Théorie de la causalité et systèmes dynamiques aléatoires

Abdelghani Zeghib

UMPA, ENS-Lyon
http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/

Metz, 10 Février 2011

Systèmes dynamiques

(Fonctions de Lyapunov pour les équations différentielles)

Qu'ést ce que un système dynamique?

(M, G)

M espace topologique (métrisable, localement compact ou même compact...)

G groupe topologique

$G \times M \to M$ action continue

Objet: étudier le comportement à long terme de $g.x$, lorsque $g \to \infty$, i.e. g sort de tout compact de G.

Example: $G = \mathbb{Z}$: c'est la donnée d'un homéomorphisme

$G = \mathbb{R}$

groupe à un paramètre d'homéomorphismes $(t, x) \to \phi^t(x) = t.x$,

$t \in \mathbb{R} \to \phi^t \in \mathrm{Homeo(M)}$ homomorphisme

Champs de vecteurs, et équations différentielles

Variantes, e.g. catégorie Diff: M variété différentiable, G groupe de Lie, l'action lisse.

Exemples:

– $G = \mathbb{Z}$, donnée d'un difféomorphisme

– $G = \mathbb{R}$: groupe à un paramètre de difféomorphismes

$V(x) = \frac{\partial \phi^t x}{\partial t}_{|t=0}$ champ de vecteurs
ϕ^t flot de X
$t \to \phi^t x$ est la solution de l'équation différentielle $x'(t) = V(x(t))$, avec $x(0) = x$.

• Genèse de la théorie: on ne peut pas résoudre de façon exacte l'équation $x' = V(x)$, alors, on l'étudie qualitativement.

Exemple: on a passé 2 siècles à essayer de résoudre le problème de deux corps,
essayons de montrer qu'il admet certaines solutions périodiques (sans les expliciter), ou même quasi-périodique...

V. Arnold: nouveau constat d'échec!

Fonctions de Lyapunov

$f : M \to \mathbb{R}$

f intégrale première, si elle est invariante $f(\phi^t(x)) = f(x)$, $\forall x$, $\forall t$

Definition

f fonction de Lyapunov, si f continue et $f(\phi^t(x)) \leq f(x)$, pour tout x, et tout $t > 0$: f décroissante (au sens large) sur toute orbite de ϕ^t.

(ça n'existe que dans le cas dissipatif)

Exemple (figure)

(points singuliers)

– Intégrale première entraine la périodicité de solutions du pendule

– Fonction de Lyapunov entraine la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre

Fonction de Lyapunov maximale

Definition (Notation)

f fonction, $S(f) = \{x$ tel que $t \to f(\phi^t x)$ est constante $\}$ Support de f ($=$ son domaine d'invariance, son domaine de constance).

f_1, f_2 Lyapunov $\Longrightarrow f_1 + f_2$ Lypaunov
$s(f_1 + f_2) = S(f_1) \cap S(f_2)$

Fait

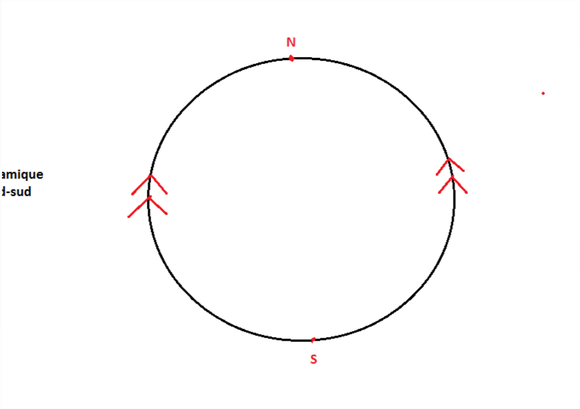
il existe une fonction de Lyapunov f_0 à support minimal (pour tout g Lyapunov, $S(g) \supset S(f_0)$)

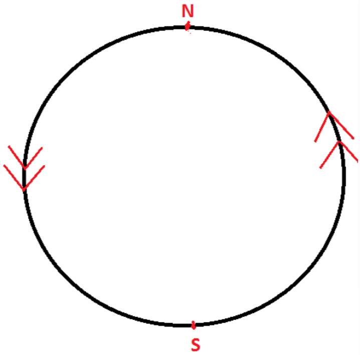
Notons $S(\phi^t) = S(f_0)$

Comprendre $S(\phi^t)$?

Exemple 1: $Per(\phi^t) \subset S(\phi^t)$
x périodique si il existe $t > 0$ tel que $\phi^t x = x$
l'orbite de x est un cercle topologique: une fonction décroissante est constante.

Exemple 2: dynamique parabolique sur le cercle (ou la sphère): une translation ($\phi^t x = x + t$ sur $\mathbb{R}$, compactifiée en $S^1 = \mathbb{R} \cup \infty$)


N
amique
l-sud
S

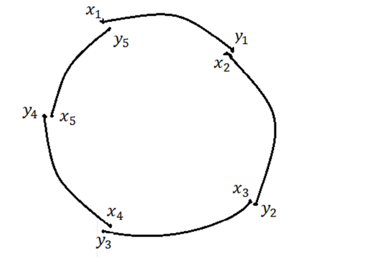

N
S

Notions de récurrence

1. Point périodique: $Per(\phi^t)$
2. Récurrent: x revient indéfiniment près de lui même: il existe $t_i \to \infty$, $\phi^{t_i} x \to x$: $Rec(\phi^t)$
3. Non-errant: il existe x_i, t_i tels que $x_i \to x$, $y_i = \phi^{t_i} x_i \to x$, et $t_i \to \infty$: $\Omega(\phi^t)$
4. Chaine-récurrent (récurrent par chaine): $\mathcal{R}(\phi^t)$

– (ϵ, T)-pseudo-orbite $(x_1, \ldots, x_n)$: il existe $t_i > T$, tels que si $y_i = \phi^{t_i} x_i$, alors $d(y_i, x_{i+1}) < \epsilon$.

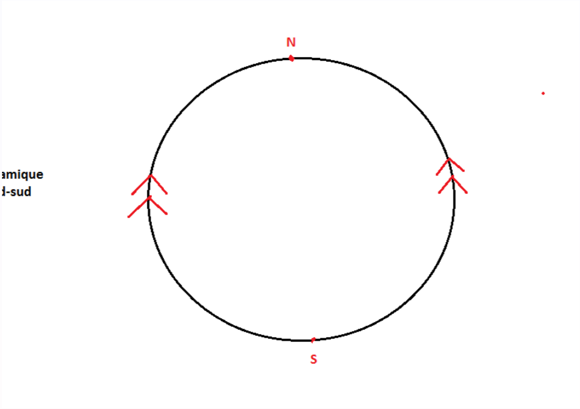
– x-récurrent par chaine, si $\forall\ (\epsilon, T)$, il existe une pseudo-orbite joignant x à x.

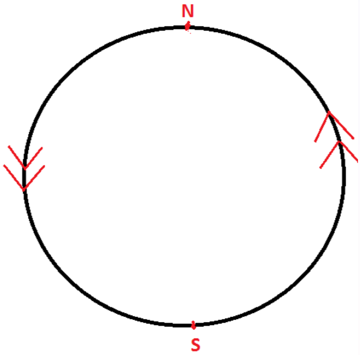

x_1
y_5
y_1
x_2
y_4
x_5
x_3
y_2
x_4
y_3

On a $Per \subset Rec \subset \Omega \subset \mathcal{R}$

Si M est compacte, $Rec \neq \emptyset$, mais Per peut être vide, e.g. flot irrationnel sur le tore,

Quelques propriétés amusantes:
$Per(Per) = Per$
$Rec(Rec) = Rec$
$\Omega(\Omega) \subset \Omega$, pas necésairement égal!
$\mathcal{R}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$


amique
d-sud
N
S


N
S

Conley

Theorem (Conley)

(théorème fondamental des SD?) Il existe une fonction de Lyapunof f dont le support $S(f)$ est contenu dans $\mathcal{R}(\phi^t)$, i.e. f est strictement décroisante sur toute orbite en dehors de l'ensemble chaine-récurrent.

Quelques auteurs: Conley, Hurley,
Nouveaux: Pierre Pageault...
Généralisable au cas: M espace métrisable compact, et aussi pour une action de $\mathbb{Z}$ i.e la donnée d'un homéomorphisme,

– Cas non-compact: adapter la définition de $\mathcal{R}$: ϵ n'est plus une constante!

On n'a pas égalité $S(f) = \mathcal{R}(\phi^t)$,
mais elle est satisfaite en général

Problème de différentiabilité

Definition

Fonction de Lyapunov au sens différentiable: f de classe C^1 et $\frac{\partial f(\phi^t x)}{\partial t)} < 0$ dans $M - S(f)$.

Enoncé folk: il existe une fonction de Lyapunov au sens Diff dont le domaine de constance est contenu dans l'ensemble récurrent par chaines.

Mais pas de preuve convaincante (à venir P. Pageault, A. Fathi...)

Difficulté: Comment passer de "submersion topologique" à "submersion différentiable:

exemple $x \in \mathbb{R} \to x^3 \in \mathbb{R}$

Cas particulier

Lorsque $\mathcal{R} = \emptyset$,
Il existe $f : M \to \mathbb{R}$ est une submersion,
Le champ de vecteurs X (engendrant le flot ϕ^t)

X est transverse au feuilletage niveaux d'une submersion

Réciproquement, tout se construit de cette façon,

De plus, on peut trouver certaine métrique riemannienne:
$X = -\overrightarrow{grad} f$,

Éléments de preuve

Attracteur: A tel qu'il existe U voisinage de A, vérifiant $\phi^t U \subset U$, pour $t > 0$, et $\cap_{t>0}\phi^t(U) = A$

$B(A) = \cup_{t<0}\phi^t U =$ bassin d'attraction

Proposition

Tout point de $M - \mathcal{R}$ appartient au basin d'attraction $B(A)$ d'un attracteur A contenu dans $\mathcal{R}$.

Il suffit de démontrer le théorème de Conley pour un attacteur.

Exemple: $A = 1$ point

Example: $M = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $\phi^t(z) = e^{(a+ib)t}z$ groupe à un paramètre de simulitides,

$X(z) = (a + ib)z$

$f(z) = \| z \|$

$Y(z) = (a + ib)z + F(z)$, avec F d'ordre supérieur: $d_0F = 0$

f existe...

Théorie de la causalité

( )

Ordres sur un espace vectoriel

E espace vectoriel

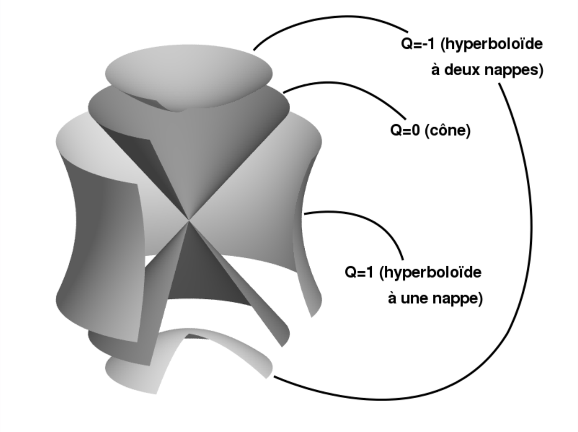
Ordre: $\leq$ compatible avec l'addition $\iff$ invariante par translation

On suppose l'ordre compatible avec la topologie: si $x_n \leq a$, alors $\lim x_n \leq a$

Cône positif $C = \{x, 0 \leq x\}$, cône convexe fermé,

Cône quadratique

Cône quadratique: la situation la plus homogène,
C est une composante connexe de $\{x, q(x) \leq 0\}$, q forme quadratique
Exemple: $\mathbb{R}^3$: $q = -z^2 + x^2 + y^2$
En général: q est une forme quadratique lorentzienne i.e. de signature $- + \ldots +$ ou $+ - \ldots -$
q est une forme (non-dégénérée) ayant une représentation $q = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$ (dans une certaine base)
– Situation la plus proche de formes définies positives.


Q=-1 (hyperboloïde
à deux nappes)
Q=0 (cône)
Q=1 (hyperboloïde
à une nappe)

Supériorité de la signature lorentzienne

Fait

- Le cône isotrope $q^{-1}(0) - 0$ est connexe sauf si q est lorentzienne, auquel cas il admet deux composante connexes convexes.
– Le cône négatif $q^{-1}(< 0)$ est connexe sauf si q est lorentzienne.

Donc, seules les formes lorentziennes donnent lieu à un ordre: ça consiste en le choix d'une composante du cône isotrope.

Fait

Deux formes ont le même cône isotrope ssi elles sont proportionnelles.

Exo: si $q_1^{-1}(0) = q_2^{-1}(0)$ alors q_1 et q_2 sont proportionnelles.

Exemple, espace de Minkowski

En général (E, q), E espace vectoriel, q forme lorentzienne, est dit espace de **Minkowski** (comme espace euclidien)

– Dimension 3: espaces de polynômes, ordre sur les espaces de fonctions
$P(x) = ax^2 + bx + c$
Espace $\mathcal{P} = \{(a, b, c)\}$ espace de ces polynômes
Ordre $P_1 \leq P_2$: $P_1(x) - P_2(x) \leq 0$, pour tout x,
$0 \leq P \iff a^2 - 4bc \leq 0$
Forme quadratique sur $q = a^2 - 4bc$

Situation non-linéaire, groupes de Lie

G groupe,
Un ordre invariant à gauche: $x \leq y \Longrightarrow L_g(x) \leq L_g(y)$ où $L_g(x) = gx$ ....

Exemple: G admet un ordre total $\iff$ G agit fidèlement sur $\mathbb{R}$ (tout élément g de G agit non-trivialement)

Exemple: $S\tilde{L_2}(\mathbb{R})$ (agit sur $\mathbb{R}$)

$SL_2(\mathbb{R})$: ordre "local" donné par la cône nilpotent (ici le cône isotrope de la forme de Killing) sur l'algèbre de Lie.

Localisation: géométrie lorentzienne conforme

Une métrique lorentzienne g sur une variété M consiste en la donnée de champ de formes quadratiques Lorentziennes: un tenseur (lisse) qui est une forme lorentzienne sur l'espace tangent en tout point.

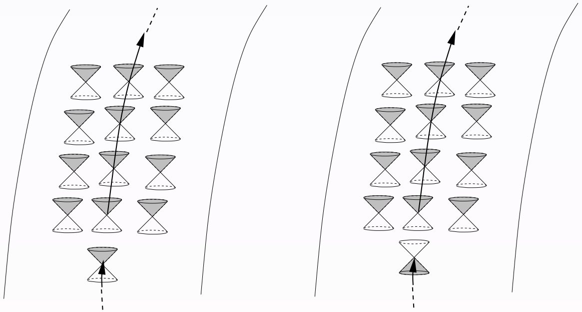
Exemple: (N, h) variété riemannienne
$M = N \times \mathbb{R}$, $g = -dt^2 + h$
$w : N \to \mathbb{R}*$
$g_w = -w^2(t)dt^2 + h$ (produit tordu)

$C_x \subset T_x M$ cône isotrope en x
Orientation temporale: choix continue d'une composante de $C_x - 0$

$x \longrightarrow C_x^+$ cône positif

g est conforme à g' s'il existe une fonction f telle que $g' = fg$.
Structure lorentzienne conforme: classe d'équivalence pour cette relation

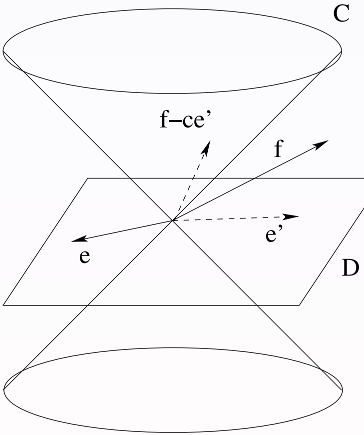
C'est équivalent à la donnée d'un champ de cônes quadratiques



Caractères causaux

$u \in T_x M$

- u est causal si $g_x(u, u) \leq 0$: u appartient au cône positif
- u temporel si $g_x u, u) < 0$
- u de type espace si $g_x(u, u) > 0$


C
f−ce'
f
e'
e
D

Definition

Une courbe $c : [a, b] \to M$ *est causale si elle est Lipschitz et presque partout* $c'(t) \in C^+_{c(t)}$

Courbe causale inextensible (maximale):

Pré-odre (ou "ordre local"): $p \leq q$ s'il existe une courbe causale c telle que $c(a) = p$ et $c(b) = q$.

Dans le cas de l'espace de Minkowski: cet ordre coincide avec l'ordre global

Univers

Modèle: une variété lorentzienne de dimension 4.

Les points (t, x): événements

Une particule (ou n'importe quel être): courbe causale (ou plus précisément temporelle)

Le pré-ordre: "cause à effet" $p \leq q$:

Temps

Definition

Une fonction $T : M \to \mathbb{R}$ est une fonction temps, si T est (strictement) croissante sur toute courbe causale.

Une fonction temps au sens différentiable: T de classe C^1 et $d_x T$ (strictement) positive sur C_x $\iff$
$\nabla_x T$ champ de vecteurs causal non-singulier

Si T existe, elle n'est pas unique (effet relativiste),

Exemple: Minkowski $\mathbb{R}^4 : -t^2 + x^2 + y^2 + z^2$
$T(t, x, y, z) = t$ est un temps

$T \circ g$, g isométrie, i.e $g \in$ groupe de Poincaré $SO(1,3) \ltimes \mathbb{R}^4$ est un temps

$T(t, x, y, z) = t + f$, f petite au sens C^1

Axiomes de causalité

1. M causale: il n'existe pas de **courbe causale fermée** ("cercle vicieux") $\iff$ $\leq$ est un ordre
2. Fortement causale: Pas de courbe causale presque fermée; – tout point admet un voisinage V tel que, si $x, y \in V$, et $x \leq y$, alors toute courbe causale les joignant est contenue dans V.
3. Stablement causale: il existe une métrique g' dont le cône est strictement plus grand que celui de g, et g' causale.

Théorème de Hawking

Theorem

Une variété lorentzienne admet un temps ssi elle est stablement causale

S. Hawking?

Topologique vs analytique

Existence d'une fonction temps au sens Diff?

Beaucoup d'affirmations avec preuves non-convaincantes (Seifert...).

La dernière: Bernal-Sanchez

Construction générale:

$T : M \to \mathbb{R}$ une submersion

ça existe sur toute variété non-compacte.

Le cône isotrope est situé d'un côté du champ d'hyperplans $x \to \ker(d_x T)$

Idée de la preuve, Hahn-Banach?

Théorie de Sullivan:

- Un courant de dimension 1 dirigé par le champ de cône $x \longrightarrow C_x$: $c(\omega) = \int \omega(u) d\mu$, où $u : x \longrightarrow u(x) \in C_x$ est une section mesurable de C

- Cet ensemble $\mathcal{A}$ est un cône dans $\mathcal{C}^1(M)$

- $\mathcal{Z}^1$ courants fermés

– Supposons $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z}^1 = 0$,

- Hahn-Banach: il existe une forme linéaire nulle sur $\mathcal{Z}^1$ et positive sur $\mathcal{A}$

C'est une 1-forme diff α

α est exacte $\alpha = dT$

$dT_{|C} > 0$

- Hahn-Banach: il existe une forme linéaire nulle sur $\mathcal{Z}^1$ et positive sur $\mathcal{A}$

C'est une 1-forme diff α

α est exacte $\alpha = dT$

$dT_{|C} > 0$

• Bémol:

- C'est vide dans la cas compact,

- On n'a pas de dualité entre courants et formes dans le cas non-compact.

Remarques (philosophie et physique)

• Causalité: pourquoi exige-t-on qu'un univers physiquement raisonnable soit causal?

– Avant Big-Bang

- Trous noirs

• Gravitation quantique

– Temps privilégiés

- Ensembles causaux

- Autres

- Paradoxes

- Economie

Dictionnaire

( )

Comparaisons

X champ de vecteurs $\leftrightarrow$ C champ de cônes

Point périodique de X $\leftrightarrow$ Courbe causale pour C

Point récurrent pour X $\leftrightarrow$ ça existe mais pas courant

Ω ensemble des point non-errant de X est vide $\leftrightarrow$ C fortement causal

$\mathcal{R}(X) = \emptyset \leftrightarrow C$ stablement causal

Fonction de Lyapunov pour $X \leftrightarrow$ Fonction temps pour C (à un signe près: passé $\leftrightarrow$ futur!)

Les preuves et raisonnements se ressemblent!

Hawking, physicien!?

Dainel Monclair:

- définition de domaine de violation de la stable causalité pour un champ de cône:

ensemble récurrent par chaine:

- Généralisation du théorème de Conley,

Unification

(RDS)

Systèmes dynamiques aléatoires, phénoménologie

- Système multivalué: $x \longrightarrow F(x) \subset M$
- Inclusion différentielle: $x \longrightarrow E_x \subset T_x M$
- Chaine (ou processus) de Markov: $x \longrightarrow \mu_x$
- Correspondance $\Sigma \subset M \times M$
- Action d'un groupe libre, e.g. à deux générateurs A et B: $x \in M$, appliquer aléatroirement A ou B à x...
- ...

Pas (encore) de formalisme général,

Système multi-valué: notion la plus générale!

Point de vue dynamique: trajectoire (x_i) telle que $x_{i+1} \in F(x_i)$

Applications

Beaucoup de situations naturelles,

- e.g. Théorie du contrôle: une famille X_α,

$\alpha \in A$ de champs de vecteurs

Trajectoires: $c(t)$, telle que presque partout $c'(t) = X_\alpha(c(t))$ pour un certain α...

- Autres exemples:

–

En maths: on ne peut pas distinguer entre aléatoire et détermiste?

Exemple: désingularisation du flot géodésique:

On se déplace le long de géodésiques,

Cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $x \to x + tv$, $v \in S^{n-1}$ vecteur unitaire

La direction v n'est pas donnée en x

On considère l'espace $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ et le groupe à un paramètre: $(x, v) \to (x + tv, v)$

Shift et produit croisé

$x \longrightarrow F(x) \subset M$
$\Sigma = M^{\mathbb{Z}}$, $\sigma(x_i) = (x_{i+1})$
(Cas plus général Γ groupe, $(\gamma, f) \in \Gamma \times M^{\Gamma} \rightarrow f \circ \gamma^{-1})$)
$\pi : (x_i) \in \Sigma \longrightarrow x_0 \in M$

$\Sigma_F = \{(x_i) \text{ telle que } (x_{i+1}) \in F(x_i)\}$

Si F est une application univaluée, π semi-conjugue (Σ_F, σ) avec (M, F).
π est une conjugaison ssi F homéomorphisme

Sinon, Σ_F solénoide de F: rendre F injective!

Produit croisé,

Exemple: rotation aléatoire sur S^1

$M = P \times S^1$

$(p, x) \to (f(p), x + \theta(p))$:

$p \in P \to F_p \in Homeo(X)$

Interpretation: p_0 donné:

$x \to x + \theta(p_0) \to x + \theta(p_0) + \theta(f(p_0)) + \theta(f^2(p_0)) \to \dots$

Cas général, remplacer le cercle par X et $x + \theta(p)$ par $F_p(x) = F(p, x)$

Action de F_2

Action du groupe libre à deux générateurs $\iff$ deux homéomorphismes A_0 et A_1 sur X

$P = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = P_0 \cup P_1$

$P_i =$ suites commençant par i

$J(p) = i$ si $x_0 = i$: $P_i = J^{-1}(i)$

Dynamique: $F : (p, x) \to (\sigma(p), A_{J(p)}(x))$ (σ le shift sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$)

(On applique A_0 ou A_1 selon que p commence par 0 ou 1).
En appliquant le shift, on obtient une itération aléatoire de A_0 et A_1

Vie courante

- M { Mots d'un dictionnaire }

$x \to F(x) = \{$ ensemble des synonymes de $x\}$ (lui même excepté)
Exemple de condition initiale?

- M une communauté

F une information (un mail)
$x \to F(x)$: ensemble des destinataires du message (de l'information) par x

Il peut arriver que $x \in F^n(x)$ (son message lui revient)!
Causalité: fonction de Lyapunov ... (taille du message?)
– Dans le cas lorentzien: $p \leq q \iff p$ envoie un message à q

- Champ de vision

- MathScinet: article $\longrightarrow$ ses références...

La date de parution semble une fonction de Lyapunov apparente, mais on peut avoir des anomalies...

- Un thème (un document) sur le web,

Chaotique!

On peut déboucher sur des sites...!