un, construit comme suit:

- (i) La feuille d'un point s de \mathbb{T}^3 appartenant à $\mathbb{T}^3 - \cup T^i$ est simplement $\{s\} \times S^1$.
- (ii) Tout tore 2-dimensionnel $g_x^i \times S^1$ est feuilleté par des droites parallèles faisant un angle $\mathcal{O}(x)$ avec le facteur S^1 . Il est possible de choisir \mathcal{O} de classe C^∞ et non triviale. On peut par exemple construire \mathcal{O} , valant $\frac{1}{2} \pi$ sur tout g^i . Cela veut dire que les g^i sont des feuilles de $\mathcal{F}_\mathcal{O}$.

Le feuilletage $\mathcal{F}_\mathcal{O}$ restreint à $T^i \times S^1$ est invariant par le groupe L_i correspondant au tore de dimension 2, $g^i \times S^1$. Il est facile de voir que pour que $\mathcal{F}_\mathcal{O}$ soit du type décrit dans le théorème, il faut que tous les L_i soient identiques. Or cela équivaut à dire que les g_i soient parallèles entre elles. Le Théorème G admet donc des contre-exemples C^∞ .

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Cao and N. Mok: Holomorphic immersions between compact hyperbolic space forms, *Invent. Math.* **100** (1990), 49–61.
2. P. Eberlein: Geodesic flows on negatively curved manifolds I, *Ann. Math* **95** (1972), 492–510.
3. H. Federer: *Geometric measure theory*, Springer, Berlin (1969).
4. D. Ferus: Totally geodesic foliations, *Math. Ann.* **188** (1970), 313–316.
5. D. Ferus: Isometric immersions of constant curvature manifolds, *Math. Ann.* **217** (1975), 155–156.
6. E. Ghys: Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes, *Sémin. Bourbaki, Exposé 747* (1991).
7. M. Gromov: *Partial differential relations*, Springer, Berlin (1986).
8. S. Helgason: *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York (1962).
9. D. L. Johnson and L. B. Witt: Totally geodesic foliations, *J. Diff. Geom.* **15** (1980), 225–235.
10. B.O'Neill: Umbilics of constant curvature immersions, *Duke. Math. J.* **32** (1965), 149–159.
11. M. S. Raghunathan: *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, Berlin (1972).
12. H. Reckziegel: Completeness of curvature surfaces of isometric immersions, *J. Diff. Geom.* **14** (1979), 7–20.
13. M. Shub: Stabilité globale des systèmes dynamiques, *Astérisque* **56**. SMF (1978).
14. D. Sullivan: On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, *Proc. 1978 Stony Brook Conf., Ann. Math. Studies* **97**, Princeton (1981).
15. W. Thurston: *Geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University, Lecture Notes (1978).
16. P. Walczac: Dynamics of the geodesic flow of a foliation, *Erg Theory Dyn. Systems* **8** (1988), 637–650.
17. A. Zeghib: Feuilletages géodésiques des variétés localement symétriques et applications, Thèse. Dijon (1985).
18. A. Zeghib: Sur les feuilletages géodésiques continus des variétés hyperboliques *Invent. Math.* **114** (1993), 193–206.
19. A. Zeghib: Feuilletages géodésiques appliqués, *Math. Ann.* **298** (1994), 729–759.
20. A. Zeghib: Sur une notion d'autonomie de systèmes dynamiques, appliquée aux ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques, *Erg. Theory Dyn. Systems* **15** (1995), 175–207.
21. A. Zeghib: Ensembles invariants des flots géodésiques des variétés localement symétriques, *Erg. Theory Dyn. Systems* **15** (1995), 379–412.