

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
LYON I

**Sur quelques aspects dynamiques de la courbure
négative**

Habilitation à diriger des recherches
soutenue le 12 Janvier 1995

par

Abdelghani ZEGHIB

spécialité
Mathématiques

Composition du jury :

Yves COLIN DE VERDIÈRE	Président
Yves CARRIÈRE	
Étienne GHYS	
François LEDRAPPIER	Rapporteur
Jean Pierre OTAL	Rapporteur
Pierre PANSU	Rapporteur
Georges TOMANOV	

05/95

Cela fait dix ans que j'ai soutenu ma première thèse. Je réitère ici mes remerciements à ceux avec lesquels j'avais fait ce premier pas, notamment à Mikhael Gromov, dont la vision mathématique m'a profondément marqué.

Ensuite vinrent cinq ans d'égarement...Ils auraient pu être le double, et même plus, s'il n'y avait pas eu l'intervention ...d'Étienne Ghys. C'est à lui que j'essaie aujourd'hui, sans trouver les mots, d'exprimer ma gratitude...

Je suis très reconnaissant à Pierre Pansu pour ses aides (anonymes !), ainsi qu'à François Ledrappier pour sa gentillesse et pour avoir accepté de rapporter cette thèse.

Je remercie Yves Colin de Verdière et Georges Tomanov pour l'honneur qu'ils me font en faisant partie du jury.

J'ai toujours éprouvé beaucoup d'admiration pour les œuvres et les personnalités d' Yves Carrière et de Jean Pierre Otal. Je suis très content qu'ils soient membres du jury.

Enfin, je remercie tous les membres de l'UMPA de l'École Normale Supérieure de Lyon et tout particulièrement Frédéric Paulin pour sa gentillesse. Je suis reconnaissant à Bruno Sévenec pour sa disponibilité. J'admire en lui une capacité de compréhension et d'action exceptionnelle.

Introduction

Nous décrivons dans ce qui suit quelques contributions en systèmes dynamiques, géométrie riemannienne et géométrie lorentzienne. Cependant la partition de ce présent texte, en trois parties, est un peu artificielle (comme dans tous les ouvrages de mathématiques élémentaires). Comme l'indique le titre, il s'agit de différents aspects du même phénomène d'hyperbolicité.

Nous avons choisi d'être élémentaire, en nous limitant aux énoncés les plus simples. La preuve : dans ce texte, le nom d'Euclide apparaît au moins 0.791 fois autant que celui de Riemann. Ceci confirme aussi le caractère "concret" des Mathématiques que nous pratiquons.

Table des matières

I	Ensembles invariants de systèmes dynamiques	5
1	Régularité des ensembles limites des groupes Kleinien.	5
1.1	Courbes différentiables invariantes par homothéties.	5
1.2	Rigidité différentiable des ensembles limites des groupes Kleinien.	6
1.3	Espaces de Hadamard. Les autres espaces symétriques à courbure négative.	8
2	Passage des ensembles limites des groupes Kleinien aux ensembles invariants des flots géodésiques.	9
3	Rigidité géométrique : Flots géodésiques des espaces symétriques de rang supérieur. Systèmes dynamiques algébriques.	11
3.1	Structure algébrique du flot géodésique	12
3.2	Systèmes dynamiques algébriques.	12
4	Rigidité topologique : Variétés à courbure négative variable. Ensembles invariants des systèmes d'Anosov.	13
II	Géométrie riemannienne. Feuilletages géodésiques et immersions isométriques	16
5	Constructions.	16
5.1	Un quasi exemple.	16
5.2	Immersion isométriques.	17
5.3	Feuilletages locaux	18
6	Destructions.	18
6.1	Etude dynamique.	18
6.2	Conservation du volume. Systèmes dynamiques autonomes.	19
6.3	Résultats.	21
7	Applications à la géométrie. Rigidité des immersions isométriques.	22
8	Laminations géodésiques.	22
III	Géométrie lorentzienne	24
9	Sur la compacité des groupes d'isométries des variétés lorentziennes compactes.	25
10	Feuilletages géodésiques en géométrie lorentzienne.	26
11	Sur les espace-temps anti de Sitter.	26
12	Liste des travaux, articles et publications	27
13	Bibliographie complémentaire.	28

Partie I

Ensembles invariants de systèmes dynamiques

1 Régularité des ensembles limites des groupes Kleiniens.

1.1 Courbes différentiables invariantes par homothéties.

Dans le plan \mathbf{R}^2 muni des coordonnées cartésiennes $\{(x, y)\}$, notons D_λ l'homothétie de rapport λ . Soit c une courbe dans \mathbf{R}^2 représentée par le graphe d'une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, avec $f(0) = 0$. Supposons c invariante par D_λ , et $0 < \lambda < 1$.

La condition d'invariance se traduit par l'équation fonctionnelle : $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Il suffit donc de connaître f sur un domaine fondamental $] -1, -\lambda] \cup [\lambda, 1[$. Réciproquement, toute fonction continue définie sur cette réunion d'intervalles et vérifiant $f(\pm\lambda) = \lambda f(\pm 1)$, se prolonge en solution continue globale.

Cependant, une solution de ce problème, différentiable en 0 est nécessairement linéaire, c'est-à-dire que c est une droite. Pour le voir, il suffit de remarquer que pour tout x la droite de pente $\frac{f(x)}{x}$ est une tangente à c en 0.

Notons que ce fait s'étend aux similitudes, c'est-à-dire composées d'homothéties et rotations, mais n'est pas vrai pour des applications linéaires quelconques.

Ceci est un résultat simple où la dynamique (l'invariance par D_λ) détermine la géométrie (être une droite). Il illustre le principe d'une relation dialectique entre la géométrie et la dynamique, stipulant qu'une dynamique détermine aussi la géométrie de son support.

Ce sera notre fil directeur au long de toutes ces lignes et dans notre recherche, entre la géométrie et les systèmes dynamiques.

C'est en fait un principe "philosophique" à portée plus large : "la lutte et le conflit déterminent la forme des objets".

Il faut cependant se méfier des principes philosophiques qui ne déclarent jamais leurs conditions d'applicabilité. Le nôtre ne s'applique en fait, qu'à une dynamique et une géométrie assez homogènes et régulières. Dans notre illustration ci-dessus, la condition de différentiabilité en 0 ne peut être remplacée par une condition (même globale) plus faible, telle qu'être Lipschitz, comme le montre l'exemple simple d'une droite brisée en 0 (Figure 1).

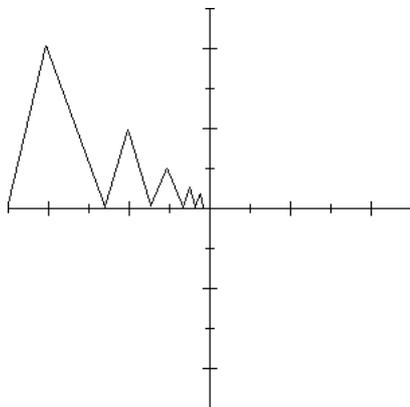


Figure 1 : une fonction non linéaire dont le graphe est invariant par l'homothétie de rapport 1/2

1.2 Rigidité différentiable des ensembles limites des groupes Kleinien.

Un *groupe Kleinien* Γ est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbf{C})$, le groupe de transformations conformes préservant l'orientation de la sphère de Riemann $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ [Thu]. La sphère étant compacte, l'action de Γ possède nécessairement de la récurrence. Il se trouve que cette récurrence est bien organisée. Il y a une décomposition, $S^2 = D_\Gamma \cup L_\Gamma$, telle que Γ agit proprement sur D_Γ , et à l'opposé, minimalement (i.e. à orbites toutes denses) dans L_Γ (ceci n'est strictement vrai que si Γ n'est pas élémentaire, i.e., L_Γ possède au moins 3 points). Pour cela ces deux parties sont respectivement appelées, *domaine de discontinuité* et *ensemble limite* de Γ .

En dehors du cas élémentaire, un groupe Kleinien contient beaucoup de transformations *hyperboliques*, c.-à-d., conjuguées dans $PSL(2, \mathbf{C})$ à des transformations fixant l' ∞ et induisant une similitude dans \mathbf{C} . En fait l'ensemble des points fixes des éléments hyperboliques de Γ est dense dans L_Γ .

Un groupe Kleinien est dit *quasi fuchsien* si L_Γ est une courbe topologique, i.e. homéomorphe à S^1 . Ce qui précède implique que si cette courbe est (partout) différentiable, alors c'est un cercle (c'est ce qui joue le rôle de droite en géométrie conforme).

Toutefois la richesse de notre situation nous laisse espérer mieux, c'est-à-dire que la conclusion géométrique pourrait découler de conditions plus faibles. Remarquons d'abord qu'il suffit en fait que la courbe soit différentiable en l'un des points fixes de éléments hyperboliques de Γ . Cependant, une telle condition n'est pas assez naturelle, car elle contient des informations dynamiques a priori, et aussi parce qu'elle porte sur un ensemble, certes dense, mais difficile à détecter en pratique, car "négligeable". Il est plus naturel, (à titre d'exemple) de supposer que L_Γ est "presque partout différentiable", ce qui peut exclure les points fixes des éléments de Γ . Une façon de l'exprimer est de supposer que L_Γ est rectifiable, au sens qu'elle a une longueur finie. On peut ainsi se demander : un ensemble limite rectifiable est-il obligatoirement un cercle ?

La réponse positive à cette question dans les conditions qu'on précisera dans la suite fut l'un des premiers résultats de ce genre en systèmes dynamiques. Elle est due à R. Bowen [Bow] et retrouvée par D. Sullivan [Sul].

Il est un peu difficile d'exprimer les conditions de ce résultat à ce niveau d'exposé, c.-à-d. en termes de géométrie conforme de la sphère. Disons pour l'instant, ce qui fait recours à tout l'arsenal d'analyse complexe (en dimension 2), que ce résultat s'applique à un groupe Γ de type fini, et ayant tous ses éléments hyperboliques.

Cette dernière condition de finitude est une sorte de co-compacité qui se décrit plus agréablement en passant à la géométrie hyperbolique. En effet, la géométrie conforme de la sphère est souvent pensée comme une dégénérescence d'une "vraie" géométrie riemannienne comme suit. Réalisons la sphère de Riemann comme la sphère unité de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 . Les transformations conformes préservant l'orientation de S^2 se prolongent en transformations conformes de \mathbf{R}^3 (à strictement parler il faut y ajouter l' ∞), préservant également la boule unité ouverte \mathbf{B}^3 . Il se trouve que ces transformations restreintes à \mathbf{B}^3 , ne préservent pas seulement la structure conforme (induite de \mathbf{R}^3), mais aussi une structure riemannienne sur \mathbf{B}^3 , nécessairement conforme à la métrique euclidienne. Elle est complète et unique à une constante près. La courbure de cet espace est négative constante, égale à -1 , si on la choisit égale à la métrique euclidienne à l'origine. Il s'agit du modèle de Poincaré de la géométrie hyperbolique.

Personnellement, je suis plus "familier" avec, ce qui sera souvent plus utile pour ce qu'on fait ici, le modèle de Klein. Cela consiste à prolonger projectivement à \mathbf{R}^3 (ou plutôt à sa compactification par l'espace projectif $\mathbf{R}P^3$) les transformations conformes (toujours conformes !) de S^2 . Cette fois, la métrique obtenue est loin d'être conforme à la métrique euclidienne, mais vérifie en compensation la propriété remarquable d'avoir les mêmes géodésiques (des segments de droites).

Dans tous les cas, on notera la boule unité ouverte \mathbf{H}^3 , pour dire qu'elle est munie d'une

métrique hyperbolique.

Notre groupe discret Γ agit isométriquement sur l'espace hyperbolique \mathbf{H}^3 . Cette fois l'action est propre, car Γ est discret. Il se trouve qu'indépendamment du point x de \mathbf{H}^3 , l'ensemble limite L_Γ est exactement l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite Γx .

Un sous-ensemble important, permettant de donner une image de l'orbite Γx , est H_Γ , l'enveloppe convexe (au sens usuel dans le modèle de Klein) de l'ensemble limite L_Γ . Le groupe Γ est dit *convexe-co-compact* si le quotient H_Γ/Γ est compact.

Le résultat précédent de Bowen et Sullivan, dit qu' *un groupe quasi-fuchsien, convexe co-compact, dont l'ensemble limite est rectifiable, est en fait fuchsien*, au sens que son ensemble limite est un cercle géométrique.

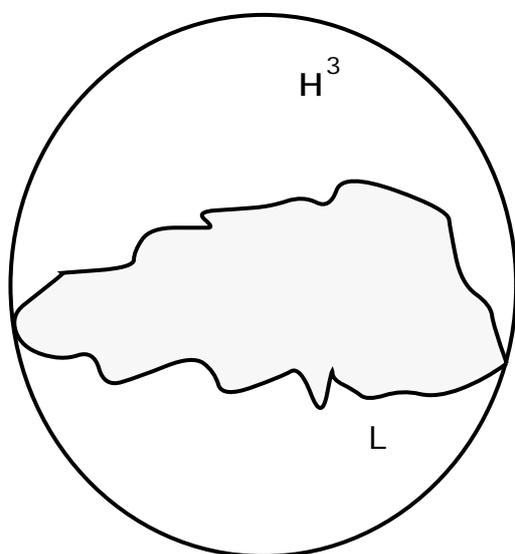


Figure 2 : Ensemble limite d'un groupe fuchsien

Maintenant, presque toutes les notions considérées, espaces hyperboliques, groupes Kleiniens, ensemble limites...etc (sauf les méthodes de preuve des auteurs précédents), se prolongent en dimension supérieure. Modulo, les notions de rectifiabilité qui seront rappelées dans la suite, le résultat que nous avons démontré dans [5] dit que

Si l'ensemble limite d'un sous-groupe convexe- co-compact d'isométries de l'espace hyperbolique \mathbf{H}^n est d -rectifiable, alors c'est une d -sphère géométrique de \mathbf{S}^{n-1} .

La mesure de Hausdorff \mathcal{H}^d ainsi que la dimension de Hausdorff dim_H se définissent pour des parties d'un espace métrique quelconque (X, ρ) . Une telle partie E est dite *d -rectifiable* (d étant un entier) si $dim_H(E) = d$, $\mathcal{H}^d(E) < \infty$, et, modulo un ensemble \mathcal{H}^d -négligeable, E est l'image d'une application Lipschitzienne définie sur une partie mesurable de l'espace euclidien \mathbf{R}^d . Une partie est dite *localement d -rectifiable* si elle est réunion dénombrable de parties d -rectifiables [Fed]. Notons que toutes ces notions ne dépendent que de la classe d'équivalence de ρ (on omettra souvent l'entier d quand il n'a aucune importance). Par exemple, une sous-variété de dimension d d'une variété riemannienne est toujours localement d -rectifiable et est d -rectifiable si elle a un volume d -dimensionnel fini.

Remarquons que dans notre énoncé ci-dessus, on ne fait aucune hypothèse topologique sur L_Γ (telle que connexité locale...). Notons aussi les deux possibilités suivantes de contre exemples pour des questions voisines :

Figure 3 : l’enveloppe “concave” d’un groupe de Schottky

1. Si au lieu de supposer que L_Γ est une courbe rectifiable, on suppose que L_Γ est contenu dans une courbe rectifiable c , invariante par Γ , alors celle-ci n’est pas nécessairement un cercle, même si L_Γ en contient une grande proportion. Commençons par un groupe de Schottky, dont l’ensemble limite est un ensemble de Cantor, qu’on suppose contenu dans un cercle géométrique \mathcal{C} . Fixons nous un angle $0 < \alpha < \pi/2$, et transformons ce dernier cercle en une courbe c de la façon suivante. On remplace chaque arc de $\mathcal{C} - L_\Gamma$, par un arc de cercle faisant un angle α avec \mathcal{C} , et situé à l’extérieur (ou à l’intérieur) du disque bordé par \mathcal{C} . Cette courbe est Γ -invariante et évidemment rectifiable, car de longueur comparable à celle de \mathcal{C} (Figure 3). Pour $\alpha = \pi/2$ et en prenant des arcs de cercle à l’intérieur du disque, on obtient l’enveloppe convexe de L_Γ .

2. Certaines des constructions précédentes peuvent être imitées en géométrie projective. Cependant, il y a des exemples pour lesquels L_Γ est une courbe convexe (partout) C^1 et Γ est un groupe de surface dont l’action sur L_Γ est topologiquement conjuguée à son action usuelle sur S^1 , provenant d’une structure hyperbolique [Ben] [Gol]. Le phénomène de rigidité s’étend quand même, avec un cran de régularité de plus, c.à-d., dans le cas C^2 .

1.3 Espaces de Hadamard. Les autres espaces symétriques à courbure négative.

Un espace de Hadamard H est une variété riemannienne (C^∞), à courbure non-positve, complète et simplement connexe. Un tel espace est difféomorphe à \mathbf{R}^n où $n = \dim(H)$, et se compactifie naturellement en une boule fermée. L’ensemble $H(\infty)$ des points idéaux, appelé la sphère à l’infini de H , est homéomorphe à \mathbf{S}^{n-1} [Eb1].

On a l’exemple précédent de l’espace hyperbolique, mais on a aussi l’exemple de l’espace euclidien. Le lecteur peut s’amuser à le décortiquer (surtout à l’infini) pour voir les différences avec le cas hyperbolique.

Ce dernier se range dans une catégorie plus large d'espaces de Hadamard dont il est le prototype. Il s'agit de ceux ayant une courbure négative (ce qui veut dire pour nous qu'elle est pincée entre deux nombres négatifs). Les autres espaces de Hadamard (comme l'espace euclidien) sont plus délicats, on reviendra succinctement à leur sujet dans la suite.

Soit donc pour l'instant H un espace de Hadamard à courbure négative et $\Gamma \subset Isom(H)$, un sous-groupe discret d'isométries. Comme dans le cas hyperbolique, l'ensemble limite L_Γ se définit bien. Pour l'enveloppe convexe c'est un peu plus délicat [And], mais la variante quasi-convexe est satisfaisante. L'enveloppe quasi-convexe $QC(L_\Gamma)$ est la réunion des géodésiques $]x, y[$ joignant des couples (x, y) de points distincts de L_Γ . L'existence et l'unicité de tels segments géodésiques est une conséquence de la courbure négative. Le groupe Γ est dit convexe co-compact si $QC(L_\Gamma)/\Gamma$ est compact.

Posons-nous donc naïvement la même question qu'auparavant : la rectifiabilité de L_Γ implique-t-elle ... ?

Paradoxalement, c'est au niveau de la conclusion espérée que la question se formule clairement. En effet, dans le cas hyperbolique précédent, le fait que L_Γ soit une sphère géométrique équivaut à dire que $QC(L_\Gamma)$ est une sous-variété géodésique. Cette notion peut donc s'étendre à H .

C'est en fait l'hypothèse de 'rectifiabilité' qui pose problème. La sphère à l'infini d'un espace de Hadamard, n'est généralement pas un objet différentiable ni même Lipschitz, permettant de parler de rectifiabilité.

A vrai dire, il y a une classe (assez large) d'espaces de Hadamard dont la sphère à l'infini est C^1 ; ceux dont la courbure est $\frac{1}{4}$ -pincée. Mais oublions les tout de suite parce qu'on n'a rien à dire à leur propos, et exigeons tout de suite une régularité C^∞ . Mais là, on restreint dramatiquement nos espaces. En effet un résultat récent de [BCG] affirme que ce sont exactement les espaces symétriques à courbure négative. Avant de dire quelques mots sur ces espaces, énonçons notre résultat :

Un groupe convexe co-compact d'un espace symétrique H , à courbure négative, dont l'ensemble limite est rectifiable, admet une enveloppe quasi-convexe géodésique dans H .

Les espaces symétriques à courbure négative se caractérisent parmi les espaces de Hadamard (à courbure négative), comme ceux qui sont isotropes : toutes les directions (i.e. les vecteurs unitaires tangents) sont équivalentes (modulo le groupe d'isométries). Il en découle que leur sphère à l'infini est homogène, d'où sa structure C^∞ (même C^ω).

Il a été toutefois admis depuis un certain temps qu'il est plus convenable de considérer la structure de Carnot-Carathéodory (conforme), naturellement définie sur cette sphère [Pan]. Elle permet de définir une notion de rectifiabilité (différente de la rectifiabilité usuelle). Notre démarche ici est plutôt classique.

2 Passage des ensembles limites des groupes Kleiniens aux ensembles invariants des flots géodésiques.

Au groupe Γ , on avait associé à l'infini son ensemble limite L_Γ et dans l'espace de Hadamard H son enveloppe quasi-convexe $QC(L_\Gamma)$. On peut également lui associer l'ensemble des géodésiques joignant les couples de points de L_Γ . C'est plus naturel de voir cet ensemble comme partie du fibré unitaire tangent T^1H . Pour un vecteur unitaire v , notons γ_v la géodésique qu'il détermine et $\gamma_v(+\infty)$ (resp. $\gamma_v(-\infty)$) le bout en $+\infty$ (resp. $-\infty$) de γ_v . Considérons :

$$[L_\Gamma] = \{v \in T^1H / \gamma_v(+\infty) \text{ et } \gamma_v(-\infty) \in L_\Gamma\}$$

Par définition, c'est un ensemble invariant du flot géodésique $(T^1H, \tilde{\phi})$.

Topologiquement, $[L_\Gamma]$ fibre au dessus de $L_\Gamma \times L_\Gamma - \{diagonale\}$, avec une fibre type \mathbf{R} . En particulier $[L_\Gamma]$ est une variété topologique si et seulement si L_Γ l'est. Egalement, dans le cas symétrique, la rectifiabilité (locale) de l'un de ces ensembles entraîne celle de l'autre (Figure 4).

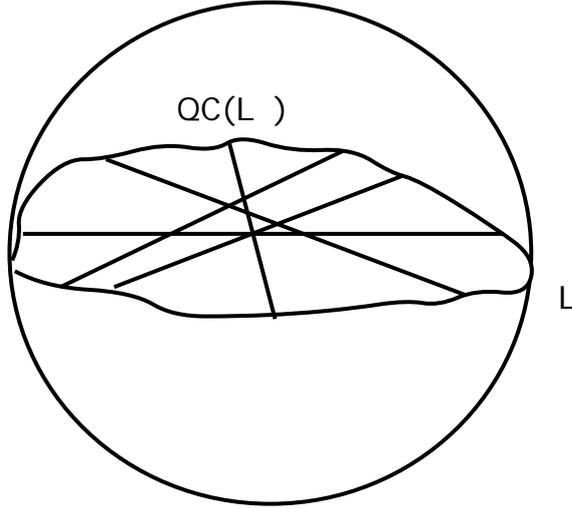


Figure 4

Remarquons enfin que dans le cas dégenéré où $QC(L_\Gamma)$ est géodésique dans H , alors $[L_\Gamma]$ n'est rien d'autre que son fibré unitaire tangent.

Le vrai résultat que nous avons démontré dans [5] et qui contient les cas cités ci-dessus, concerne les ensembles invariants des flots géodésiques plutôt que les ensembles limites des groupes Kleinien :

Soit N une partie rectifiable invariante par le flot géodésique d'une variété localement symétrique à courbure négative et complète V . Alors N est essentiellement (i.e. modulo des ensembles de mesure de Hausdorff négligeable) réunion finie de fibrés unitaires tangents de sous-variétés géodésiques et fermées dans V .

Ce résultat contient donc deux énoncés :

1. Rigidité topologique, i.e. N est la projection d'un nombre fini de parties de la forme $[L_\Gamma] \subset T^1H$.

2. Rigidité géométrique, i.e. les enveloppes quasi-convexes des ensembles limites en considération, sont des sous-variétés géodésiques.

Chacun de ces types de rigidité se prête à généralisation, pour les flots géodésiques d'autres variétés et aussi pour des systèmes dynamiques plus généraux. Dans ce qui suivra, la rigidité géométrique sera étudiée pour les flots géodésiques des variétés localement symétriques à courbure non-positive, et ensuite pour les systèmes dynamiques algébriques en général. Quant à la rigidité topologique, elle sera considérée pour les flots géodésiques des variétés à courbure négative, et ensuite plus généralement dans le cadre des systèmes d'Anosov.

3 Rigidité géométrique : Flots géodésiques des espaces symétriques de rang supérieur. Systèmes dynamiques algébriques.

Pour l'espace euclidien et ses quotients, les choses se font à la main. On a $T^1\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{S}^{n-1}$ et le flot géodésique : $\tilde{\phi}^t(x, v) = (x + tv, v)$. Pour un tore T^n , le flot géodésique s'identifie à un flot linéaire sur chaque strate $T_v = T^n \times \{v\}$. Ce flot change suivant la nature (arithmétique) du vecteur v . Le flot (T_v, ϕ^t) est isométrique et ses sous-ensembles invariants sont faciles à comprendre. Ce sont essentiellement des sous-tores géométriques de T_v . Mais une partie invariante du flot géodésique total (T^1T^n, ϕ^t) peut être (même dans le cas analytique) réunion "aléatoire" de tels sous-tores géométriques. À titre d'exemple, on peut considérer l'ensemble suivant qui détermine un feuilletage par droites de \mathbf{R}^3 , passant au quotient $T^3 = \mathbf{R}^3/\mathbf{Z}^3$. La droite contenant le point (x, y, z) admet pour vecteur unitaire $(\cos \theta(z), \sin \theta(z), 0)$, où θ est une fonction 1-périodique de z . (Figure 5).

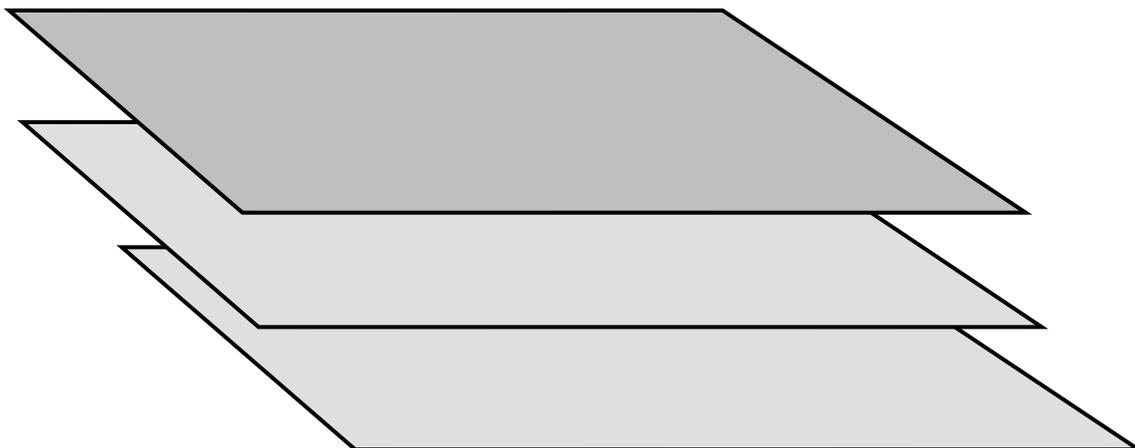


Figure 5 : Un feuilletage de \mathbf{R}^3 par droites

Un calcul direct montre que le flot sur T^3 obtenu en paramétrant ces droites par longueur d'arc, conserve la mesure de Lebesgue. Ceci se traduit aussi par le fait que la restriction du flot géodésique à l'ensemble invariant associé, préserve la mesure de Hausdorff. Ces composantes ergodiques sont à l'évidence des sous-tores géométriques.

C'est sous cette forme : conservation de la mesure de Hausdorff puis homogénéité de ses composantes ergodiques, que seront énoncés les résultats de cette section.

Une variété riemannienne (complète) est localement symétrique si pour tout $x \in V$, la symétrie géodésique s_x est une isométrie d'un voisinage de x . Rappelons que s_x est définie dans un voisinage convexe de x par $s_x(\exp_x(u)) = \exp_x(-u)$, où \exp_x dénote l'application exponentielle en x .

La variété V est dite symétrique si ces symétries sont globales. Il est connu que le revêtement universel d'une variété localement symétrique (complète) est symétrique. Ainsi nous allons raisonner dans un espace symétrique H .

3.1 Structure algébrique du flot géodésique

Soit $v \in T^1H$ et $\gamma(t)$ la géodésique qu'il détermine. On a un groupe à un paramètre de transvections : $g_v^t = s_{\gamma(\frac{t}{2})}s_{\gamma(0)}$. C'est un groupe à un paramètre d'isométries préservant γ et y induisant le transport parallèle.

Il en résulte en particulier que H est homogène, i.e. que $G = Isom(H)$ agit transitivement sur H . Mais il n'est pas vrai en général que H est isotrope, c.à-d. que G agit transitivement sur T^1H .

De l'existence des groupes à un paramètre de transvections, on déduit que les orbites de G dans T^1H sont invariantes par le flot géodésique (ceci donne presque, mais non pas tout à fait, une caractérisation des espaces symétriques...). Plus précisément soit $Gv \subset T^1H$, l'orbite d'un vecteur v . Elle s'identifie à G/K_v où K_v est le sous-groupe d'isotropie de v . Pour le flot géodésique, on a $\tilde{\phi}^t(v) = g_v^t(v)$ et par suite : $\tilde{\phi}^t(gv) = gg_v^t(v)$. C'est donc sur G/K_v , le flot $gK_v \rightarrow gg_v^tK_v$ (remarquez que ceci est bien défini car g_v^t centralise K_v , et que g_v^t n'est défini qu'à conjugaison près, car $g_v^t = gg_v^t g^{-1}$).

Soit maintenant $V = \Gamma \backslash H$, $\Gamma \subset G$, une variété localement symétrique. Le groupe G n'agit plus sur V ni sur T^1V . Cependant la stratification de T^1H en orbites de G passe en une stratification de T^1V , également invariante par le flot géodésique ϕ^t sur T^1V . Tout cela découle du fait que la partition de T^1H est Γ -invariante, car $\Gamma \subset G$. La strate projection de Gv s'identifie à $\Gamma \backslash G/K_v$, et le flot géodésique dessus à : $\Gamma gK_v \rightarrow \Gamma gg_v^tK_v$. Ceci conduit naturellement à la notion suivante :

3.2 Systèmes dynamiques algébriques.

Un système dynamique algébrique consiste en la donnée : d'un groupe de Lie G et de trois sous-groupes Γ, K et g^t tels que :

i) Γ est discret (mais pas nécessairement un réseau),

ii) K est compact,

iii) g^t est un groupe à un paramètre centralisant K : $g^t k = k g^t$ pour tout $k \in K$.

Ceci détermine un flot : $\phi^t(\Gamma x K) = \Gamma x g^t K$ sur $M = \Gamma \backslash G/K$. Un tel flot est dit algébrique [Tom].

Ce qui précède dit que le flot géodésique d'une variété localement symétrique est naturellement stratifié en flots algébriques.

L'espace symétrique $SL(n, \mathbf{R})/SO(n)$ est un espace symétrique universel au sens que tout espace symétrique à courbure non-positive s'y plonge isométriquement et géodésiquement, pour un certain n [Eb2]. Son espace tangent au point base $1.SO(n)$, quotient de l'algèbre de Lie de $SL(n, \mathbf{R})$ par celle de $SO(n)$, s'identifie à :

$$\mathcal{P} = \{A, \text{matrice } n \times n, \text{symétrique, et } \text{trace}(A) = 0\}$$

Pour $A \in \mathcal{P}$, $g_A^t = \text{exp}tA$. Ainsi le flot géodésique restreint à la strate contenant A , s'identifie au flot algébrique déterminé par le groupe à un paramètre $\text{exp}(tA)$ agissant à droite sur $SL(n, \mathbf{R})/Z_A$, où Z_A est le centralisateur de A dans $SO(n)$. En fait, puisque le groupe à un paramètre $\text{exp}(tA)$ n'est défini qu'à conjugaison près, on peut dire qu'on obtient de cette façon tous les flots algébriques sur $SL(n, \mathbf{R})/Z_A$ avec A une matrice \mathbf{R} semi-simple, c.à-d., semi-simple et à spectre réel, ou de manière équivalente, conjuguée à une matrice symétrique.

En fait réciproquement, et très vaguement, tout flot algébrique, donné par un groupe à un paramètre g^t , à générateur infinitésimal \mathbf{R} semi-simple, se plonge comme sous-flot d'une strate du flot géodésique d'une certaine variété $V = \Gamma \backslash SL(n, \mathbf{R})/SO(n)$...

Soit $N \subset \Gamma \backslash G/K$, un sous-ensemble invariant d'un flot algébrique défini par un groupe à un paramètre \mathbf{R} semi-simple. Nous avons démontré dans [5] :

Si N est rectifiable, alors le flot préserve la mesure de Hausdorff sur N . Les composantes ergodiques de cette mesure sont (localement) homogènes, au sens précis que ce sont des parties fermées de $\Gamma \backslash G/K$, projections d'orbites $Lv \subset G/K$, où L est sous-groupe de Lie de G .

Cet énoncé s'étend évidemment aux ensembles invariants des flots géodésiques des variétés localement symétriques.

Remarques.

1. On définit des difféomorphismes algébriques, en prenant pour g^t , un groupe à un paramètre discret, ce qui équivaut à la donnée de g^1 . Des considérations de produits semi-directs, permettent de montrer l'équivalence avec la définition classique à l'aide d'automorphismes affines sur des quotients de groupes de Lie. On a à titre d'exemple les difféomorphismes linéaires des tores. Ainsi notre rigidité géométrique dit qu'un ensemble rectifiable invariant par une application $A \in SL(n, \mathbf{Z})$, \mathbf{R} semi-simple, admet pour composantes ergodiques, des sous-tores géométriques.

2. Il n'est plus vrai, comme en courbure négative, que les composantes ergodiques correspondent aux fibrés unitaires tangents de sous-variétés géodésiques, ou à des composantes ergodiques de celles-ci.

3. Transversalement aux flots qu'on considère ici, il y a les flots (algébriques) unipotents (i.e. le spectre du générateur infinitésimal du groupe à un paramètre g^t est réduit à $\{0\}$). Ils ont suscité de grands travaux couronnés par la résolution par M. Ratner de la conjecture de Raghunathan (voir [Gh1] pour un rapport sur la question) . Cette dernière affirme que les composantes ergodiques de toute mesure de probabilité invariante sont localement homogènes.

4. Remarquons que notre résultat est dans un certain sens optimal. Sans l'hypothèse de rectifiabilité, dans notre situation, contrairement à celle des flots unipotents, les exemples "pathologiques" abondent (voir [Sta] et la section suivante). Remarquons aussi que contrairement à l'usage, nos ensembles invariants ne sont pas supposés fermés et peuvent même être denses. Insistons cependant sur le fait que nos énoncés doivent être compris au sens de la théorie ergodique, c.à-d., qu'ils s'appliquent après avoir négligé ce qui est négligeable.

On peut dire dans un certain sens que la rigidité ci-dessus concerne les mesures "géométriques" (i.e. rectifiables) de notre flot plutôt que ses ensembles invariants.

4 Rigidité topologique : Variétés à courbure négative variable. Ensembles invariants des systèmes d'Anosov.

La plus importante propriété du flot géodésique d'une variété riemannienne à courbure négative, est certainement son caractère hyperbolique, c.à-d. qu'il est un flot d'Anosov.

Par ailleurs, les systèmes d'Anosov se rencontrent naturellement en systèmes dynamiques, quand on cherche une formulation infinitésimale de la stabilité structurelle. En effet, un point stationnaire d'un champ de vecteurs est structurellement stable, au sens que la configuration topologique (locale) des trajectoires est invariante sous de petites perturbations, exactement lorsque le difféomorphisme,

temps 1 (ou n'importe quel temps constant fixé) du flot de ce champ est hyperbolique, c.à-d., n'ayant pas de valeurs propres sur le cercle unité.

En généralisant à un sous-ensemble invariant quelconque au lieu d'un point fixe, et en particulier à la variété ambiante elle-même, on tombe sur la définition de flots d'Anosov disant que le fibré tangent de la variété est scindé en somme directe de trois sous-fibrés : la direction du flot et d'un fibré stable E^s (resp. instable E^u) exponentiellement contracté (resp. dilaté) par le flot. On peut évidemment aussi parler de difféomorphismes d'Anosov.

Remarque 4.1 *Même s'ils ne sont pas encore des objets courants en dehors de la théorie topologique des systèmes dynamiques, les systèmes d'Anosov semblent être pertinents pour décrire certains phénomènes, d'une certaine complexité, de la vie courante. Voici un exemple, réel, mais comme les systèmes d'Anosov eux-mêmes, difficile à "assimiler"... Pour une personne ayant une qualification donnée, le salaire qu'elle pourrait recevoir dépend du pays où elle vit. Les biens qu'elle achète également. La transformation décrivant la variation du (salaire, prix) est normalement conforme, ou à la limite "quasi-conforme". Il se trouve qu'elle est parfois de type Anosov : le salaire diminue et les prix augmentent ! Inutile de donner des exemples particuliers. C'est une réalité pathologique pour laquelle la dynamique de type Anosov, pourrait être un bon outil de modélisation.*

On savait d'après Birkhoff et Smale [Sma] comment construire des "fers à cheval" qui sont (entre autre) des sous-ensembles fermés (ce qui sera toujours sous-entendu dans cette section) invariants, topologiquement équivalents à des systèmes dynamiques symboliques. A leur tour, ces systèmes contiennent divers types de sous-ensembles invariants (par exemple des minimaux non triviaux).

Par exemple, pour le flot géodésique d'une variété compacte $V = H/\pi_1(V)$, à courbure négative, on peut trouver des groupes de Shottky $\Gamma \subset \pi_1(V)$, i.e. Γ est de type fini, convexe co-compact et à ensemble limite de type Cantor. L'ensemble invariant $[L_\Gamma]/\Gamma$ est (essentiellement) plongé comme sous-ensemble invariant du flot géodésique sur T^1V .

Pire, il y a d'après Hancock [Han], des sous ensembles invariants de codimension topologique 2, dignes du qualificatif "étrange" ou "fractal", inventé, pour décrire des situations similaires (c.à-d. hyperbolique).

Bref, il est assez raisonnable, comme nous allons faire, en espérant une sorte de rigidité topologique, de se restreindre aux ensembles invariants qui sont des sous-variétés compactes de classe C^1 .

Fixons donc nos notations : (M, ϕ^t) est un flot ou difféomorphisme d'Anosov et $N \subset M$ est une sous-variété compacte (sans bord) de classe C^1 . Ce niveau de régularité de N nous permet de regarder également son fibré tangent TN , comme sous-ensemble invariant de TM muni du flot (ou difféomorphisme) tangent (il est parfois convenable de compactifier ce système en passant à son projectivité). Les propriétés d'attraction des fibrés stable et instable, suggèrent que le scindement d'Anosov de TM passe en un scindement analogue pour TN . Ceci veut dire en d'autres termes que les projections de TN sur E^s et E^u , coïncident avec ses intersections avec ceux-ci.

Ceci est en fait équivalent à dire que le système (N, ϕ) lui-même est de type Anosov. La question (due à Hirsch [Hir]) qu'on est ainsi en train de se poser est l'héridité du caractère Anosov (remarquez que cette question n'a de sens que pour des sous-variétés C^1 invariantes).

Remarquons qu'au niveau de ce raisonnement infinitésimal, la question peut se poser simplement pour une sous-variété N qui est un ensemble hyperbolique d'un système (M, ϕ^t) , c.à-d. que le scindement, stable-instable de TM n'est défini que le long de N .

La propriété intrinsèque, équivalente, vérifiée par un tel système (N, ϕ^t) , est appelée suivant Mañé, *quasi-Anosov* [Ma1].

La question générale devient donc : *Un système quasi-Anosov est-il Anosov ?*

La réponse par [F-R] était négative. Mais la question restreinte pour les quasi-Anosov qui sont en fait plongés dans des systèmes d'Anosov reste ouverte. Il s'agit d'une question de nature globale.

Mañé [Ma2] y avait répondu positivement dans le cas des difféomorphismes d'Anosov des tores. Il avait utilisé pour ce faire le résultat de Manning affirmant que tous ces difféomorphismes sont

topologiquement conjugués à des difféomorphismes linéaires. Notons cependant que la question elle-même n'est pas invariante par conjugaison topologique, car on ne considèrerait que les sous-variétés C^1 .

Nous avons traité dans [7] pratiquement tous les systèmes d'Anosov classiques, et avons démontré le résultat suivant, s'appliquant à une classe de systèmes, saturée par conjugaison topologique :

La restriction à une sous-variété C^1 invariante par un système d'Anosov, de type "splitting" ou topologiquement équivalent au flot géodésique d'une variété à courbure négative, est un système d'Anosov.

Les systèmes d'Anosov de type "splitting" sont ceux pour lesquels, dans le revêtement universel, les feuilletages stable et instable forment un produit global, c.à-d. qu'il existe un homéomorphisme global les envoyant sur des feuilletages triviaux définis par des facteurs supplémentaires d'un espace euclidien. Remarquons que de l'héredité de la propriété d'Anosov dans ce cas découle celle de la propriété splitting elle aussi.

Dans le cas des flots géodésiques, on a la rigidité topologique posée en §2 :

Une sous-variété C^1 compacte N invariante par le flot géodésique d'une variété $V = H/\pi_1(V)$ à courbure négative, est de la forme $[L_\Gamma]/\Gamma$, où $\Gamma \subset \pi_1(V)$ est un sous-groupe convexe co-compact.

On sait aussi que lorsque $\dim(N) = 3$, alors N est "naturellement" topologiquement équivalent au flot géodésique d'une surface à courbure négative. Mais on ne sait pas si cela est également vrai en dimension supérieure, c.à-d. l'héredité du fait d'être topologiquement équivalent à un flot géodésique d'une variété compacte à courbure négative.

Conjecturellement, tous les difféomorphismes d'Anosov sont splitting, puisque c'est le cas des infra-nil-automorphismes d'Anosov.

Par contre, on n'ose plus rien conjecturer sur une classification des flots d'Anosov, même en dimension 3. Voir [Bar] pour un rapport sur des constructions d'exemples en dimension 3, qui ne sont ni splitting ni topologiquement équivalents à des flots géodésiques. En cette dimension, les sous-variétés invariantes (propres) sont des orbites périodiques. D'autre part, il découle de ce qui précède, qu'ils ne peuvent pas non plus se plonger dans des flots géodésiques de variétés à courbure négative, ou des flots d'Anosov de type Splitting.

Quant à l'héredité du caractère Anosov en général, elle semble une question piège puisqu'elle suppose une meilleure compréhension des systèmes d'Anosov eux mêmes, ce qui ramène à des questions classiques, plus dures!

Partie II

Géométrie riemannienne. Feuilletages géodésiques et immersions isométriques

5 Constructions.

Nous étudions dans cette partie des questions sur les feuilletages géodésiques et leur relations avec des problèmes de géométrie.

5.1 Un quasi exemple.

Soit $\sigma : S \rightarrow S$ un difféomorphisme pseudo-Anosov d'une surface compacte (sans bord) S . Sur la variété $V = S \times [0, 1]/(x, 0) \sim (\sigma x, 1)$, suspension de σ , considérons \mathcal{F} , le feuilletage de dimension 1 déterminé par le flot suspension, c.à-d. par le facteur $[0, 1]$.

Une construction générale et élémentaire permet de montrer qu'il existe une métrique g_1 pour laquelle les feuilles de \mathcal{F} sont des géodésiques, en fait minimisantes dans le revêtement cyclique $S \times \mathbf{R}$.

Infiniment moins élémentaire est la preuve par Thurston (voir [Ota]) que V admet une métrique hyperbolique g_0 , i.e. à courbure constante -1 .

Dans \mathbf{H}^3 le revêtement universel de V , ces deux métriques déterminent des distances d_0 et d_1 (globalement) équivalentes car V est compacte. Ainsi les feuilles du relevé $\tilde{\mathcal{F}}$, qui sont des géodésiques minimisantes pour d_1 sont (uniformément) quasi-géodésiques au sens de d_0 (c.à-d. que le long d'une telle feuille les distances intrinsèques et extrinsèques sont équivalentes). La théorie générale des espaces hyperboliques (mais ici au sens de Gromov) nous donne :

Il existe une application $\tilde{f} : \mathbf{H}^3 \rightarrow \mathbf{H}^3$ continue, homotope à l'identité et envoyant injectivement toute orbite de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur une géodésique hyperbolique. Toutes ces données sont $\pi_1(V)$ équivariantes et déterminent une application ayant les mêmes propriétés $f : V \rightarrow V$.

En fait, en orientant $\tilde{\mathcal{F}}$, on peut associer à toute feuille \tilde{F} ses deux bouts à l'infini : $p_{-\infty}(\tilde{F})$ et $p_{+\infty}(\tilde{F})$. La géodésique $\tilde{f}(\tilde{F})$ n'est rien d'autre que $]p_{-\infty}(\tilde{F}), p_{+\infty}(\tilde{F})[$.

Question. f est-elle (ou peut-elle être choisie) injective, de telle façon que V supporte un feuilletage continu par géodésiques hyperboliques ?

Notons les deux faits suivants suggérant une réponse positive à cette question :

1. L'application bord, $\tilde{F} \rightarrow (p_{-\infty}(\tilde{F}), p_{+\infty}(\tilde{F}))$ est injective. Ainsi l'application :

$$h : x \in V \rightarrow h(x) = \{ \text{vecteur unitaire à } f(\mathcal{F}_x) \text{ en } f(x) \} \in T^1V$$

est elle aussi une immersion topologique injective de V dans T^1V .

2. Il y a des exemples (ceux de [CLR] qui fibrent sur le cercle), pour lesquels il existe une partie G_δ dense R , telle que : pour $x \in R$, $f(\mathcal{F}_x)$ est une géodésique simple (i.e. sans self-intersection) et dense dans V .

La réponse à la question d'injectivité de f , qui se trouve dans [2], sera rappelée plus loin.

5.2 Immersions isométriques.

On apprend au premier cours de géométrie “intrinsèque”, à différencier entre les surfaces *planes* et les surfaces *plates* dans l'espace euclidien. Les premières sont contenues dans des plans et les secondes sont simplement à courbure de Gauss nulle. Des exemples de ces dernières sont les cônes et cylindres généralisés. Modulo rotation de l'espace, ces derniers consistent en la donnée d'une section s , c.à-d. une courbe de Jordan lisse horizontale, et la saturer par les droites verticales (Figure 6).

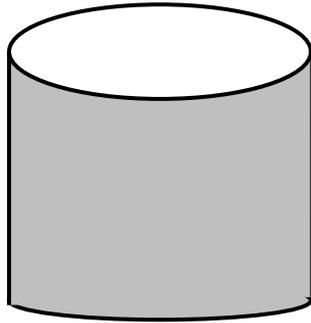


Figure 6 : Un cylindre plat

On voit sur cet exemple que même si le cylindre n'est pas plan, il l'est à un deuxième ordre. On veut dire par cela qu'il est engendré par des droites. C'est un fait général : *une surface plate de l'espace euclidien est engendrée par des droites le long desquelles, son plan tangent est parallèle* [Spi].

Notons cependant, qu'en dehors du cas analytique, une surface plate, peut contenir une partie (strictement) plane et une autre *replée* comme on vient de le décrire. Dans le cas du cylindre ci-dessus, la partie plane correspond aux segments de droites contenus dans sa section s (c'est le pur hasard qui permet dans cette situation de prolonger les droites génératrices à la partie plane).

En général, le défaut de planitude (i.e. géodésibilité) d'une sous-variété V d'une variété riemannienne W (tout étant C^∞ dans cette section), se mesure à l'aide de sa seconde forme fondamentale. Rappelons que c'est une forme (vectorielle) bilinéaire symétrique π .

L'espace plat Fl_x de V en x est le noyau de π_x :

$$Fl_x = \{X \in T_x V / \pi_x(X, Y) = 0, \forall Y \in T_x V\}$$

On a la propriété suivante d'intégrabilité dans le cas des sous-variétés des variétés à courbure constante, généralisant le constat ci-dessus sur les surfaces plates de l'espace euclidien [Gr2] :

Supposons la variété ambiante W à courbure constante. Alors, dans l'ouvert \mathcal{U} (éventuellement vide) où sa dimension est minimale, l'espace plat Fl est intégrable et ses feuilles sont géodésiques dans W (et à fortiori dans V). On l'appellera le feuilletage plat de V et notera souvent $\mathcal{F}l$.

De plus lorsque V elle aussi a la même courbure constante que W , alors $\dim(\mathcal{F}l) \geq 2\dim(V) - \dim(W) = \dim(V) - \text{codim}(V)$.

Cet énoncé admet certaines améliorations et généralisations à des situations similaires, surtout dans sa seconde partie, algébrique (voir par exemple [Flo]). Notons que la difficulté majeure réside dans le fait que $\mathcal{F}l$ n'est défini que dans \mathcal{U} qui est généralement un ouvert propre de V .

5.3 Feuilletages locaux

Un feuilletage “partiel” $\mathcal{F}l$ d’une variété V , défini sur un ouvert \mathcal{U} , ne pourrait avoir aucun intérêt s’il ne vérifiait pas une certaine propriété de complétude.

On vérifie dans le cas des surfaces plates de l’espace euclidien, qu’ en suivant une droite génératrice (i.e. une feuille de $\mathcal{F}l$), on ne peut pas atteindre la partie plane (l’explosion de la dimension n’arrive que transversalement).

Pour mieux formuler ce fait, introduisons une notion de complétude relative d’une sous-variété F dans une variété riemannienne V . On dira que F est *relativement complète* dans V si : *toute suite de Cauchy de F , divergente (i.e. n’admettant pas de limite) dans F , est également divergente dans V .* Cela signifie en d’autres termes qu’une géodésique de F est prolongeable dans F , tant qu’elle est prolongeable (en tant que courbe) dans V . Par exemple lorsque V est complète, alors F est relativement complète si et seulement si elle est complète (pour la métrique induite).

On peut maintenant renforcer l’énoncé ci-dessus :

Les feuilles du feuilletage plat d’une sous-variété V d’une variété à courbure constante, sont relativement complètes dans V .

On définit un *feuilletage local* d’une variété V comme la donnée d’un couple $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{U} \subset V$ est un ouvert et \mathcal{F} est un feuilletage de \mathcal{U} , à feuilles relativement complètes dans V . C’est ainsi le cas du feuilletage plat d’une sous-variété d’une variété à courbure constante.

On note souvent un tel objet \mathcal{F} , c.à-d., en omettant le *support* \mathcal{U} .

Ceci n’est pas un objet standard de la théorie (topologique ou géométrique) des feuilletages, qui privilégie souvent les variétés compactes. Les feuilletages locaux des variétés compactes sont des objets intermédiaires entre les feuilletages de variétés ouvertes (leurs supports) et ceux des variétés compactes (ambiantes, par rapport auxquelles les feuilles sont relativement complètes). Ce qui précède donne une motivation, qui n’est pas la seule, pour la considération de tels feuilletages, surtout dans un cadre géométrique. Les résultats qui suivent montrent qu’il n’est pas inutile de les étudier indépendamment des problèmes géométriques qui les engendrent.

Ce qui nous intéresse ici c’est les feuilletages géodésiques locaux, c.à-d. à feuilles géodésiques (dans la variété ambiante V).

6 Destructions.

6.1 Etude dynamique.

Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un feuilletage local d’une variété V . Notons $T^1\mathcal{F} \subset T^1V$, le fibré des vecteurs unitaires tangents aux feuilles de \mathcal{F} . La fibre au dessus d’un point $x \in \mathcal{U}$ est $T_x^1\mathcal{F}_x$.

Par définition, \mathcal{F} est un feuilletage géodésique local si et seulement si $T^1\mathcal{F}$ est un sous-ensemble invariant du flot géodésique (T^1V, ϕ^t) (l’invariance complète, c.à-d. que si $v \in T^1\mathcal{F}$, alors $\phi^t(v) \in T^1\mathcal{F}$ pour tout t tel que $\phi^t(v)$ existe dans T^1V , découle de la complétude relative des feuilles de \mathcal{F}).

Remarquons maintenant que la rigidité géométrique des ensembles invariants du flot géodésique des variétés localement symétriques à courbure négative, au cas où elle s’applique, interdit l’existence de feuilletages géodésiques locaux. En effet cette rigidité affirme qu’il existe une sous- variété géodésique $S \subset V$ telle que $T^1S = T^1\mathcal{F}$. En particulier la projection de $T^1\mathcal{F}$ dans V est contenue dans S . Or cette projection est exactement le support, ouvert, de \mathcal{F} . Une telle situation ne

peut se produire que dans un cas trivial (\mathcal{F} est de dimension ou codimension triviale).

La rigidité topologique, elle aussi (quand elle s'applique) contredit l'existence des feuilletages géodésiques, mais globaux. En effet si $T^1\mathcal{F}$ vérifie la rigidité topologique, alors $T^1\tilde{\mathcal{F}}$ est de la forme $[L_\Gamma] \subset T^1H$, où $\tilde{\mathcal{F}}$ est le relèvement de \mathcal{F} dans le revêtement universel H . Donc le support de \mathcal{F} est l'enveloppe quasi-convexe $QC(L_\Gamma)$. Donc $H = QC(L_\Gamma)$ puisque le feuilletage est global. Il s'ensuit que L_Γ coïncide avec la sphère à l'infini $H(\infty)$. Ainsi toutes les géodésiques de H sont tangentes à $\tilde{\mathcal{F}}$. Un tel feuilletage contient une seule feuille, H elle-même !

En fait la même méthode s'applique aux champs de plans géodésiques. Un tel champ \mathcal{P} , est tel qu'une géodésique qui lui est tangente en un point, lui est partout tangente.

Par exemple, l'orthogonal d'un feuilletage (ou un champ de plans) riemannien, est par définition, un champ de plans géodésique.

On peut considérer le fibré unitaire tangent $T^1\mathcal{P}$ qui est une partie invariante du flot géodésique. On montre de la même façon qu'il ne peut pas vérifier la rigidité topologique. Joint à la rigidité topologique des sous-variétés C^1 compactes invariantes par le flot géodésique des variétés à courbure négative (§4), on obtient :

Une variété riemannienne compacte à courbure négative n'admet pas de champ de plans (global) géodésique (ou riemannien) de classe C^1 .

Des tentatives de preuve de certains cas particuliers de ce résultat se trouvent dans [Wa1] et [Wa2].

Voyons maintenant quand est ce que un feuilletage géodésique \mathcal{F} , d'une variété localement symétrique à courbure négative V , vérifie-t-il les hypothèses de la rigidité géométrique.

Supposons \mathcal{F} localement Lipschitz, alors $T^1\mathcal{F}$ est localement rectifiable. Cette partie sera rectifiable si elle est de volume (i.e. de mesure de Hausdorff) fini. Mais rien ne peut l'assurer, même dans le cas C^∞ (ou C^ω), sauf si le feuilletage est uniformément Lipschitz et son support est de volume fini. Ce n'est pas loin des feuilletages globaux des variétés compactes.

Ce sera un léger raffinement de la rigidité géométrique qui s'appliquera efficacement à notre situation. En effet, par la même preuve, *la rigidité géométrique s'étend aux parties localement rectifiables, admettant des mesures finies invariantes équivalentes à la mesure de Hausdorff.*

On montrera dans ce qui suit que cela s'applique bien, dans pas mal de cas de parties invariantes de la forme $T^1\mathcal{F}$.

6.2 Conservation du volume. Systèmes dynamiques autonomes.

Dans la présente section, on commentera le résultat suivant :

Le flot géodésique préserve une mesure finie équivalente à la mesure de Hausdorff sur $T^1\mathcal{F}$, si \mathcal{F} est un feuilletage géodésique Lipschitz d'une variété V localement symétrique complète, et si le volume du support de \mathcal{F} est fini.

Avant de rentrer dans les détails, notons le contre exemple (global) suivant lorsque V est localement homogène mais non localement symétrique. Considérons \mathcal{F} le feuilletage stable du flot géodésique sur $T^1\mathbf{H}^2$. La projection $p : T^1\mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbf{H}^2$ envoie difféomorphiquement toute feuille \tilde{F} sur \mathbf{H}^2 .

On définit une métrique sur $T^1\mathbf{H}^2$ de la façon suivante. La projection envoie isométriquement toute feuille sur \mathbf{H}^2 , et une fibre $T_x^1\mathbf{H}^2$ sera munie de la métrique induite de l'espace euclidien $T_x\mathbf{H}^2$. On suppose

de plus que \mathcal{F} est orthogonal aux fibres. La métrique ainsi construite sur $T^1\mathbf{H}^2$ est homogène car elle est respectée par l'action de $Isom(\mathbf{H}^2)$. De plus le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ est géodésique, car la métrique est basique [Mol].

Sur chaque feuille \tilde{F} , il y a un sous-ensemble particulier de $T^1\tilde{F}$, ceux déterminant des géodésiques convergeant vers le même point à l'infini déterminé par la feuille elle-même. Ceux sont en d'autres termes, les orbites du flot géodésique sur $T^1\mathbf{H}^2$, contenues dans \tilde{F} . La réunion de toutes ces géodésiques est une partie A^+ de $T^1\tilde{\mathcal{F}}$, identifié à $T^1\mathbf{H}^2$. Notons A^- son opposé (par l'antipodie de $T^1\mathcal{F}$) et $A = A^+ \cup A^-$.

Considérons maintenant tout cela pour une surface compacte $S = \mathbf{H}^2/\Gamma$. Alors, l'ensemble non errant (plus précisément la fermeture de l'ensemble des points récurrents) du flot géodésique sur $T^1\mathcal{F}$, est exactement la projection de A , qui s'identifie à deux copies de T^1S . C'est bien maigre dans $T^1\mathcal{F}$. Il n'y a donc pas de mesure invariante sur ce dernier espace, équivalente à la mesure de Hausdorff.

Nous allons dans ce qui suit donner les éléments de la preuve de la conservation du volume pour des feuilletages de dimension 1, d'une variété hyperbolique (le lecteur n'aimant pas assez les champs de Jacobi, peut s'amuser à traiter le cas euclidien).

Précisément, montrons que : *si X est un champ unitaire complet à orbite géodésique sur une variété hyperbolique de volume fini \mathcal{U} , alors X préserve le volume (riemannien).*

Notons ψ^t le flot défini par X et soit $x \in \mathcal{U}$, $\gamma(t) = \psi^t(x)$, la géodésique trajectoire de x et $u \in T_x\mathcal{U}$. Le champ le long de γ , $t \rightarrow u(t) = D\psi_x^t(u) \in T_{\psi^t(x)}\mathcal{U}$ est donné par une variation infinitésimale de géodésiques. C'est donc par définition un champ de Jacobi le long de la géodésique γ . Il vérifie donc une équation reliant sa dérivée seconde covariante par rapport à γ et le vecteur courbure qu'il détermine avec le vecteur tangent à γ . Notons : $\tau^t : T_x\mathcal{U} \rightarrow T_{\gamma(t)}\mathcal{U}$, le transport parallèle, et $j(t) = (\tau^t)^{-1}(u(t))$, le transporté parallèle en x du champ de Jacobi. On a alors, dans notre cas hyperbolique, l'équation de Jacobi, à l'aide de dérivées usuelles : $j''(t) = j(t)$ (dans les cas plat et sphérique, l'équation est respectivement $j'' = 0$ et $j'' = -j$). Il s'ensuit : $j(t) = \cosh(t)u + \sinh(t)(j'(0))$, où la dérivée initiale $j'(0)$ peut s'écrire $j'(0) = A_x(u)$, avec $A_x : T_x\mathcal{U} \rightarrow T_x\mathcal{U}$ est une certaine application linéaire (déterminée par X). Le transport parallèle τ^t étant isométrique, il s'ensuit pour le Jacobien de ϕ^t en x :

$$\rho(x, t) = Jac_x(\phi^t) = det(D_x\phi^t) = det(\cosh(t)1 + \sinh(t)A_x)$$

Indépendamment de la forme exacte de A_x , il existe des fonctions mesurables c_i telles que :

$$\rho(x, t) = c_{-n}(x) \exp(-nt) + \dots + c_0(x) + \dots + c_n(x) \exp(nt)$$

où $n = dim(\mathcal{U})$. Supposons par exemple que c_n est non nulle, disons sur un sous-ensemble non-négligeable A , toutes les fonctions c_i sont continues, et $c_n(x) > 2\epsilon$. Alors pour t assez grand et $x \in A$, on a $\rho(x, t) > (\epsilon/2) \exp(t)$. Donc $Vol(\phi^t(A)) > (\epsilon/2) \exp(t) Vol(A)$. Impossible, car $Vol(\phi^t(A)) \leq Vol(\mathcal{U}) < \infty$. Ce qui achève la preuve de notre énoncé.

En général, c.à-d. pour V une variété riemannienne quelconque et γ une géodésique issue d'un point x , l'équation de Jacobi s'écrit dans T_xV , $j''(t) = B_\gamma(t)(j(t))$, où $B_\gamma(t) : T_xV \rightarrow T_xV$ est une application linéaire (symétrique par rapport à la métrique).

Sa résolution explicite, comme dans le cas hyperbolique ci-dessus, sera toujours possible, dès que cette équation est autonome, c.à-d., A_γ ne dépend pas du temps t .

C'est une propriété lourde de conséquences, puisqu'elle implique un extra-déterminisme remarquable : l'évolution du système au long du temps, même lointain, est parfaitement déterminée par les conditions initiales.

Il se trouve que ceci se réalise pour toute géodésique γ , exactement lorsque V est une variété localement symétrique.

Dans [4], on avait formulé une notion de *systèmes dynamiques autonomes*, vérifiant une propriété analogue.

On appelle *transport parallèle* au dessus d'un flot (M, ϕ^t) , tout flot $T^t : TM \rightarrow TM$, d'endomorphismes (linéaires) de TM au dessus de ϕ^t préservant une métrique fibrée sur TM : pour tout $x \in M$, $T_x^t : T_x M \rightarrow T_{\phi^t(x)} M$ est isométrique.

On dira que (M, ϕ^t) est autonome, si $D\phi^t$ commute avec un certain transport parallèle T .

Ainsi, pour tout $x \in M$, on a le flot structural $S_x^t = T_{\phi^t(x)}^{-t} D_x \phi^t = \exp(tA_x)$, où A_x est l'endomorphisme structural en x .

La conservation du volume sur une sous-variété invariante $\mathcal{U} \subset M$ de volume fini, découle comme ci-dessus, si l'on suppose que A_x est (pour tout x) diagonalisable et à valeurs propres réels.

Les flots algébriques sont naturellement autonomes. Avec les notations de 3.2, le flot structural s'identifie à $Ad(g^t)$ agissant sur le quotient des algèbres de Lie de G et K .

Les flots géodésiques des variétés localement symétriques sont également naturellement autonomes, et sont en fait, dans un sens précis, les seuls flots autonomes parmi les flots géodésiques. Les flots isométriques sont trivialement autonomes, en prenant le flot tangent lui même comme transport parallèle.

Ces deux exemples ne sont pas nécessairement algébriques, mais admettent une "stratification" en flots algébriques (on l'a vu en 3.1 pour les flots géodésiques, et c'est standard pour les flots isométriques).

Ceci montre que la classe des systèmes dynamiques autonomes donne une généralisation, non triviale, mais aussi assez rigide des systèmes algébriques.

6.3 Résultats.

Ce qui précède (6.1 et 6.2), nous permet d'énoncer :

Une variété localement symétrique à courbure négative, complète et de volume fini, n'admet pas de feuilletage géodésique localement Lipschitz (de dimension non triviale).

Une extension élémentaire des raisonnements précédents nous conduit à un résultat plus fort :

Il n'existe pas de sous-variété C^1 de volume fini, S , dans une variété localement symétrique à courbure négative V , supportant (c.à-d. S) un feuilletage (non trivial) localement Lipschitz, à feuilles complètes, et géodésiques dans V .

Enfin, la réponse à la question posée en 5.1 est : *non*. En effet *il n'existe pas de feuilletage (global) géodésique C^0 sur une variété hyperbolique compacte de dimension 3.*

Le Théorème de M. Ratner (résolution de la conjecture de Raghunathan) permet d'étendre ce résultat aux variétés (hyperboliques compactes) de dimension quelconque, mais seulement pour des feuilletages de dimension ≥ 2 . La dimension 1 engendre une dynamique hyperbolique, étrangère aux données du Théorème de Ratner (voir 3.2).

7 Applications à la géométrie. Rigidité des immersions isométriques.

On est prêt à appliquer nos résultats d'inexistence de feuilletages géodésiques à la situation dérivant de problèmes d'immersions isométriques. L'association des constructions et destructions précédentes, amène au fait que certaines immersions isométriques sont nécessairement plates, c.à.d., à image géodésique :

Une immersion isométrique d'une variété V hyperbolique complète et de volume fini, dans une autre variété hyperbolique W telle que $\dim(W) < 2\dim(V)$ est à image géodésique.

Ce résultat est faux en géométrie euclidienne. Les immersions isométriques entre tores plats sont flexibles, et les feuilletages géodésiques ne manquent pas.

En géométrie elliptique, la rigidité des immersions isométriques reste valable ([Fer], [Gr2]), alors que les feuilletages géodésiques pourraient exister. Ainsi une immersion isométrique $f : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^{2n-1}$ a pour image une n -sphère ronde, mais admet par exemple pour $n = 3$, un très beau feuilletage géodésique, la fibration de Hopf. La preuve de la rigidité n'utilise pas seulement l'existence du feuilletage plat mais aussi des extra propriétés géométriques.

La force de nos résultats d'inexistence dans le cas hyperbolique, conduit au fait suivant, faux dans les autres cas (euclidien ou elliptique) :

Une sous-variété complète connexe et de volume fini dans une variété hyperbolique est soit géodésique, soit possède (au moins) un point où sa seconde forme fondamentale est non dégénérée (ceci entraîne généralement sa rigidité par déformation isométrique).

8 Laminations géodésiques.

Les laminations géodésiques sont dans un certain sens duales des feuilletages locaux. Leurs supports sont fermés, ce qui leur assure de la continuité uniforme, qui fait défaut aux feuilletages locaux. Mais ces supports sont souvent maigres, ce qui les prive des avantages d' être ouvert, comme dans le cas des feuilletages locaux, qui sont après tout des feuilletages de variétés ouvertes.

On s'intéresse ici aux laminations géodésiques. Elles étaient, en dimension 2, un outil fondamental dans l'oeuvre de Thurston sur la géométrie en dimension 2 et 3.

Elles sont par contre rares en dimension supérieure. Il découle en effet du Théorème de Ratner qu' *une lamination géodésique de dimension > 2 sur une variété hyperbolique complète de volume fini, est triviale, au sens que c'est une réunion finie de feuilles fermées.* (voir [Gh1]).

Nous avons auparavant démontré [1] le cas particulier de la codimension 1 de ce dernier résultat (voir aussi [Sha]). Notre preuve était géométrique et touchant, d'une part des variétés hyperboliques de volume infini, et d'autres part les variétés compactes à courbure négative variable. Ces deux situations sont inaccessibles par l'approche de Ratner. Ainsi :

Toute hypersurface géodésique plongée (i.e. sans self-intersection) dans une variété compacte à courbure négative de dimension ≥ 3 , est compacte, et il n'existe qu'un nombre fini de tels objets.

Pour les variétés hyperboliques (complètes et sans condition de finitude) nous avons démontré l'estimation suivante, impliquant une propriété uniforme (et une sorte de distortion globale bornée) des hypersurfaces géodésiques plongées :

Pour $n \geq 2$, il existe une constante C_n telle que, pour toute hypersurface géodésique complète plongée S^n , dans une variété hyperbolique complète V^{n+1} , il existe $x \in S$ tel que :

$$\text{Vol}_n(B_S(x, r)) \leq C_n \text{Vol}_{n+1}(B_V(x, r))$$

où B_S et B_V sont des boules dans S et V respectivement.

Ceci permet d'améliorer l'énoncé précédent en majorant (mais assez vaguement) le nombre d'hypersurfaces géodésiques plongées d'une variété hyperbolique compacte.

Plus sérieusement, [Miy] estime la constante C_2 , en supposant V de volume fini, et à priori que S est fermée (dans V).

Plus récemment, un article [Bas], est paru, contenant des cas assez particuliers de nos résultats !

Partie III

Géométrie lorentzienne

Le modèle Kleinien de l'espace hyperbolique, auquel nous avons avoué notre préférence, était une boule dans un espace euclidien, ou mieux un espace projectif, munie de son groupe de transformations projectives. Il est difficile de résister à la tentation de franchir l'horizon, c'est-à-dire l'infini, et de voir ce qui se passe au delà (Figure 7).

Nos flots algébriques, étaient des groupes à un paramètre de translations sur des espaces homogènes G/K , à isotropie K , compacte. Il est difficile de ne pas se laisser tenter de voir K s'explorer.

Dans chacun de ces deux cas, notre curiosité nous amène à la géométrie lorentzienne. Voici ce qui relie les différentes parties de ce texte.

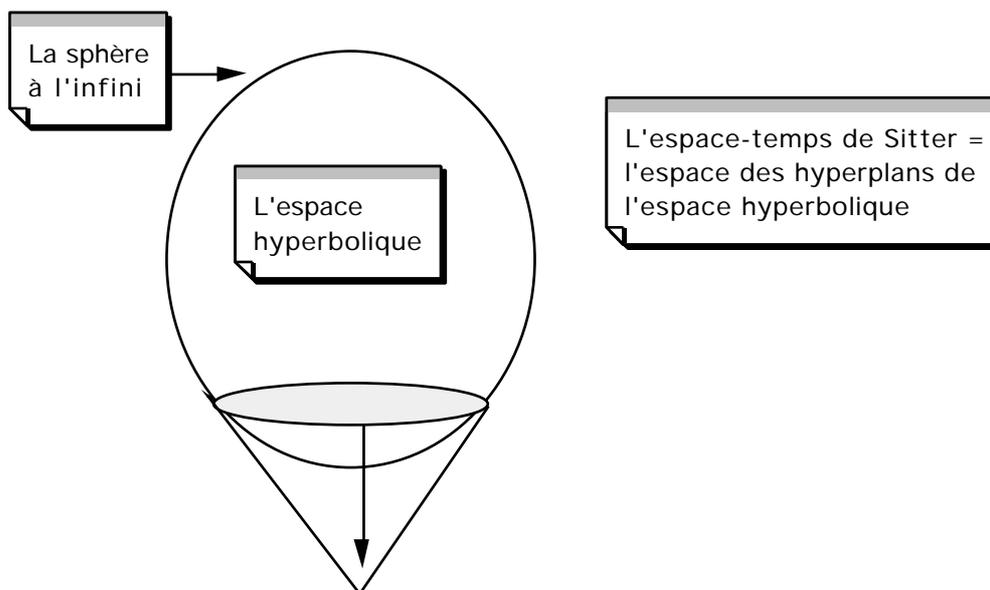


Figure 7

Une structure pseudo-riemannienne consiste en la donnée d'un tenseur symétrique non dégénéré, d'une certaine signature $- \dots - + \dots +$. Le cas riemannien correspond à $+ \dots +$ et le cas lorentzien à $- + +$. Ce dernier, auquel on se restreindra dans la suite, est donc le plus proche du cas Riemannien, ce qui fait son importance parmi les structures pseudo-riemanniennes.

Une structure lorentzienne engendre deux sortes de dynamiques : le flot géodésique et le groupe d'isométries.

La théorie étant rudimentaire, on se pose des questions de débutant :

Le flot géodésique est-il vraiment un flot, c.à-d. global (complet) ?

Le groupe d'isométries est-il compact ?

Bien sûr, pour se poser ces questions, on avait tacitement fait l'hypothèse (difficile à infirmer physiquement !) que notre structure lorentzienne est définie sur une variété compacte.

La réponse, affirmative, aux questions analogues dans le cas riemannien, est triviale. Formellement, la réponse dans le cas lorentzien, est : non. Mais la part de vérité pour l'une des questions paraît l'inverse de celle de l'autre :

1. La complétude semble un phénomène rare ! Elle est connue dans le cas (globalement !) homogène [Mar] ainsi que dans le cas plat [Car]. Ce résultat d' Y. Carrière est à notre avis, le plus révolutionnaire de la théorie.

2. La compacité du groupe d'isométries semble par contre générique. Elle n'est violée que dans des cas spéciaux et très beaux. Notre objectif dans ce qui suit est de faire leur connaissance.

9 Sur la compacité des groupes d'isométries des variétés lorentziennes compactes.

Soit M une variété lorentzienne compacte (C^∞). Notons $Isom(M)$ son groupe d'isométries et $Isom^0(M)$ la composante neutre de ce groupe. Les faits suivants sur la compacité de $Isom(M)$ ou $Isom^0(M)$ sont connus :

1. D'après D'ambra [D'A], *si M est simplement connexe et la métrique est analytique, alors $Isom(M)$ est compact.*

2. D'après Gromov [Gr3] et Zimmer [Zim], *si $Isom(M)$ contient un groupe L localement isomorphe à $SL(2, \mathbf{R})$, alors L est co-compact dans $Isom(M)$.*

Ainsi si $Isom(M)$ contient un groupe de Lie semi-simple, alors ce dernier est localement isomorphe à $SL(2, \mathbf{R})$.

On peut aussi déduire de [Zim] que $Isom(M)$ ne peut pas contenir un sous-groupe isomorphe à un réseau d'un groupe de Lie simple de rang supérieur à 2.

3. D'après [Zim], *le plus grand sous-groupe distingué nilpotent de $Isom^0(M)$ est de degré de nilpotence ≤ 2 .*

4. Une surface compacte S admettant une structure lorentzienne g , admet une caractéristique d'Euler nulle. De plus, si $Isom(S, g)$ est non compact, alors c'est un tore plat, et à indice fini près, $Isom(M, g)$ est engendré par un difféomorphisme d'Anosov linéaire.

Nous nous étions intéressé dans [9] à la dimension 3. Nous avons alors pû expliciter le cas où $Isom^0(M)$ est non compact, c.à-d. lorsque M admet un champ de Killing, à flot non précompact, ou de manière équivalente, non équicontinu :

Si (M, g) admet un flot d'isométries non équicontinu, alors g est localement homogène. De plus, ce flot respecte une (autre) métrique complète à courbure constante, nulle ou négative.

Plus explicitement :

A revêtement fini près, le flot est suspension d'un difféomorphisme d'Anosov linéaire du tore, ou est une "déformation géométrique" (voir [Gh2]) d'un groupe à un paramètre non périodique $\{g^t\} \subset SL(2, \mathbf{R})$, agissant à droite sur un quotient $\Gamma \backslash SL(2, \mathbf{R})$.

10 Feuilletages géodésiques en géométrie lorentzienne.

Comme le suggère le titre “publicitaire” de [3], les feuilletages géodésiques sont applicables. On l’a vu précédemment, en géométrie riemannienne, à propos des immersions isométriques.

Ils se définissent également bien, en géométrie lorentzienne, et promettent l’application suivante découverte dans [D-G], motivant ainsi leur étude dans [10] :

Une variété lorentzienne compacte, admettant un groupe d’isométries non compact, possède un feuilletage géodésique de codimension 1, dégénéré et de classe C^0 . En fait $\text{Isom}(M)$ se trouve naturellement compactifié par un sous-ensemble de tels feuilletages.

Par dégénéré, on veut dire que le fibré tangent au feuilletage est (partout) dégénéré, au sens que, la métrique lorentzienne y induit une métrique dégenérée (i.e. positive non définie). Si \mathcal{F} est un tel feuilletage, $T\mathcal{F}$ son fibré tangent, alors le noyau de la métrique induite est un sous-fibré $T\mathcal{N} \subset T\mathcal{F}$, de dimension 1, tangent à un sous-feuilletage \mathcal{N} , dit le feuilletage *normal* de \mathcal{F} .

Nous avons démontré dans [10], un critère de géodésibilité vérifié par le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{N})$, qui est sorte de cas limite de critères connus dans le cas riemannien :

Le feuilletage \mathcal{N} est transversalement riemannien le long de \mathcal{F} , au sens précis que tout flot (local) paramétrisant \mathcal{N} , respecte la métrique dégenérée induite sur $T\mathcal{F}$.

A titre d’exemple, un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1, défini par une action localement libre d’un groupe de Lie G , possédant un sous-groupe normal N de dimension 1, est géodésique dégenéré pour une certaine structure lorentzienne, avec un feuilletage normal \mathcal{N} , défini par l’action de N .

C’est le cas de tous les groupes agissant localement librement sur des variétés de dimension 3. En effet dans ce cas G est soit \mathbf{R}^2 soit GA le groupe des transformations affines de la droite. Les feuilletages géodésiques dégenérés permettent donc d’unifier géométriquement ces deux types d’action, pourtant à dynamiques antagonistes (voir [Gh3] et [RRW]).

Il semble même que cela permet aussi de les caractériser, au sens que tout feuilletage géodésique dégenéré (en dimension 3) soit défini par une action localement libre de \mathbf{R}^2 ou GA .

Nous l’avons vérifié dans certains cas, dont celui des feuilletages stables (ou instables) faibles des flots d’Anosov, qui sont géodésiques au sens d’une métrique lorentzienne C^∞ (les feuilletages ne sont pas supposés plus que C^0 , comme dans le cas des feuilletages obtenu par compactification du groupe d’isométries). Ils sont C^∞ difféomorphes à des feuilletages paramétrés par des actions C^∞ de GA . En fait, le feuilletage de départ est géodésique au sens d’une métrique complète à courbure constante.

11 Sur les espace-temps anti de Sitter.

En géométrie lorentzienne, les espace-temps à courbure constante sont appelés de Minkowski, de Sitter ou anti de Sitter suivant que leur courbure est respectivement nulle, positive ou négative.

Les espaces temps plats compacts sont quotients $\Gamma \backslash \mathbf{R}^{n,1}$ de l’espace-temps de Minkowski $\mathbf{R}^{n,1}$, c.à.d. l’espace vectoriel \mathbf{R}^{n+1} muni d’une forme quadratique non dégenérée de signature $- + \dots +$.

Le groupe I des transformations affines préservant cette forme est un produit semi-direct de sa partie linéaire $O(n, 1)$ par le groupe de translations \mathbf{R}^{n+1} .

Le groupe fondamental Γ est un sous-groupe de I , agissant proprement librement et uniformément sur $\mathbf{R}^{n,1}$. Difficile à imaginer si Γ ne contient pas “suffisamment de translations”.

Le Théorème de Bieberbach, mais dans le cas riemannien (c.à-d. pour l'espace euclidien), dit justement qu'à indice fini près, Γ est un réseau du groupe de translations $G = \mathbf{R}^{n+1}$.

Ce Théorème admet une version lorentzienne ([Car], [C-D] [F-G], [FGH], [G-K], [G-M]...) : à indice fini près, Γ est un réseau dans un groupe de Lie $G \subset I$, agissant simplement transitivement sur l'espace de Minkowski.

En plus du groupe des translations, on a à titre d'exemple, pour $n = 2$, le groupe de Heisenberg et le groupe *SOL*. La recherche de tels sous-groupes est évidemment plus simple que celle des groupes discrets.

Dans le cas de l'espace-temps de de Sitter, la classification des quotients compacts est immédiate : il n'y en a pas du tout ! ([C-M], [Kob]).

Le cas anti de Sitter est plus riche. Kulkarni [Kul] avait remarqué la possibilité de construction d'exemples de quotients compacts, par la méthode ci-dessus, c.à-d., à l'aide de réseau de groupes de Lie G , agissant isométriquement et proprement transitivement sur l'espace anti de Sitter universel.

Nous avons remarqué dans [11] que cette fois contrairement au cas Minkowskien, il n'y a qu'un seul groupe vérifiant ces conditions. Les quotients compacts qui en dérivent seront appelés *standards*.

En dimension 3, il existe un large spectre (continu) d'exemples dont peu sont standards ([K-R] [Mes]...).

En dimension supérieure, nous avons émis l'avis que tout pourrait être standard. Nous avons pour cela démontré que le cas échéant, Γ est algébriquement dense dans le groupe général des isométries (cela peut arriver en dimension 3, mais continûment !).

Nous avons également montré qu'en dimension supérieure, le groupe d'isométries est compact, ce qui marque une nette différence avec la dimension 3 (§9).

12 Liste des travaux, articles et publications

1. Laminations et hypersurfaces géodésiques des variétés hyperboliques. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 24, 1991, p. 171 - 188.
2. Sur les feuilletages géodésiques continus des variétés hyperboliques. Invent. math. 114, 193-206 (1993).
3. Feuilletages géodésiques appliqués. Math. Annalen. 298, (1994) 729-759.
4. Sur une notion d'autonomie de Systèmes dynamiques appliquée aux ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques. Ergodic Theory Dynamical Systems (à paraître).
5. Ensembles invariants des flots géodésiques des variétés localement symétriques. Preprint ENS Lyon 1992. Ergodic Theory Dynamical Systems (à paraître).
6. Feuilletages géodésiques des variétés localement symétriques. Preprint ENS Lyon 1992.
7. Subsystems of Anosov Systems. Amer. J. Math. (à paraître).
8. An example of a 2-dimensional no leaf. Proceedings of the Tokyo conference on Foliations (à paraître).

9. Killing fields in compact Lorentz 3-manifolds. Preprint ENS Lyon 1994.
10. Geodesic foliations in Lorentz 3-manifolds. Preprint 1994.
11. On compact anti de Sitter spacetimes. Preprint 1994.
12. Isometry groups of compact Lorentz manifolds. En préparation

13 Bibliographie complémentaire.

- [And] M. Andersson : “The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature”, *J? Diff. Geom.* 18 (1983) 701-721.
- [Bas] A. Basmajian : “ Tubular neighborhoods of totally geodesic hypersurfaces in hyperbolic manifolds”, *Invent. Math.* 117 (1994) 207-225.
- [Bar] T. Barbot : “ A generalisation Bonatti-Langevin’s example of Anosov flow and their classification up to topological equivalence”, Preprint (1994).
- [Ben] J. P. Benzecri : “Sur les variétés localement affines et projectives”, *Bull. Soc. Math. France* 88 (1960) 229-332.
- [BCG] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot : “ Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative”, Preprint (1994).
- [Bow] R. Bowen : “Hausdorff dimension of quasi circles”, *Publ. Math. IHES.* 50 (1979) 11-26.
- [C-M] E. Calabi and L. Markus : “Relativistic space forms”, *Ann. of Math.* 75 (1962), 63-76.
- [Car] Y. Carrière : “Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines”, *Invent. Math.* 95 (1989), 615-628.
- [C-D] Y. Carrière, F. D’Albo : Généralisations du 1^{er} Théorème de Bieberbach sur les groupes cristallographiques”,
- [CLR] D. Cooper, D.D. Long, A.W. Reid : “ Bundles and finite foliations”, *Invent. Math.* 118 (1994) 225-283.
- [D’A] G. D’Ambra : “Isometry groups of Lorentz manifolds”, *Invent. Math.* 92 (1988) 555-565.
- [D-G] G. D’Ambra and M. Gromov : “Lectures on transformation groups : geometry and dynamics, Surveys in Differential Geometry (Supplement to the Journal of Differential Geometry), 1 (1991) 19-111.
- [Eb1] P. Eberlein : “Geodesic flows on negatively curved manifolds I”, *Ann. of Math.* 95 (1972) 492-510.
- [Eb2] P. Eberlein : “ Surveys in geometry”, *Manuscrit* (1985).
- [Fed] H. Federer : “ Geometric measure theory”, Springer Verlag (1969).
- [Fer] D. Ferus : “ Isometric immersions of constant curvature manifolds”, *Math. Ann.* 217 (1975), 155-156.

- [Flo] L. Florit : “On submanifolds with nonpositive extrinsic crvature”, *Math. Ann.* 298 (1994) 187-192.
- [F-G] D. Fried and W. Goldman : “Three dimensional affine criystallographic groups”, *Adv. Math.* 47 (1983), 1-49.
- [FGH] D. Fried, W. Goldman, M. Hirsch : “Affine manifolds with nilpotent holonomy ”, *Comment. Math. Helv.* 56 (1981), 487-523.
- [F-R] J. Franks, C. Robinson : “A quasi Anosov diffeomorphism that is not Anosov”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 223 (1976), 267-278.
- [Gh1] E. Ghys : “Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes”, *Sém. Bourbaki.* (1991), Exposé 747.
- [Gh2] E. Ghys : “Flots d’Anosov dont les feuilletages stables et instables sont différentiables”, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 20 (1987) 251-270.
- [Gh3] E. Ghys : “Actions localement libre du groupe affine”, *Invent. Math.*, 82 (1985), 479-526.
- [G-K] W. Goldman and Y. Kamishima : “The fundamental group of a compact Lorentz space is virtually polycyclic”, *J. Diff. Geom.* 19 (1984), 233-240.
- [G-M] F. Grunewald, G. Margulis : “Transitive and quasitransitive actions of affine groups preserving a generalized Lorentz structure”, *Jour. Geom. Phys.* Vol.5, N 4, (1988) 493-530.
- [Gol] W. Goldman : “ Projective structures with fuchsian holonomy”, *J. Diff. Geom.*, 25 (1987) 297-326.
- [Gr1] M. Gromov : “ Hyperbolic groups”, *Essays in Group Theory*, S. Gersten editor, Springer (1987), 75-265.
- [Gr2] M. Gromov : “Partial differential relations”, Berlin Heidelberg, New York : Springer (1986)
- [Gr3] M. Gromov : “Rigid transformation groups”, “Géométrie différentielle ” D. Bernard et Choquet-Bruhat. Ed. Travaux encours 33. Paris. Hermann (1988).
- [Han] S. Hancock : “Construction of invariant sets for Anosov diffeomorphisms”, *J. London. Math. Soc.* 18(1978), 339-348.
- [Hir] M. Hirsch : “On invariant subsets of hyperbolic sets”, *Essays in topology and related topics.* (1970), 126-146.
- [Kob] T. Kobayashi : “Proper action on a homogeneous space of reductive type”, *Math. Ann.* 285 (1989), 249-263.
- [K-R] R. Kulkarni and F. Raymond : “3-dimensional Lorentz space- forms and Seifert fiber spaces”, *J. Diff. Geom.* 21 (1985), 231-268.
- [Kul] R. Kulkarni : “ Proper actions and psudo-Riemannian space forms”, *Advances in Math.* 40 (1981)
- [Ma1] R. Mañé : “ Quasi Anosov diffeomorphisms and hyperbolic manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229 (1977) 351-163.
- [Ma2] R. Mañé : “ Invariant sets of Anosov diffeomorphisms” *Invent. Math.* 46 (1978), 147-152.

- [Mar] J. Marden : “ On completeness of homogeneous pseudo-riemannian manifolds ” *Ind. Univ. Math. J.*, Vol 22, 11 (1973) 1065-1066.
- [Miy] Y. Miyamoto : “On the volume and surface area of hyperbolic polyhedra”, *Geom. Dedicata* 40 (1991) 223-236.
- [Mol] P. Molino : “Riemannian Foliations”, Birkhauser (1988)
- [Mes] J. Mess : “Lorentz spacetimes of constant curvature”, Preprint.
- [Ota] J. P. Otal : “ Le Théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées en dimension trois”, Preprint (1994).
- [Pan] P. Pansu : “ Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un”, *Ann. of Math.* 129 (1989) 1-61.
- [RRW] H. Rosenberg, R. Roussarie and D. Weil : “A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two”, *Ann. of Math.* 91 (1970), 449-464.
- [Sha] N. A. Shah : “Closures of totally geodesic immersions in manifolds of constant curvature” in : *Proc. Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste (1990)*, ed. E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovski, World Scientific (1991).
- [Sma] S. Smale : “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 747-817.
- [Spi] M. Spivak : “A comprehensive introduction to differential geometry”, Berkely, Publish or Perish (1979).
- [Sta] A. N. Starkov : “Structure of orbits of homogeneous flows and the Raghunathan conjecture”, *Russian. Math. Surveys* 45 (1990), 31-54.
- [Sul] D. Sullivan : “ Discrete conformal groups and measurable dynamics ”, *Bull. AMS* (1983).
- [Thu] W. Thurston : “geometry and Topology of 3-manifolds”, Princeton University (1978).
- [Tom] P. Tomter : “Anosov flows on infra-homogeneous spaces. In : Chern, S.-S., Smale, S. (eds.) *Global Analysis. Proc. Symp. Pure Math.*, vol 14, 299-327
- [Wa1] P. Walczak : “Dynamics of the geodesic flow of a foliation”, *Ergod. Th. and. Dynam. Syst.* 8 (1988), 637-650.
- [Wa2] G. Walschap : “Foliations of symmetric spaces”, *Amer. J. Math.* 115 (1993) 1189-1195.
- [Zim] R. Zimmer : “On the automorphism group of a compact Lorentz manifold and other geometric manifolds”, *Invent. Math.* 83 (1986) 411-426.