Quelques remarques sur les actions analytiques des réseaux des groupes de Lie de rang supérieur *

Abdelghani Zeghib

26 février 1999

Résumé. Toutes les actions considérées ici sont *analytiques* (réelles). Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$. Nous montrons, en particulier, la rigidité homotopique (globale) de son action affine usuelle sur le tore T^n ($n \geq 3$), ainsi que celle de son action projective usuelle sur la sphère S^{n-1} (pour $n \geq 4$).

Abstract. All the actions considered here are (real) *analytic*. Let Γ be a subgroup of finite index of $SL(n, \mathbb{Z})$. We prove, in particular, the (global) homotopical rigidity, for both its standard affine action on the torus T^n ($n \geq 3$), and its standard projective action on the sphere S^{n-1} ($n \geq 4$).

Abridged English version

Let ρ_0 denote the standard affine action of Γ, a subgroup of finite index of $SL(n, \mathbb{Z})$, on the torus T^n. In order to prove that it is locally rigid, it is a natural idea to show that every C^1 nearby action ρ is "linearizable". From a result on persistance of fixed points of [10], and a local linearizability result of [1] (in the analytic case), we get a local linearization of ρ around some fixed point. The main ingredient is then, to introduce a *Siegel neighborhood* of the fixed point, which is a maximal *invariant* open set on which the action is linear. We show that the action on the Siegel neighborhood is C^ω-conjugate to the standard action on a punctured torus, i.e. ρ_0 restricted to the torus with some rational points removed. Holes may exist, in general, as in the case of Katok-Lewis examples which are constructed by a blowing up process. But in the torus case, a homological consideration leads to the existence of (at least) a periodic point lying in a hole. Its Siegel neighborhood must cut that of our initial fixed point (because we are on a torus), contradicting the maximality of these neighborhoods. Therefore the Siegel neighborhood is the whole torus, that is ρ is conjugate to ρ_0. This idea may be adapted to handle the following situations.

Theorem 1 *Let Γ be a subgroup of finite index of $SL(n, \mathbb{Z})$, and ρ_0 its standard action on T^n ($n \geq 3$).*

*Version légèrement détaillée d'une note soumise aux C.R.A.S.

i) The product of ρ_0 by the trivial action of Γ on any compact (real) analytic manifold N is C^1 locally rigid among C^ω-actions, i.e. it is C^ω-conjugate to every analytic Γ-action on $T^n \times N$, which is C^1-close to it.

ii) The orbit $Diff^\omega(T^n).\rho_0$, i.e. the space of conjugates of ρ_0 in the space $Rep(\Gamma \to Diff^\omega(T^n))$ of analytic actions of Γ on T^n, is closed-open for the C^1 topology, and closed for the C^0 topology.

iii) Any faithful analytic action of Γ on T^n preserving a non-atomic measure, and having a fixed point in the support of this measure, is (up to an automorphism) C^ω-conjugate to ρ_0.

Theorem 2 *Let Γ be a subgroup of finite index of $SL(n+1, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$, and ρ_0 its standard projective action on S^n. The orbit $Diff^\omega(S^n).\rho_0$ in $Rep(\Gamma \to Diff^\omega(S^n))$ is closed-open for the C^1 topology and closed for the C^0 topology.*

Pour montrer que l'action usuelle d'un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ ($n \geq 3$) sur le tore T^n est localement rigide, une idée naturelle consiste à montrer que toute action proche est "linéarisable". Dans cette note, nous montrons comment faire marcher cette approche, et aussi la généraliser à d'autres situations. Les preuves elles mêmes, hormis un résultat de linéarisablité locale de [1], sont linéaires, i.e. découlent de propriétés de l'action usuelle. Les détails ainsi que des résultats complémentaires paraîtront ultérieurement.

Toutes les actions considérées ici sont **analytiques** (réelles).

1. Linéarisation: du local au global. Soit M une variété analytique réelle et Γ un groupe agissant analytiquement sur M, via un homomorphisme $\rho : \Gamma \to \mathrm{Diff}^\omega(M)$. Supposons que cette action admette un point fixe x_0.Nous avons alors une représentation infinitésimale: $r : \Gamma \to GL(T_{x_0}M)$.

Supposons que ρ soit analytiquement linéarisable au voisinage de x_0, c'est-à-dire qu'elle est conjuguée à r, dans un voisinage de x_0. Plus précisément, cela signifie qu'il existe U, voisinage de 0 dans $T_{x_0}M$, et V voisinage de x_0 dans M, et un difféomorphisme analytique $\phi : U \to V$, tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, nous avons l'égalité $\phi r(\gamma) = \rho(\gamma)\phi$, dans un certain voisinage de x_0 (dépendant de γ). Pour pouvoir en profiter dynamiquement, nous aurons besoin d'ouverts U et V invariants respectivement par r et ρ.

Proposition 1

1) Parmi les ouverts étoilés *(en 0) de $T_{x_0}M$ dans lesquels ϕ se prolonge analytiquement en un difféomorphisme local sur son image, il existe un seul ouvert maximal, noté $\mathcal{E}$. Il est en particulier invariant par r, et le prolongement $\bar{\phi}$ de ϕ à $\mathcal{E}$ vérifie la semi-conjugaison globale: $\bar{\phi}r(\gamma)(u) = \rho(\gamma)\bar{\phi}(u)$, $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall u \in \mathcal{E}$.*

2) Il existe un ouvert maximal parmi les ouverts connexes, contenant 0, r-invariants, et sur lesquels ϕ se prolonge en un difféomorphisme analytique local *semi-conjuguant r et ρ. (Dans la suite, nous choisirons un tel ouvert qu'on notera $\mathcal{M}$, et noterons $\Phi : \mathcal{M} \to M$, le prolongement de ϕ).*

Preuve. En général, il n' y a pas une notion consistante de domaine maximal d'extension d'une application analytique; sauf en dimension (réelle) 1, auquel cas, on peut parler d'intervalle maximal de prolongement analytique. Dans notre cas ici, nous considèrons le prolongement maximal de ϕ le long des demi-rayons issus de $0 \in T_{x_0}M$. Cela détermine un ensemble étoilé (en 0) sur lequel ϕ se prolonge radialement analytiquement. Nous obtenons un ouvert étoilé, en considérant l'intérieur de cet ensemble.Nous nous se restreignons ensuite aux points au voisinage desquels le prolongement de ϕ est un difféomorphisme analytique local. C'est notre domaine $\mathcal{E}$. Tout est naturel, donc, $\mathcal{E}$ est r-invariant, et la semi-conjugaison $\bar{\phi} r(\gamma) = \rho(\gamma)\bar{\phi}$ est satisfaite sur $\mathcal{E}$. (Plus analytiquement, soit $u \in T_{x_0}M$, si l'application $t \to \phi(tu)$ se prolonge à $[0, T[$, alors, l'application $t \to \phi(t(r(\gamma)))$ se prolonge également dans $[0, T[$ par la formule $\phi(t(r(\gamma))) = \rho(\gamma)(\phi(tu))...)$.

Enfin, comme il y a un ouvert connexe r-invariant satisfaisant la semi-conjugaison ci-dessus, il y en a un (ouvert connexe) maximal (parmi tous les ouverts connexes, non nécessairement étoilés).

$\diamondsuit$

2. Exemples. En dépit de son "évidence", la proposition ci-dessus ne semble pas exister dans la littérature, où l'on s'intéresse particulièrement au cas où la représentation linéaire r est constituée soit de dilatations (et contractions), soit de transformations orthogonales. et de plus, en général, $\Gamma = \mathbb{Z}$. (On parle alors de disque, ou domaine, de Siegel...). Il est vrai que c'est dans ces cas que $\Phi : \mathcal{M} \to M$ jouit d'intéressantes propriétés topologiques. Dans le cas général, Φ n'est pas nécessairement un revêtement sur son image. On peut par exemple s'amuser à considérer l'exemple de $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant sur le tore $T^2 = S^1 \times S^1$, par un difféomorphisme $f = g \circ A$, où A est un automorphisme hyperbolique de T^2 et $g = (g_1, g_2)$, avec g_1 et g_2 difféomorphismes analytiques de S^1 fixant 0. Pour un choix générique des dérivées $g_1'(0)$ et $g_2'(0)$, la matrice dérivée $D_{(0,0)}f$ n'aura pas de résonances (ce qui entraîne en particulier que $\det(D_{(0,0)}f) \neq \pm 1$), et ainsi d'après le théorème de linéarisation de Sternberg, f est linéarisable au voisinage de $(0, 0)$. Il est exceptionnel que $\Phi : \mathcal{M} \to M$ soit un revêtement sur son image. On peut montrer qu'il est impossible que la connexion plate de $\mathcal{M}$ ($\subset \mathbb{R}^2$) descende par Φ (ou en d'autres termes que les identifications de points de $\mathcal{M}$ ayant une même image par Φ, se fassent à l'aide d'applications affines), et ce à cause du fait que $\det(D_{(0,0)}f) \neq \pm 1$.

D'autres exemples s'obtiennent en considérant l'action à gauche d'un réseau Γ d'un groupe de Lie G sur le quotient G/Γ. Cette action fixe le point correspondant à l'élément neutre de G, et y est (localement) linéarisable. Ici, Φ est la restriction de l'application exponentielle $\mathcal{G} \to G/\Gamma$, à $\mathcal{M}$, qui est un ouvert connexe $Ad(\Gamma)$-invariant, et sur lequel l'application exponentielle est un difféomorphisme local. Même dans le cas de $G = SL(n, \mathbb{R})$, Φ présente assez de pathologies topologiques.

3. Un cas rigide. Les réseaux irréductibles des groupes de Lie semisimples, de centre fini, sans facteur compact et de rang réel ≥ 2, e.g. $SL(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$, sont bien connus par leurs propriétés de rigidité (et super-rigidité). Nous n'en citerons qu'une que nous allons tout de suite exploiter: un résultat de C. Cairns et E. Ghys [1], affirmant, avec les notations ci-dessus (i.e. que Γ agit analytiquement en fixant x_0), que si Γ est un tel réseau, alors son action est linéarisable au voisinage de x_0. Il est donc intéressant de comprendre Φ dans ce cas. L'exemple précèdent de Γ agissant sur G/Γ, montre les limites d'une rigidité espérée pour Φ. La raison, dans ce cas, réside, probablement dans la "relative pauvreté dynamique" de la représentation linéaire r, qui n'est rien d'autre que la représentation Ad de Γ; par exemple, $Ad(\Gamma)$ agit proprement sur un ouvert (non-vide) de $\mathcal{G}$.

Dans la suite, nous traiterons le cas où Γ est un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{R})$ agissant sur une variété M de dimension ($n \geq 3$).

Nous nous ramènons au cas où r est fidèle (nous utilisons pour cela un théorème de Margulis affirmant que le noyau de r est soit fini, soit d'indice fini). D'après la super-rigidité de Margulis, r est soit la représentation canonique soit sa duale; nous supposerons pour simplifier les notations que c'est la canonique.

On peut commencer par essayer de comprendre $\mathcal{M}$. Son complémentaire $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n - \mathcal{M}$ est un fermé invariant par l'action de Γ sur $\mathbb{R}^n$. De tels ensembles ont été intensivement étudiés dans la littérature; mais tous les résultats les concernant peuvent se déduire, après manipulation algébrique, du Théorème de M. Ratner, résolvant la conjecture de Raghunathan [9]. Pour voir que ce théorème s'applique bien, on identifie $\mathbb{R}^n - \{0\}$ à l'espace homogène $SL(n, \mathbb{R})/H$, où H est le stabilisateur d'un certain point. Une partie fermée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, Γ-invariante, s'identifie aussi à une partie fermée $\mathcal{C}'$ de $SL(n, \mathbb{R})$, Γ-invariante à gauche et H-invariante à droite, i.e. $\mathcal{C}' = \Gamma.\mathcal{C}'.H$; et par conséquent, elle s'identifie à une partie fermée de $\Gamma \setminus SL(n, \mathbb{R})$, invariante par H (agissant à droite). Le théorème s'applique car Γ est un réseau, et H est engendré par ses éléments unipotents.

Le théorème de Ratner affirme que pour $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, la composante connexe de u dans l'adhérence $\overline{\Gamma.u}$ de son orbite, est de la forme $G.u$, où G est un sous-groupe de Lie connexe, contenant le stabilisateur de u (qui est un conjugué de H) et tel que $\Gamma \cap G$ soit un réseau de G.

On peut en déduire (mais c'est aussi faisable à l'aide d'outils plus élémentaires, dans ce cas précis) que si Γ n'est pas, à automorphisme près, un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, alors, Γ agit minimalement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, et en particulier $\mathcal{C} = \emptyset$. Si Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, alors l'orbite d'un point est, soit dense, soit discrète, auquel cas, ce point est de la forme λu, où u est rationnel (et $\lambda \in \mathbb{R}$). En général, nous avons des parties fermées invariantes propres de la forme $\Gamma.(F.u)$ $(= F.(\Gamma.u))$, où u est rationnel et F est un fermé de $[0, \infty[$ ne contenant pas 0 (la notation $F.u$

désigne l'ensemble $\{tu, t \in F\}$). Tout fermé invariant propre est réunion finie de tels fermés élémentaires.

Théorème 1 *Soit Γ un réseau de $SL(n,\mathbb{R}), n > 2$, agissant analytiquement en fixant un point x_0 sur une variété M de dimension n. Alors, $\mathcal{M}$ est unique, on appellera $\Phi(\mathcal{M})$ l'**ouvert de Siegel** en x_0.*

Le prolongement maximal $\Phi : \mathcal{M} \to M$ vérifie:

i) Φ est un revêtement sur son image.

ii) La connexion affine plate sur $\mathcal{M}$ descend par Φ en une connexion plate ∇ sur $\Phi(\mathcal{M})$.

iii) ∇ ne peut pas se prolonger (même localement) en dehors de l'ouvert de Siegel.

iv) ∇ est (localement) unique, au sens que si Γ préserve une connexion définie sur un ouvert invariant contenu dans l'ouvert de Siegel, alors, c'est la restriction de ∇.

De plus, il y a deux situations possibles:

Cas dissipatif: *On y distingue deux cas.*

1) Γ n'est pas à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n,\mathbb{Z})$, alors $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, Φ est un difféomorphisme (global) sur son image, et ∇ est complète.

2) Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n,\mathbb{Z})$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert Γ-invariant comme décrit ci-dessus, et Φ est un difféomorphisme sur son image $\Phi(\mathcal{M})$.

Cas conservatif: *Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n,\mathbb{Z})$, et Φ n'est pas injective. Dans ce cas, Φ transite à travers un difféomorphisme $\Phi^* : (T^n)^* \to \Phi(\mathcal{M})$, où $(T^n)^*$ est le tore T^n privé d'un nombre fini de points rationnels, et Φ^* respecte les actions et les connexions.*

La possibilité conservative se produit exactement lorsque l'une ou l'autre des deux conditions suivantes est satisfaite:

1) Γ préserve une mesure finie sans atomes dont le support contient x_0. Cette mesure est alors la mesure standard sur le tore troué.

2) Il existe un élément $\gamma \in \Gamma$ d'ordre infini tel que l'ensemble des points non-errants de $\rho(\gamma)$ contient un voisinage de x_0.

Esquise de la preuve. D'après la description ci-dessus des ensembles fermés invariants par Γ agissant sur $\mathbb{R}^n$, nous tirons en particulier que tout ouvert invariant est connexe. En particulier, s'il y a deux ouverts maximaux sur lesquels ϕ se prolonge analytiquement, alors leur intersection est connexe, et par suite, ϕ se prolonge à leur réunion, donc $\mathcal{M}$ est unique.

Les propriétés de Φ découlent de la rigidité de l'ensemble:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \Phi(x) = \Phi(y)\}$$

C'est une sous-variété analytique de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, localement fermée dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, invariante par l'action diagonale de Γ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pour la décrire, nous considérons l'action diagonale de $SL(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{(0,0)\}$. Cette action admet une orbite ouverte $\mathcal{O} = \{(u,v)/\mathbb{R}u \neq \mathbb{R}v\}$, et des orbites dégénérées de la forme $O_\alpha = \{(u, \alpha u), u \in \mathbb{R}^n\}$, α étant un réel. (On suppose $n > 2$).

Évidemment, $\mathcal{R}$ qui est une relation d'équivalence, contient la diagonale $\mathcal{O}_1$. L'égalité $\mathcal{R} = \mathcal{O}_1$ signifie que Φ est injective. On se convainc facilement que si $\mathcal{R} \neq \mathcal{O}_1$, alors $\mathcal{R}$ contient des points de l'orbite ouverte $\mathcal{O}$.

Choisissons un point (e_1, e_2) de $\mathcal{O}$. Son stabilisateur H (dans $SL(n,\mathbb{R})$) est engendré par ses éléments unipotents; pour $n = 3$, H est unipotent. Pour étudier l'adhérence de $\Gamma.(e_1, e_2)$, nous aurons besoin de comprendre les sous-groupes connexes contenant H.

Lemme 2 *Notons P le plan $\mathbb{R}e_1 \bigoplus \mathbb{R}e_2$, et S_P le sous-groupe de $SL(n,\mathbb{R})$ préservant P; nous avons une projection $\pi : S_P \to GL(P) \simeq GL(2,\mathbb{R})$ (H s'identifie à $\pi^{-1}(1)$).*

Soit G un groupe de Lie connexe contenant H et différent de $SL(2,\mathbb{R})$, alors l'une des deux possibilités suivantes se présente:

i) $G \subset S_P$; plus exactement $G = \pi^{-1}(L)$, où L est un sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$.

ii) Il existe $e \in P$, et $G = S_e$, ou $G = S_{\mathbb{R}e}$, où $S_{\{\}}$ désigne le stabilisateur.

Dans le cas de $\Gamma = SL(n,\mathbb{Z})$, il existe G avec $H \subset G \subset S_P$, et $G \cap \Gamma$, un réseau de G, si et seulement si P est un 2-plan rationnel (i.e. engendré par deux vecteurs rationnels). Pour Γ quelconque, l'ensemble des 2-plans P avec un groupe G comme précédemment, vérifiant que $G \cap \Gamma$ est un réseau de G, est dénombrable.

On peut donc se restreindre à l'étude du cas où l'adhérence de l'orbite $\Gamma.(e_1, e_2)$ est déterminée par un groupe G égal à S_e ou $S_{\mathbb{R}e}$. En fait $G = S_e$ car $S_{\mathbb{R}e}$ n'est pas unimodulaire. Donc pour l'action de Γ sur $\mathbb{R}^n$, l'orbite de e est discrète; il en découle que Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n,\mathbb{Z})$.

L'événement, e est colinéaire à e_1 ou à e_2, correspond à un nombre dénombrable de cas; nous pouvons donc supposer qu'il n'a pas lieu.

Maintenant S_e agit transitivement sur $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}e$; en particulier tous les points (x, y) d'un voisinage de (e_1, e_2) dans $\mathcal{R}$, s'écrivent: $(x, y) = (A(e_1), A(e_2))$, avec $A \in S_e$.

Comme e est défini à facteur près, et appartient à P $(= \mathbb{R}e_1 \bigoplus \mathbb{R}e_2)$, nous pouvons écrire $e_2 = \alpha e_1 + e$, pour un certain α. Donc $y = A(e_2) = \alpha A(e_1) + A(e) = \alpha x + e$ (car $A \in S_e$).

En d'autres termes, un voisinage de (e_1, e_2) dans $\mathcal{R}$ coïncide avec le graphe de l'homothétie-translation $x \to \alpha x + e$. Notons f cette transformation. Alors, dans un voisinage de e_1, nous avons $\Phi \circ f = \Phi$. Mais comme f est définie partout, l'égalité se prolonge à tout $\mathcal{M}$, qui doit être invariant par f.

Il en va de même pour les transformations $h = AfA^{-1}$, qui sont de la forme $x \to \alpha x + A(e)$, où A parcourt Γ. Sachant que Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n,\mathbb{Z})$, nous en déduisons que les parties translationnelles $A(e)$ de ces transformations forment un réseau de $\mathbb{R}^n$, et en particulier, si $\alpha \neq 1$, alors il existe un commutateur de ces transformations qui est une translation non triviale; et par suite, il existe un réseau de translations g vérifiant $\Phi \circ g = \Phi$. Si $\alpha \neq \pm 1$, il existerait trop de transformations h satisfaisant $\Phi \circ h = \Phi$, contredisant le fait que Φ est un difféomorphisme local. Ceci montre que Φ transite à travers un difféomorphisme Φ^* comme énoncé.

La connexion plate descend à l'ouvert de Siegel $\Phi\mathcal{M})$ car le groupe de Galois du revêtement Φ agit affinement sur $\mathcal{M}$. Le fait qu'elle ne peut pas se prolonger à un ouvert strictement plus grand que l'ouvert de Siegel, provient du fait que cette connexion est déjà "pratiquement complète". $\diamondsuit$

Corollaire 2 *Si les ouverts de Siegel de deux points fixes de Γ s'intersectent, alors ils sont identiques.*

4. Dimension $> n$. La discussion précédente se généralise partiellement lorsque Γ agit sur une variété M de dimension $n+p$, telle que la représentation r de Γ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ soit le produit de la représentation canonique dans $\mathbb{R}^n$ par la représentation triviale dans $\mathbb{R}^p$.

Par exemple, on peut se ramener essentiellement à cette situation, lorsque $p < n$.

Les transformations (partielles) f de $\mathbb{R}^{n+p}$ vérifiant $\Phi \circ f = \Phi$ sont de la forme:

$$f : (u, v) \in \mathbb{R}^n \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to (\alpha(v)u + e(v), g(v))$$

où $\alpha : U \to \mathbb{R}$, $e : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^p$, sont des applications analytiques définies sur l'ouvert (de $\mathbb{R}^p$) U et g est un difféomorphisme sur son image. (Évidemment, il peut se passer que $\alpha(v) \equiv 1$, et $e(v) \equiv 0$).

Notons que vu la forme de f, la composition, à gauche ou à droite, de f avec des éléments de la forme $r(\gamma)$, est définie dans tout le domaine de définition de f.

Le produit $g = r(\gamma) f^{-1} r(\gamma)^{-1} f$, est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \times U$ de la forme $g : (u, v) \to (u + e(v) - r(\gamma)(e(v)), v)$. En particulier, dès qu'il existe un $e(v) \neq 0$, alors, il y 'en aura un réseau, Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et le niveau $\mathbb{R}^n \times \{v\}$ s'envoie par Φ sur un tore troué.

Cette discussion nous fournit en particulier le fait suivant.

Corollaire 3 *Soit Γ un réseau de $SL(n, \mathbb{R})$ agissant analytiquement sur une variété M, en fixant un point x_0, avec une représentation infinitésimale, produit de la représentation canonique dans $\mathbb{R}^n$ par une représentation triviale. Supposons que l'action préserve une mesure finie dont le support contient un voisinage de x_0. Alors, Γ est à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et sur un ouvert invariant contenant x_0, l'action est conjuguée à l'action sur $(T^n)^* \times N$, où $(T^n)^*$ est un tore troué sur lequel Γ agit de la façon usuelle, et N est une variété de dimension $p = dimM - n$, sur lequel Γ agit trivialement.*

On en déduit en particulier:

Corollaire 4 *Soit Γ un réseau de $SL(n,\mathbb{R})$, $n > 2$, agissant fidèlement analytiquement sur une variété M de dimension $< 2n$, en préservant une mesure finie pleine (i.e.son support est égal à M). Si Γ n'est pas à automorphisme près un sous-groupe d'indice fini de $SL(n,\mathbb{Z})$, alors, l'action n'a aucun point périodique.*

Remarque 3 Dans tous les énoncés précédents, M n'était pas supposée compacte!

5. Première application: actions sur le tore. Nous esquissons dans ce qui suit une preuve de la rigidité locale de l'action usuelle d'un sous-groupe Γ d'indice fini dans $SL(n,\mathbb{Z})$ sur le tore (parmi les actions C^ω). En fait, pour simplifier les notations, nous supposerons que $\Gamma = SL(n,\mathbb{Z})$. Nous supposerons aussi que $n \geq 6$, et ce pour pouvoir "scinder" Γ en réseaux de rang supérieur. Le cas général, c'est-à-dire $n \geq 3$, demande un peu plus d'analyse.

Soit ρ une action C^1 proche de l'action standard ρ_0. D'après un théorème de Stowe [10], ρ admet un point fixe x_0 (proche de 0). On peut se convaincre facilement que l'ouvert de Siegel en x_0 est un tore troué, c'est-à-dire qu'on ne peut pas être dans le cas dissipatif du Théorème 1. L'action ρ sera conjuguée à ρ_0 si l'on démontre que l'ouvert de Siegel est un vrai tore, i.e. qu'il est non-troué.

Pour montrer cela, il suffit de montrer que Γ, ou même un sous-groupe d'indice fini, possède un point fixe, disons x_1, résidant dans un trou (i.e. le complémentaire de l'ouvert de Siegel de x_0). En effet, alors, puisqu'on est sur un tore, les deux domaines de Siegel doivent s'intersecter, contredisant le Corollaire 2.

On cherchera un point fixe dans un trou, comme intersection de deux sous-variétés, lieux de points fixes de deux sous-groupes engendrant Γ, dont on sait que le nombre d'intersection total est supérieur à leur nombre d'intersection dans l'ouvert de Siegel en x_0.

Plus précisément, soit $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et notons E_1 (resp. E_2) les plans engendrés par e_1, e_2, e_3 (resp. $e_4, \ldots, e_n$). Ils sont (ponctuellement) fixés par $\Gamma_1 = SL(n-3,\mathbb{Z})$ et $\Gamma_2 = SL(3,\mathbb{Z})$ (plongés naturellement dans $SL(n,\mathbb{Z})$).

Notons F_1 (resp. F_2) l'ensemble (analytique) des points fixes de $\rho(\Gamma_1)$ (resp. $\rho(\Gamma_2)$). D'après un théorème de Stowe, lorsque ρ est C^1 proche de ρ_0, ces ensembles sont des sous variétés (proches des celles qui correspondent à ρ_0). (On utilise pour appliquer le théorème de Stowe, le théorème d'annulation cohomologique de Margulis).

Évidemment F_1 et F_2 sont des prolongements dans les trous, de $\Phi(E_1)$ et $\Phi(E_2)$ respectivement.

Considérons un élément $\gamma \in SL(n,\mathbb{Z})$ tel que $E_2' = r(\gamma)(E_2)$ intersecte transversalement $E_1 + \mathbb{Z}^n$ en un point de $\mathbb{R}^n - \mathcal{M}$ (cela existe car $\mathbb{R}^n - \mathcal{M}$ est constitué de points rationnels).

Le nombre d'intersection de $F_2' = \rho(\gamma)(F_2)$ avec F_1 est le même que dans le cas de l'action standard. Il est égal au cardinal de $E_2' \cap (E_1 + \mathbb{Z}^n)$ mod. $\mathbb{Z}^n$.

Mais le nombre d'intersection de F_2' avec F_1 à l'intérieur de l'ouvert de Siegel vaut le nombre d'intersection de $\Phi(E_2')$ avec $\Phi(E_1)$, qui est égal au cardinal de $(E_2' \cap (E_1 + \mathbb{Z}^n) - \mathcal{M})$ mod. $\mathbb{Z}^n$. Le choix de γ assure que ces deux nombres d'intersection sont différents, et par suite F_2' et F_1 s'intersectent en dehors de l'ouvert de Siegel.

On remarque maintenant que E_1 et E_2 sont en fait fixés (ponctuellement) par des groupes plus grands que Γ_2 et Γ_1 respectivement; et qui sont des produits semi-directs évidents $\Gamma_2 \ltimes N_2$ et $\Gamma_1 \ltimes N_1$, où N_1 et N_2 sont unipotents. Il en résulte que le groupe engendré par $r(\gamma)(\Gamma_2 \ltimes N_2)r(\gamma)^{-1}$ et $\Gamma_1 \ltimes N_1$ fixe un point dans un trou. Mais, à cause de la transversalité entre E_2' et E_1, ce groupe est d'indice fini dans $SL(n, \mathbb{Z})$. $\diamondsuit$

Les premiers résultats de rigidité locale sont dus à Hurder [2] et Katok-Lewis [4] (dans le cas lisse). La rigidité locale de l'action des sous-groupes d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ sur T^n est parue dans [5]. L'un des travaux les plus récents sur la question est [8], où l'on démontre la rigidité locale des "actions algébriques" faiblement hyperboliques. Ici, à l'aide des développements du §4, on peut adapter l'approche ci-dessus pour traiter la rigidité locale dans une situation qui n'est pas faiblement hyperbolique, où Γ agit diagonalement sur un produit $T^n \times N$, où N est une variété compacte quelconque sur laquelle Γ agit trivialement (Voir [7] pour des résultats proches).

Théorème 5 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, $n > 2$. Considérons ρ_0 l'action produit de l'action usuelle de Γ sur T^n, par l'action triviale sur une variété compacte N. Alors ρ_0 est localement rigide sous perturbation C^1, parmi les actions analytiques; plus précisément, toute action analytique C^1 proche de ρ_0, est analytiquement conjuguée à ρ_0.*

Pour les actions sur T^n, nous avons le résultat de non-dégénérescense suivant.

Théorème 6 *Soit Γ un sous-groupes d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et (ρ_i) une suite d'actions analytiquesde Γ conjuguées à son action usuelle sur T^n. Supposons que cette suite converge au sens de la topologie C^0 vers une action analytique ρ. Alors ρ est analytiquement conjuguée à l'action usuelle.*

Ce type de résultat est étranger à la théorie hyperbolique, notamment dans le cas classique des difféomorphismes d'Anosov, puisqu'il existe des applications dites DA, dérivées d'Anosov.

Le théorème suivant unifie les deux résultats précédents dans le cas de T^n, et rend vraisemblable une rigidité globale des actions analytiques dans ce cas (sans hypothèse d'hyperbolicité ou de préservation de volume...).

Corollaire 7 *Soit Γ un sous-groupes d'indice fini de $SL(n, \mathbb{Z})$, et $Rep(\Gamma, Diff^\omega(T^n))$ l'espace de ses actions analytiques sur T^n. L'orbite $Diff^\omega(T^n).\rho_0$, i.e. l'espace des actions conjuguées à l'action standard ρ_0, est ouvert dans $Rep(\Gamma, Diff^\omega(T^n)$ au sens de la topologie C^1, et fermée au sens de la topologie C^0.*

En particulier, toute action homotope à l'action usuelle, au sens de la topologie C^1, à travers des actions C^ω, lui est C^ω conjuguée.

Nous ne savons pas démontrer que l'orbite $Diff^\omega(T^n).\rho_0$ est ouverte dans $Rep(\Gamma, Diff^\omega(T^n))$, au sens de la topologie C^0, pour la simple raison que nous ne disposons pas d'un résultat de persistance de point fixe de Γ sous perturbation C^0. (Une telle persistance paraît vraisemblable dans ce contexte précis).

Enfin, nous avons ce résultat global, qui réduit (essentiellement) la rigidité globale à l'existence de points périodiques.

Théorème 8 *Toute action fidèle analytique d'un sous-groupe d'indice fini de $SL(n,\mathbb{Z})$ sur T^n ayant un point fixe et préservant une mesure finie non-atomique dont le support contient le point fixe est analytiquement conjuguée à l'action usuelle.*

6. Deuxième application: actions sur la sphère. Le groupe de Lie $SL(n+1,\mathbb{R})$ agit projectivement sur la sphère S^n, ce qui donne par restriction une action de ses réseaux. Une super-rigidité dans ce contexte consiste à se demander si réciproquement, une action d'un réseau Γ de $SL(n+1,\mathbb{R})$ se prolonge en une action de $SL(n+1,\mathbb{R})$ (qui sera par suite nécessairement l'action projective usuelle, à automorphisme près). La rigidité locale est une version locale de cette question. Elle a été démontrée, mais seulement pour les réseaux co-compacts, d'abord par Kanai [3] avec une restriction (technique) sur la dimension, et ensuite dans le cas général par Katok-Spatzier [6] (qui démontrent en fait la rigidité locale des réseaux co-compacts de rang ≥ 2 agissant sur des bords).

Ici, nous considérons des réseaux (non co-compacts) de $SL(n+1,\mathbb{R})$ qui sont des sous-groupes d'indice fini dans $SL(n+1,\mathbb{Z})$ (à automorphisme près). Leur avantage ici, est qu'il contiennent des réseaux de $SL(n,\mathbb{R})$, qui admettent donc des points fixes, auxquels nous pouvons ainsi appliquer Théorème 1. Nous avons le résultat (global) suivant.

Théorème 9 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n+1,\mathbb{Z})$, agissant fidèlement analytiquement sur une variété compacte M de dimension $n \geq 3$, tel que $\Gamma \cap SL(n,\mathbb{Z})$ admet un point fixe. Alors, à automorphisme près, c'est l'action usuelle de Γ sur la sphère S^n ou sur l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$.*

Esquise de la preuve. Nous supposons pour simplifier les notations que $\Gamma = SL(n+1,\mathbb{Z})$. Ses éléments de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $A \in SL(n,\mathbb{R})$ forment un sous-groupe isomorphe à $SL(n,\mathbb{Z})$ que nous notons Γ_0. Les sous-groupes abéliens unipotents constitués des éléments de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ sont notés N^+ et N^- respectivement. Ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}^n$, et donnent lieu à deux produits semi-directs $\Gamma_0 \ltimes N^+$ et $\Gamma_0 \ltimes N^-$ isomorphes au produit semi-direct $SL(n,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$ (où $SL(n,\mathbb{Z})$ agit sur $\mathbb{Z}^n$ vu comme le réseau canonique de $\mathbb{R}^n$, dans un cas via la représentation canonique de $SL(n,\mathbb{R})$, et dans l'autre cas, via sa représentation duale).

Par hypothèse, Γ_0 fixe un point, disons x_0, nous supposons que sa représentation infinitésimale est la canonique. Maintenant, l'idée est de revêtir M

d'une structure projective Γ-invariante, en suivant la recette déterminée par la structure projective usuelle (sur S^n ou $\mathbb{R}P^n$).

Nous montrons d'abord, que tout comme dans le cas standard, au moins à indice fini près, N^+ fixe x_0. L'idée est que le centralisateur dans Γ_0, d'un élément γ de N^+, est suffisamment grand, et ne peut avoir que des points fixes isolés, qui sont, dans leur ensemble, invariants par γ.

Ainsi, $\Gamma_0 \ltimes N^+$ admet x_0 comme point fixe , et l'action de Γ_0 y est (localement) linéarisable. Nous montrons alors que $\Gamma_0 \ltimes N^+$ préserve (localement) une structure projective plate au voisinage de x_0 (celle déterminée par la connexion affine locale préservée par Γ_0).

Soit $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$ l'ouvert de Siegel de x_0 relatif à l'action de Γ_0. Il correspond nécessairement au cas dissipatif du Théorème 1 (le cas conservatif est exclu, car il y a un groupe plus grand, Γ, qui agit). Il s'identifie donc à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ invariant par l'action de $SL(n, \mathbb{Z})$ $(= \Gamma_0)$.

Le bord de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$ dans M peut être très compliqué.

La connexion projective s'étend, en particulier, à $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$, mais aussi individuellement aux images $\rho(\gamma)(\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0))$, $\gamma \in N^+$ (car N^+ préserve la connexion projective).

Nous montrons que la connexion projective plate s'étend au voisinage de la frontière de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$. En développant la situation (équivariante) dans le substratum de la géométrie projective plate (i.e. S^n ou $\mathbb{R}P^n$), nous identifierons le bord, et par suite l'adhérence de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$. Il s'agit d'une hémisphère (projective) dont le bord est soit S^{n-1} soit $\mathbb{R}P^{n-1}$. Dans ce dernier cas, l'adhérence de $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$ couvre toute la variété M, qui sera donc $\mathbb{R}P^n$. Dans le cas où le bord est S^{n-1}, nous nous aidons de N^- pour trouver une deuxième hémisphère complémentaire à $\mathcal{S}(x_0, \Gamma_0)$, ce qui permet d'identifier M à S^n.

$\diamondsuit$

Il est probable que ce théorème soit vrai sans l'hypothèse de compacité de M (l'énoncé serait alors qu'une telle action n'existe pas dans ce cas).

On en déduit en particulier la rigidité locale (parmi les actions analytiques), mais aussi une propriété de non-dégénérescence, comme dans le cas du tore ci-dessus.

Corollaire 10 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(n+1, \mathbb{Z})$, $n \geq 3$. Alors l'orbite par $Diff^\omega(S^n)$ de son action standard sur S^n est ouverte-fermée dans $Rep(\Gamma, Diff^\omega(S^n))$ muni de la topologie C^1 et elle est fermée au sens de la topologie C^0.*

Références

[1] C. Cairns, É. Ghys, The local linearization problem for smooth $SL(n)$-actions. Enseign. Math. (2) 43 (1997) 133–171.

[2] S. Hurder, Rigidity for Anosov actions of higher rank lattices. Ann. of Math. (2) 135 (1992) 361–410.

[3] M. Kanai, A new approach to the rigidity of discrete group actions. Geom. Funct. Anal. 6 (1996) 943–1056.

[4] A. Katok, J. Lewis, Local rigidity for certain groups of toral automorphisms. Israel J. Math. 75 (1991) 203–241.

[5] A. Katok, J. Lewis, R. Zimmer, Cocycle superrigidity and rigidity for lattice actions on tori. Topology 35 (1996) 27–38.

[6] A. Katok, R. Spatzier, Nonstationary normal forms and rigidity of group actions. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2 (1996) 124–133

[7] V. Nitica, A. Török, Cohomology of dynamical systems and rigidity of partially hyperbolic actions of higher-rank lattices. Duke Math. J. 79 (1995) 751–810.

[8] G. Margulis, N. Qian, Rigidity of weakly hyperbolic actions of higher real rank semisimple Lie groups and thier lattices. Preprint.

[9] M. Ratner, Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows. Duke Math. J. 63 (1991) 235–280.

[10] D. Stowe, Stable orbits of differentiable group actions. Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983) 665–684.

CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, FRANCE
Zeghib@umpa.ens-lyon.fr
http://umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/