

# Partitions de l'Espace en Droites

Abdelghani Zeghib

UMPA, ENS-Lyon  
<http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib>

# Introduction

## Le problème

- Partition de  $X$

$$x \in X \rightarrow \mathcal{D}_x, \quad x \in \mathcal{D}_x \subset X,$$

$$\mathcal{D}_x \cap \mathcal{D}_y \neq \emptyset \implies \mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y$$

$$\cup_x \mathcal{D}_x = X$$

- Questions de régularité, terminologie : Feuilletages....
- $X = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{D}_x$  droite

## Exemples et questions

- **Exemple** :  $\forall x, y, \mathcal{D}_x \parallel \mathcal{D}_y$
- **Question 1** :  $\exists x, y, \mathcal{D}_x$  non parallèle à  $\mathcal{D}_y$
- **Question 2** :  $\forall x, y, \mathcal{D}_x \parallel \mathcal{D}_y \implies \mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y$

## Exemples et questions

- **Exemple** :  $\forall x, y, \mathcal{D}_x \parallel \mathcal{D}_y$
- **Question 1** :  $\exists x, y, \mathcal{D}_x$  non parallèle à  $\mathcal{D}_y$
- **Question 2** :  $\forall x, y, \mathcal{D}_x \parallel \mathcal{D}_y \implies \mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y$
- **Problème ouvert** : classifier (modulo ?, e.g. transformations affines) les partitions en droites de  $\mathbb{R}^3$

## Exemples et questions

- **Exemple** :  $\forall x, y, \mathcal{D}_x \parallel \mathcal{D}_y$
- **Question 1** :  $\exists x, y, \mathcal{D}_x$  non parallèle à  $\mathcal{D}_y$
- **Question 2** :  $\forall x, y, \mathcal{D}_x \parallel \mathcal{D}_y \implies \mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y$
- **Problème ouvert** : classifier (modulo ?, e.g. transformations affines) les partitions en droites de  $\mathbb{R}^3$   
— Contenu de l'exposé : autres développements, généralisations et questions :
  - Autres espaces et géométries
  - Motivations, situations naturelles,

## Exemple trivial

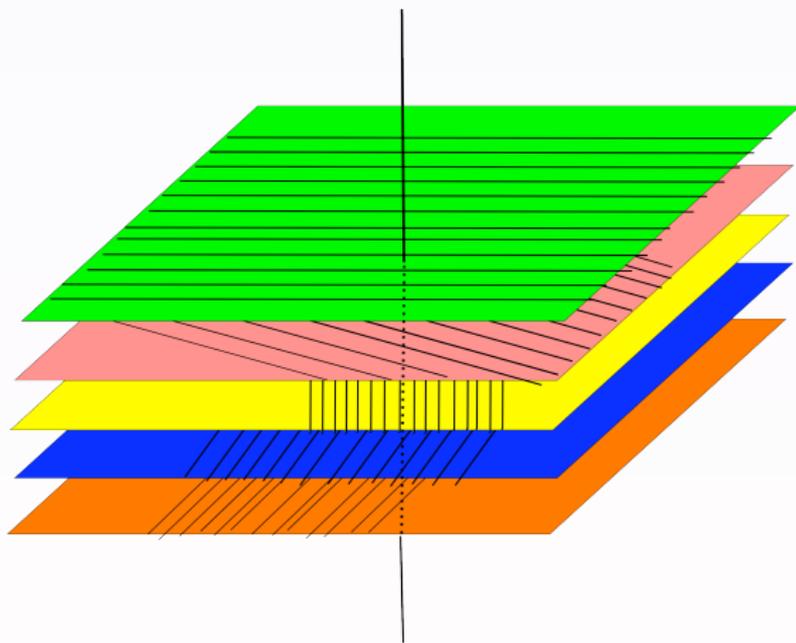
- Exemple trivial (en toute dimension) :

$$\mathcal{D}_x = x + D_0$$

où  $D_0$  est une droite vectorielle donnée.

- En dimension 2 : c'est l'unique exemple...
- Autre question en dimension 2 : Partition d'un ouvert (ou une partie quelconque)  $U \subset \mathbb{R}^2$  en segments de droites ?

## Premiers exemples non-triviaux



**Caractérisation** :  $\mathcal{D}$  est sous-jacent à un feuilletage  $\mathcal{F}$  en hyperplans (nécessairement parallèles entre eux)

**Exemple** :

Donnée :  $\theta : z \in \mathbb{R}$  (= axe des  $z$ )  $\rightarrow \theta(z)$  un angle  $\in S^1$ ,

$$\mathcal{F}_z = \mathbb{R}^2 \times \{z\},$$

Sur  $\mathcal{F}_z$  :  $\mathcal{D}$  est le feuilletage de  $\mathbb{R}^2$  par les droites de pente  $\theta(z)$ .

**REM** :  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  est quelconque (aucune régularité)

# Paramétrisation, comprendre l'équation différentielle "sachant" ses solutions !

Toute  $\mathcal{D}_x$  est dirigé par deux vecteurs unitaires  $X(x)$  et  $Y(x)$ ,

**Def** :  $\mathcal{D}$  est continue si, LOCALEMENT, on peut choisir  $X$  ou  $Y$  continues...

Idem pour  $C^k$

**Fait** : dans ce cas, on peut choisir  $X$  continue GLOBALEMENT

$Z = (x, e) \in \mathbb{R}^3 \times S^2$  tel que :  $e$  tangent à  $\mathcal{D}_x$

$\mathcal{D}$  est continue  $\iff Z$  est fermé

$Z \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une revêtement à 2 feuillets....

- Cas de l'exemple précédent :

$$X(x, y, z) = (\cos \theta(z), \sin \theta(z), 0),$$

- Équation différentielle :  $c'(t) = X(c(t))$
- Flot :  $\phi^t : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z) + tX(x, y, z)$
- Les solutions sont connues : des droites, on s'intéresse à l'équation elle même...

- Cas de l'exemple précédent :

$$X(x, y, z) = (\cos \theta(z), \sin \theta(z), 0),$$

- Équation différentielle :  $c'(t) = X(c(t))$
- Flot :  $\phi^t : (x, y, z) \rightarrow (x, y, z) + tX(x, y, z)$
- Les solutions sont connues : des droites, on s'intéresse à l'équation elle même...

**Condition analytique d'avoir des orbites droites :**  $\nabla_X X = 0$ , si  $\|X\| = 1$

Sens :  $\nabla_X X = DX.X$ ,  $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $DX$  (champ de) matrice,  $DX.X$  (champ de) vecteur

Cas général :  $\nabla_X X$  colinéaire à  $X$  (produit vectoriel = 0)

## Équations d'Euler de l'hydrodynamique

- $\phi^t$  préserve le volume :  $\det D\phi^t = 1$ . (même pour  $\theta$  juste mesurable)

## Équations d'Euler de l'hydrodynamique

- $\phi^t$  préserve le volume :  $\det D\phi^t = 1$ . (même pour  $\theta$  juste mesurable)
- Équations Euler

$$\begin{cases} \partial X / \partial t = (-X \cdot \nabla) X - \nabla p \\ \operatorname{div} X = 0 \end{cases}$$

$X = X(t, x, y, z)$  Champ de vecteurs non-autonome,

$p$  la pression (fonction)

$(-X \cdot \nabla) X = DX \cdot X$  la courbure (géodésique) des trajectoires...

## Équations d'Euler de l'hydrodynamique

- $\phi^t$  préserve le volume :  $\det D\phi^t = 1$ . (même pour  $\theta$  juste mesurable)
- Équations Euler

$$\begin{cases} \partial X / \partial t &= (-X \cdot \nabla) X - \nabla p \\ \operatorname{div} X &= 0 \end{cases}$$

$X = X(t, x, y, z)$  Champ de vecteurs non-autonome,

$p$  la pression (fonction)

$(-X \cdot \nabla) X = DX \cdot X$  la courbure (géodésique) des trajectoires...

Notre exemple : stationnaire :  $\partial X / \partial t = 0$  et "spécial" :  $\nabla p = 0$ ,

i.e. pression constante  $\rightarrow$  cas général ouvert !

# Dynamiques

Variété stable (faible) de  $x$  par  $\phi^t$  :

$$W^{s0}(x) = \{y, \sup_t d(\phi^t(x), \phi^t(y)) < \infty\}$$

Ici :  $W^{s0}(x) = \mathcal{F}_x$  (feuilletage en hyperplans)

# Dynamiques

Variété stable (faible) de  $x$  par  $\phi^t$  :

$$W^{s0}(x) = \{y, \sup_t d(\phi^t(x), \phi^t(y)) < \infty\}$$

Ici :  $W^{s0}(x) = \mathcal{F}_x$  (feuilletage en hyperplans)

Équations d'Euler : approche Eulerienne, approche lagrangienne...

## Addendum : Autres Équations

- Hamilton-Jacobi
- Monge-Ampère
- Morphismes harmoniques

# Cas de la sphère

## Géométrie, géodésiques, grands cercles

$$\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

- distance intrinsèque vs distance extrinsèque : distance arc vs distance corde
  - Cas de la sphère  $\mathbb{S}^2$  (la terre)
  - Distance : longueur du plus court chemin sur la sphère joignant les deux points.
  - Géodésiques : courbes réalisant la distance  $\cong$  droites
  - Dans le cas des sphères : géodésique = grand cercle :  $V \cap \mathbb{S}^3$ ,  $V$  2-plan vectoriel (i.e.  $0 \in V$ )

# Fibration de Hopf

$$f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

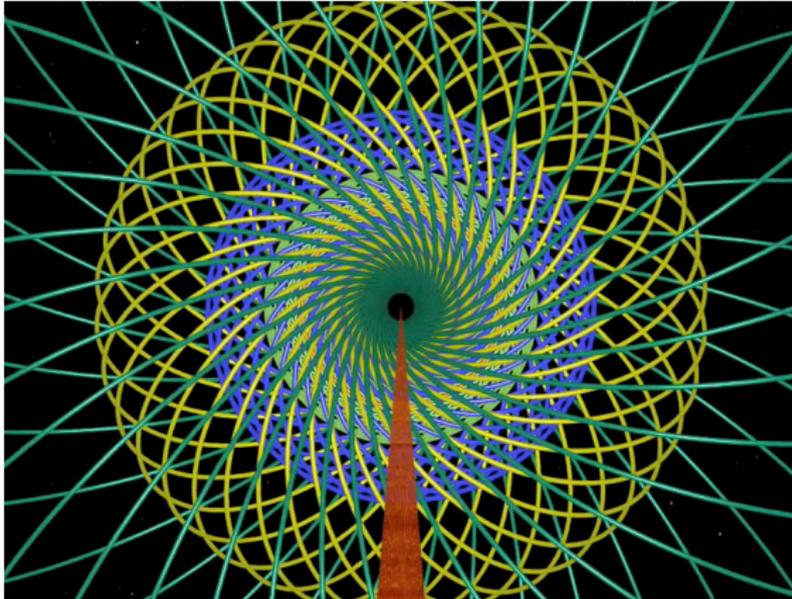
Fibre : image réciproque d'un point = géodésique

Fibration : presque produit :  $\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , mais localement !

$$\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$$

- $V_1, V_2$  droites complexes  $\rightarrow V_1 \cap V_2 = 0$
- Donc  $V_1 \cap \mathbb{S}^3$  et  $V_2 \cap \mathbb{S}^3$  sont deux grands cercles disjoints
- La famille des grands cercles ainsi obtenue feuilleté  $\mathbb{S}^3$
- Ce sont les orbites du flot

$$\phi^t(z_1, z_2) = e^{it}(z_1, z_2)$$

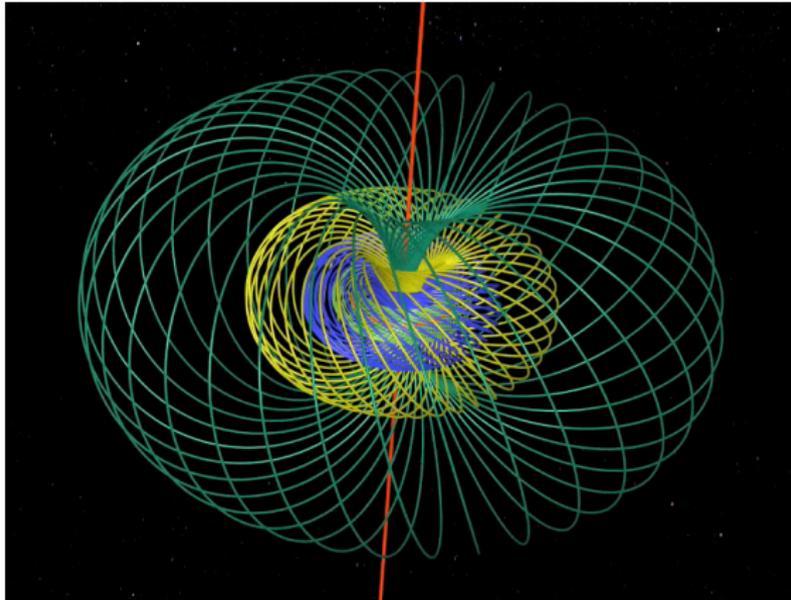


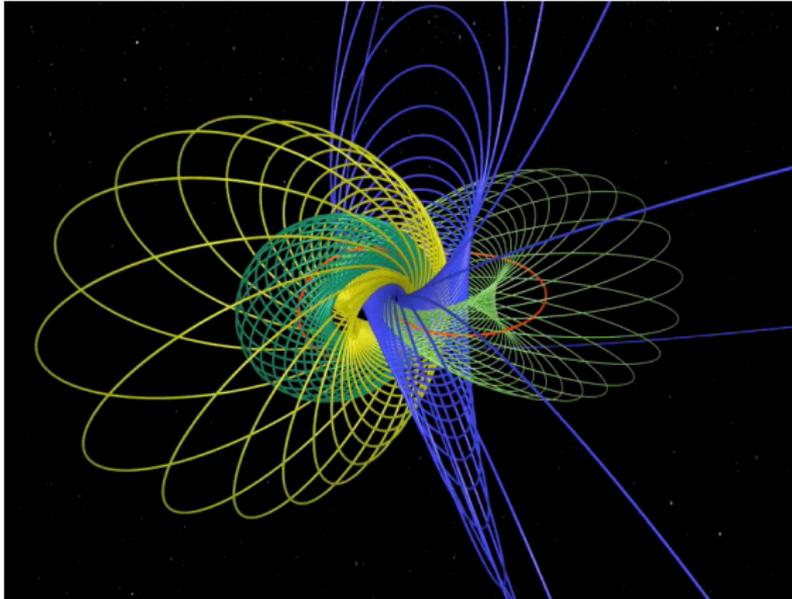
## Copyright-Copyleft

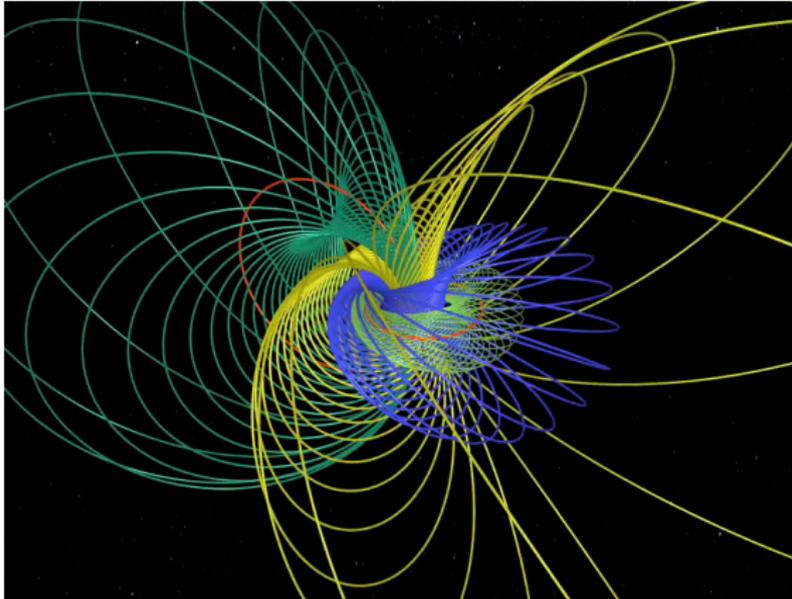
Images extraites du film “Dimensions, une promenade mathématique”, par Aurélien Alvarez, Étienne Ghys et Jos Leys :

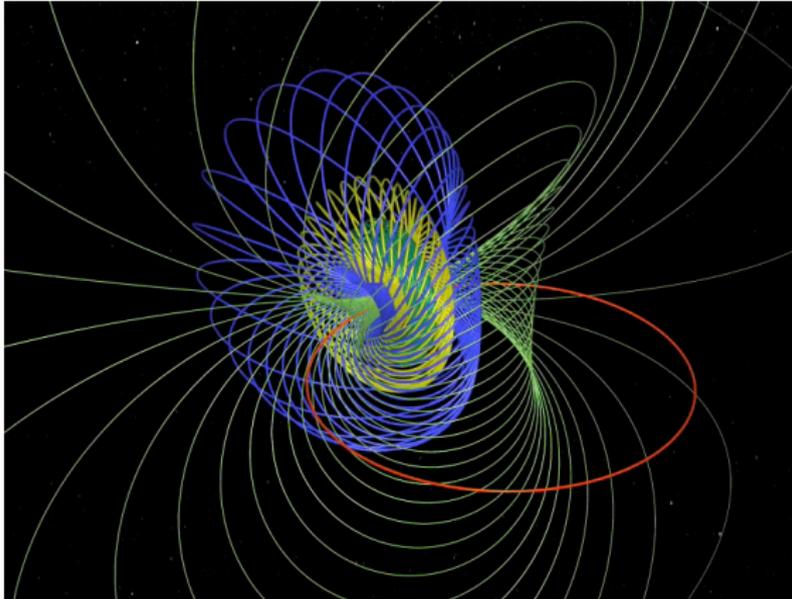
[www.dimensions-math.org/](http://www.dimensions-math.org/)

(Via projection stéréographique)













## Structure projective ; Platitude

$X$  variété riemannienne

- Structure métrique : donnée de la distance :  $X$  est localement plat s'il est localement isométrique à un espace euclidien
- Structure projective : donnée des géodésiques (leurs incidences...)

Projectivement plat :  $f : U \subset X \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  envoyant géodésique sur segment de droite...

- Structure conforme : { Angles }

Conformément plat, il existe  $f$  conforme

## Structure projective ; Platitude

$X$  variété riemannienne

- Structure métrique : donnée de la distance :  $X$  est localement plat s'il est localement isométrique à un espace euclidien
- Structure projective : donnée des géodésiques (leurs incidences...)

Projectivement plat :  $f : U \subset X \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  envoyant géodésique sur segment de droite...

- Structure conforme : { Angles }

Conformément plat, il existe  $f$  conforme

- Généralisations et cadre naturel...

## Développement projectif

Il existe :

- $d : \mathbb{R}^n \rightarrow H \subset \mathbb{S}^n$ ,  $H$  hémisphère ouvert (nord, sud...)
- $d$  difféomorphisme (global)
- $d$  projective : l'image d'une droite est un demi-grand cercle

## Développement projectif

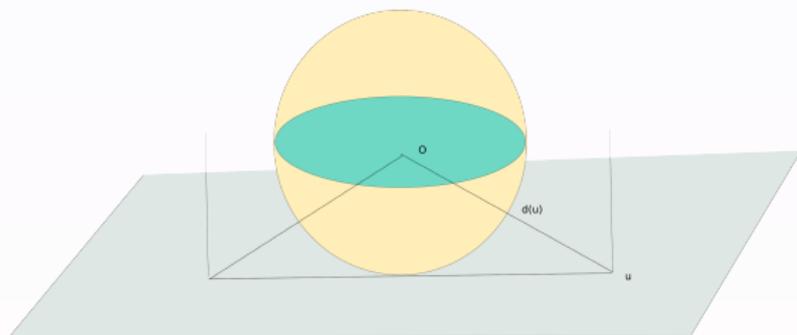
Il existe :

- $d : \mathbb{R}^n \rightarrow H \subset \mathbb{S}^n$ ,  $H$  hémisphère ouvert (nord, sud...)
- $d$  difféomorphisme (global)
- $d$  projective : l'image d'une droite est un demi-grand cercle

Le fait est comment passer du local au global :

Application développante : Fait général de la théorie des  $(G, X)$ -structures

# Géométrie projective classique, perspectives



## Feuilletage de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{D} =$  Tiré en arrière de la fibration de Hopf,

- Le développement projectif  $\rightarrow$  compactification projective : deux droites s'intersectent à l'infini  $\iff$  elles sont parallèles :

$$\overline{d(\mathbb{R}^n)} = d(\mathbb{R}^n) \cup \mathbb{R}P^{n-1}$$

- Corr : Deux éléments distincts quelconques sont non parallèles !

# Déformation

## Espace des géodésiques

$X$  espace..., e.g. variété riemannienne..., e.g.  $X = \mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3$

$\mathcal{G} = \mathcal{G}_X =$  espace des géodésiques de  $X$

$\mathcal{G}_{\mathbb{R}^n} =$  espace des droites de  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{G}_{\mathbb{S}^n} =$  espace des grands cercles

## Espace des géodésiques

$X$  espace..., e.g. variété riemannienne..., e.g.  $X = \mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3$

$\mathcal{G} = \mathcal{G}_X =$  espace des géodésiques de  $X$

$\mathcal{G}_{\mathbb{R}^n} =$  espace des droites de  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{G}_{\mathbb{S}^n} =$  espace des grands cercles

Ce sont des espaces homogènes, i.e. de la forme  $G/H$ ,  $G$  groupe,  $H$  sous-groupe de  $G$

→ en particulier, des variétés différentiables.

- Exemple :  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^2} = Euc_2/H\dots$

Topologiquement c'est une bande de Moebius (quotient double d'un anneau)

- $\mathcal{G}_{\mathbb{S}^n} = Gr_2^4 =$  Grassmannienne des 2-plans (vectoriels) de  $\mathbb{R}^4$   
 $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}^2 \cong S^2$ , dualité : un grand cercle  $\rightarrow$  un point,

## Variété d'incidence

**Correspondance : Feuilletage de  $X \rightleftharpoons$  Sous-variété de  $\mathcal{G}_X$**

- $\mathcal{D}$  Feuilletage de  $X$

Application de Gauß :  $Ga : x \in X \rightarrow \mathcal{D}_x \in \mathcal{G}_X$

Espace des feuilles :  $\Sigma_{\mathcal{D}} = Ga(X)$  sous-variété de dimension  $n - 1$

Exemple : fibration de Hopf,  $\Sigma \cong \mathbb{S}^2$

- $I = \{(x, d) \in X \times \mathcal{G}_X, \text{ tel que } x \in d\}$

Projection :  $\pi : (x, d) \in I \rightarrow x \in X$

- Étant donné  $\Sigma \subset \mathcal{G}_X$  on associe :

$$I_\Sigma = \{(x, d) \in I, d \in \Sigma\}$$

Condition de feuilletage :

$\mathcal{D}$  feuilletage  $C^k$  de  $X$



$\Sigma \subset \mathcal{G}_X$  sous-variété  $C^k$  telle que  $\pi : I_\Sigma \rightarrow X$  soit bijective

Même  $k$  ?

## Déformations de la fibration de Hopf

Affirmation :

Soit  $\pi : Y \rightarrow X$ ,

$Z \subset Y$  sous-variété  $C^1$  compacte,

Hypothèse :  $\pi : Z \rightarrow X$  bijective

Soit :  $T$  sous-variété  $C^1$ -proche de  $Z$

Alors  $\pi : T \rightarrow X$  est bijective

Remarques : définition de  $C^1$ -proche, cas non-compact....

# Perturbation de Hopf

Toute  $C^1$ -perturbation de  $\Sigma_{Hopf} \rightarrow$  feuilletage de  $\mathbb{S}^3 \dots$

Corr : beaucoup de feuilletages en droites de  $\mathbb{R}^3$

# Addenda

## Addendum 1 : géométrie de l'espace des droites

- $\mathcal{G}_X$  est une variété symplectique (c'est même l'exemple paradigmatique)

Corr : on peut calculer le volume d'un ensemble de droites.

- Pour  $X = \mathbb{R}^n$ , e.g.  $n = 2$ ,  $\mathcal{G}$  n'est pas une variété riemannienne (naturelle)!

On ne peut pas parler de distance entre droites.

- Autres structures géométriques sur  $\mathcal{G}_X$  ?

## Addendum 2 : Une équation aux dérivées partielles de Jacobi

- Titre : Über eine particuläre Lösung der partiellen

Differentialgleichung  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$

Crelle Reine Angew. Math. 36, 113-134 (1847)

$$\left\{ \begin{array}{l} V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

- Jacobi : les niveaux de  $V$  sont des droites...  $\rightarrow$  feuilletage par droites de  $\mathbb{R}^3$

Terminologie moderne :  $V$  morphisme harmonique  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$V$  est transversalement conforme :  $D_u V : (\ker D_u V)^\perp \rightarrow \mathbb{R}^2$  est conforme,

$X$  vecteur unitaire tangent aux niveaux de  $V$ , et  $\phi^t$  son flot,

$D\phi^t : X_x^\perp \rightarrow X_{\phi^t(x)}^\perp$  est conforme,

## Une preuve récente par Baird & Wood

Solution du problème :

Le feuilletage défini par les niveaux de  $V$  est trivial, ...,  $V$  est essentiellement une projection  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$



Une feuilletage transversalement conforme de  $\mathbb{R}^3$  par droites est trivial

## Dilemme ! ?

- Le flot de Hopf  $\phi^t(z_1, z_2) = e^{it}(z_1, z_2)$  est isométrique (sur  $\mathbb{S}^3$  et aussi  $\mathbb{R}^4$ )

Son **tiré en arrière** sur  $\mathbb{R}^3$  est transversalement conforme !

Contradiction avec le théorème de Baird et Wood ! ?



## Addendum 3 : Hamilton-Jacobi

$$f : X \rightarrow \mathbb{R},$$

$\nabla_x f$  gradient de  $f$  en  $x =$

dual par rapport à la métrique de  $d_x f$

Équation (eikonale) :  $\| \nabla f \| = c$

Faits :

- Les niveaux de  $f$  sont des hypersurfaces équidistantes (parallèles)
- Les orbites de  $\nabla f$  sont des géodésiques
- Le flot de  $\nabla f$  donne une projection orthogonale sur les niveaux.

REM : Une géodésique peut se définir (localement) comme une orbite de  $\nabla f$  pour une certaine  $f$  solution de Hamilton-Jacobi.

Affirmation-exercice : une solution globale sur  $\mathbb{R}^n$  est triviale :  $f$  linéaire, les lignes de  $\nabla f$  sont des droites parallèles...

## Addendum 4 : Monge-Ampère

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$D^2f$  (Hessien de  $f$ ) se définit...,  $D_x^2f$  forme quadratique  $\rightarrow$  tenseur (covariant) de type  $(2, 0)$

L'équation :  $\det D^2f = h$ ,

$\det D^2f = 0$ , équation homogène,

$$E_x = \ker D_x^2f = \{X \in T_xX, D^2f(X, Y) = 0, \forall Y \in T_xX\}$$

$x \rightarrow E_x$  distribution (ou champ) de plans de dimension =  $n - \text{rang}(D_x^2f)$

Le champ de plans est intégrable dans le cas plat, et ses feuilles sont "planes" (i.e. totalement géodésiques). (Idem dans le cas complexe...)

# Résumé, mots clés

Feuilletage ;  
Géodésique,  
Fibration,  
Fibration de Hopf  
Orientation,  
Équations (Euler, Hamiton-Jacobi, Monge-Ampère)  
Structure projective, Développement projectif  
Espace des droites, Espace des géodésiques, Espace homogène,  
...