Fonctions holomorphes sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et l'arbre $\mathbf{T}_3$

Abdelghani Zeghib

UMPA, ENS-Lyon
http://www.umpa.ens-lyon.fr/~zeghib,

(en collaboration avec Sylvain Barré)

Introduction

Exercice

Toutes les fonctions sont à valeur complexes

Exercise: Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$

avec f et f^2 harmoniques

$$\Delta f = \Delta f^2 = 0, \quad (*)_2$$

Exercice

Toutes les fonctions sont à valeur complexes

Exercise: Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$

avec f et f^2 harmoniques

$$\Delta f = \Delta f^2 = 0, \quad (*)_2$$

Alors f est holomorphe ou anti-holomorphe?

- Cor: $(*)_2 \Longrightarrow (*)_N, \quad \forall N \geq 2$

$(*)_N : \Delta f = \ldots \Delta f^N = 0$

Holomorphe vs Harmonique

Cor: On peut multiplier les fonctions holomorphes, mais on ne peut pas multiplier les fonctions harmoniques!!!

Holomorphe vs Harmonique

Cor: On peut multiplier les fonctions holomorphes, mais on ne peut pas multiplier les fonctions harmoniques!!!

"Origine de ce travail": comprendre ce phénomène?

Holomorphe vs Harmonique

Cor: On peut multiplier les fonctions holomorphes, mais on ne peut pas multiplier les fonctions harmoniques!!!

"Origine de ce travail": comprendre ce phénomène?

- Cadre non-classique: variétés complexes hermitiennes...
- Presque par définition: c'est dans le cas Kaelerien qu'il y a un parallèle entre holomorphe et harmonique....

Preuve

$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$

($\mathbb{C}$-produit scalaire)

$f = u + \sqrt{-1}v$

$\Delta f^2 = 2f\Delta f + \langle \nabla f, \nabla f \rangle$

Donc $\Delta f = \Delta f^2 = 0 \iff \Delta f = 0$ and $\langle \nabla f, \nabla f \rangle = 0$

$\nabla f = \nabla u + \sqrt{-1}\nabla v$ isotrope $\iff \| \nabla u \|^2 = \| \nabla v \|^2$ et

$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0 \iff$

$Df^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ est conforme $\iff$ Df est conforme.

Définition de fonctions holomorphes sur des variétés riemanniennes

M variété riemannienne,

Δ laplacien (rappel?)

$f : M \to \mathbb{C}$ holomorphe ssi $\Delta f = \Delta f^2 = 0$

(naïve néanmoins non-linéaire!)

Caractérisation: f holomorphe $\iff$ f harmonique & f horizontalement conforme,

$H_x = (\ker D_x f)^{\perp}$, $D_x f : H_x \to \mathbb{C}$ conforme

- Ça découle de la preuve précédente.

Caractérisation: f holomorphe $\iff$ f harmonique & f horizontalement conforme,

$H_x = (\ker D_x f)^{\perp}$, $D_x f : H_x \to \mathbb{C}$ conforme

- Ça découle de la preuve précédente.

Question A-t-on $(*)_2 \Longrightarrow (*)_N, \quad \forall N$?

Holomorphie discrète

Rappel de l'harmonicité sur les graphes

$\rightarrow$ définition de l'holomorphie par $\Delta f = \Delta f^2 = 0$

• Graphe: sommets V et arêtes E,

arête $\in E \rightarrow$ (origine, extrémité) $\in V \times V$....

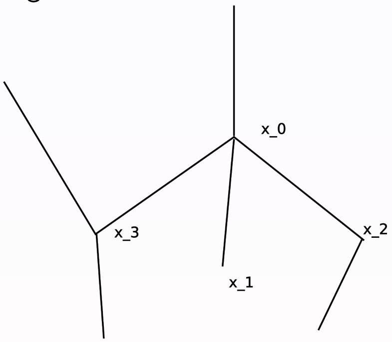
• Laplacien:

$$\Delta f(x_0) = \frac{1}{\nu(x)} \sum_{y \text{ voisin de } x_0} f(y) - f(x_0)$$

$\nu(x) =$ valence de x

$\sum_{y \sim x_0} f(y)$ Moyenne de f sur la sphère unité en x

Figure



REM: On peut pondérer le graphe $\longrightarrow$ espace métrique

Ici: métrique simpliciale

- Autres ingrédients (d'analyse sur les graphes)

a arête, $Osci_a f = f(ext(a) - f(ori(a))$

(ext = extrémité, ori= origine)

$\nabla f(x) = (Osci_a f)_a \in \mathbb{C}^n, \;\; n = \nu(x)$

$\nabla f(x) \in \Sigma \mathbb{C} a \qquad$ (a arête issue de x)

REM: On peut pondérer le graphe $\rightarrow$ espace métrique

Ici: métrique simpliciale

- Autres ingrédients (d'analyse sur les graphes)

a arête, $Osci_a f = f(ext(a) - f(ori(a))$

(ext = extrémité, ori= origine)

$\nabla f(x) = (Osci_a f)_a \in \mathbb{C}^n, \;\; n = \nu(x)$

$\nabla f(x) \in \Sigma \mathbb{C} a \qquad$ (a arête issue de x)

- Champ de vecteurs $x \rightarrow X(x) = (X_1, \dots, X_n) \in \Sigma \mathbb{C} a$

$\mathrm{Div}_x X = \frac{1}{\nu(x)} \Sigma X_i$ (flux)

$\Delta f(x) = \mathrm{Div} \nabla f(x)$

Généralisations algébriques de l'holomorphie

(généralisation maximale)

- F algèbre topologique,

- M espace où l'on peut parler d'harmonicité (ouverts de $\mathbb{R}^n$, variétés riemanniennes, graphes simpliciaux et métriques, chaines et processus de Markov = stationnarité)

- $f : M \to F$ holomorphe $\iff \Delta f = \Delta f^2 = 0$

•• Exemples: $F = H$ quaternions,

$F = M_{nn}(\mathbb{C})$

(équations non-linéaires amusantes = intéressantes)

Résultas

Théorème

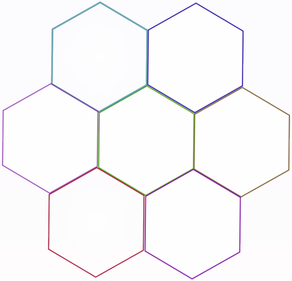
1) Pour une variété riemannienne $(*)_2 \Longrightarrow (*)_N, \quad \forall N$

2) Pour un graphe M de valence ν finie, $N \geq \nu$,
$(*)_N \Longrightarrow f =$ constante
(f satisfait $(*)_N$ si $\Delta f = \Delta f^2 = \ldots \Delta f^N = 0$)

3) Pour $M = \mathbb{R}^3$, $f : M \to \mathbb{C}$ holomorphe $\Longrightarrow$ à isométrie près, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: composition de la projection canonique et d'une application holomorphe ou anti-holomorphe.

4) $M = T_3 =$ arbre homogène de valence 3.
À automorphisme de T_3 et similitude de $\mathbb{C}$ près, f est le revêtement universel $f : T_3 \to \mathcal{H}$ du pavage hexagonal $\mathcal{H}$

Pavage hexagonal régulier du plan



Unique à similitude près: $z \longrightarrow az + b$

$\pi : T_3 \longrightarrow \mathcal{H}$ revêtement universel:

Interprétation:

- enroulement de l'arbre sur $\mathcal{H}$...

- marche aléatoire sur le pavage hexagonal...

Motivations

I: Problème de Dirichlet

Cas classique, D disque unité,

$f_0 \in L^\infty(\partial D, \mathbb{C})$

$\rightarrow f \in Har^\infty(D, \mathbb{C})$ extension harmonique de f_0 (par noyau de Poisson)

I: Problème de Dirichlet

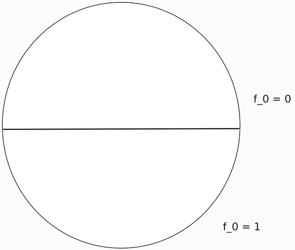
Cas classique, D disque unité,

$f_0 \in L^\infty(\partial D, \mathbb{C})$

$\to f \in Har^\infty(D, \mathbb{C})$ extension harmonique de f_0 (par noyau de Poisson)

Question: Comment savoir à partir de f_0 que f est holomorphe (pas seulement harmonique)?

Contre exemple:



$f_0 = 0$ sur hémisphère nord, et $f_0 = 1$ sur l'hémisphère sud.

f n'est pas holomorphe pour des raisons de symétrie.

La question équivaut à caractériser les valeurs au bord des fonctions holomorphes bornées?

- Transformé de Hilbert:

$u \in Har(D, \mathbb{R}) \rightarrow v \in Har(D, \mathbb{R})$ conjuguée harmonique:
$u + \sqrt{-1}v \in Hol(D, \mathbb{C})$

Difficulté: $Hil : Har^{\infty} \rightarrow Har^{2}$...

Motivation: généraliser la question pour mieux la comprendre!

Questions annexes:

S surface de Riemann ouverte;

• il existe toujours $f : S \to \mathbb{C}$ holomorphe

•• Question: signification géométrico-dynamique e l'existence de f holomorphe bornée?

REM: L'existence de f hamonique bornée $\iff$ non-ergodicité de l'action de $\pi_1(S) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ sur le cercle...

II:Dynamique holomorphe aléatoire naturelles (et correspondances)

Dynamique holomorphe vs intégrale de Poisson (fini vs infini):

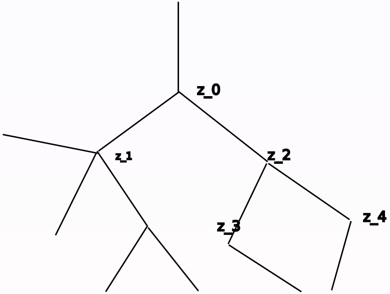
• Problème de Dirichlet: valeurs données à l'infini $\longrightarrow$ extension à l'intérieur...

•• Construction de fonctions holomorphes: valeurs données sur un "domaine fondamental" $\longrightarrow$, permettent une propagation...

Exemple: T_3

(z_0, z_2) donné,

On obtient (z_3, z_4) à permutation près,



Exemple: T_3

$$\begin{cases} (z_3 - z_0) + (z_4 - z_2) + (z_0 - z_2) & = 0 \\ (z_3 - z_0)^2 + (z_4 - z_2)^2 + (z_0 - z_2)^2 & = 0 \end{cases}$$

REM: Problème de Dirichlet sur un graphe à bord

Cas riemannien

Morphisms harmoniques

Affirmation: $f : M \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ holomorphe $\iff$ f morphisme harmonique

Définition: $f : M \to N$ morphisme harmonique $\iff$ $\forall \phi : N \to \mathbb{R}$ harmonique local, alors $f \circ \phi : M \to \mathbb{R}$ est harmonique.

f un morphisme de la catégorie des variétés riemanniennes munis de leurs applications harmoniques locales....

Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ morphisme harmonique,

On compose avec $z \in \mathbb{C} \rightarrow z^N \in \mathbb{C}$ (qui est harmonique en tant qu'application $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Cor: Si f est holomorphe, alors f^N (multiplication) est harmonique, i.e. f satisfait $(*)_N$ pour tout N

Théorème (Fuglede, Ishihara): $f : M \to N$ morphisme harmonique $\iff$ f harmonique et f horizontalement (semi-) conforme

- Contenu (implicite) de ce théorème: $(*)_2 \Longrightarrow (*)_N, \quad \forall N$
- Théorème $\Longrightarrow$ Affirmation (holomorphe = morphisme harmonique)
- REM: Morphismes harmoniques dans la cas discret....

Un problème de Jacobi

- Titre: Über eine particuläre Löfsung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ Crelle Reine Angew. Math. 36, 113-134 (1847)

$$\begin{cases} V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \\ (\frac{\partial V}{\partial x})^2 + (\frac{\partial V}{\partial y})^2 + (\frac{\partial V}{\partial z})^2 = 0 \end{cases}$$

• Jacobi: les niveaux de V sont des droites... $\rightarrow$ feuilletage par droites de $\mathbb{R}^3$

• Davantage de géométrie: V est transversalement conforme:
$D_u V : (\ker D_u V)^{\perp} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est conforme,

$\Longleftrightarrow$

X vecteur unitaire tangent aux niveaux de V, et ϕ^t son flot,
$D\phi^t : X_x^{\perp} \rightarrow X_{\phi^t(x)}^{\perp}$ est conforme,

Solution du problème par Baird & Wood (1988)

Approche probabiliste de F. Duheille (1997)

Enoncé en termes de feuilletages:

Le feuilletage défini par les niveaux de V est trivial,..., V est essentiellement une projection $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\Longleftrightarrow$

Une feuilletage transversalement conforme de $\mathbb{R}^3$ par droites est trivial (toutes les droites sont parallèles)

Géométrie de morphismes harmoniques

$f : M^3 \to \mathbb{R}^2$ morphisme harmonique, alors ses niveaux sont géoédésiques

• Plus généralement: $f : M^{n+2} \to N^n$, morphisme harmonique $\to$ les niveaux sont des sous-variétés minimales

• Exemple: $Hopf : S^3 \to S^2$

Projection $H^3 \to H^2$

Rigidité (à la Bernstein): ce sont les seuls, à isométrie près à la source, et transformation conforme au but.

Exemple

$Hopf : S^3 \to S^2$ est transversalement isométrique:

flot isométrique tangent à la fibration de Hopf $(z_1, z_2) \to e^{it}(z_1, z_2)$,

• $d : \mathbb{R}^3 \to S^3$ développement projectif: l'image de toute droite est un demi grand cercle (géodésique de S^3)

• $\mathcal{D} = d^{-1}(Hopf)$ feuilletage par droites de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{D}$ n'est pas trivial: deux droites de $\mathcal{D}$ ne sont jamais parallèles!

$\mathcal{D}$ est transversalement conforme

Dilemme!

Holomorphie discrète

$z_i = f(x_i)$, $\delta_i = z_i - z_0$ oscillation de f en x_0

Fait: $\Delta_x f = \Delta_x f^2 = 0$

équivaut à:

$$\begin{cases} \Sigma\delta_i & = 0 \;\; \text{(oscillation totale)} \\ \Sigma\delta_i^2 & = 0 \;\; \text{(oscillation quadratique)} \end{cases}$$

- Famille d'équations algébriques complexes indexée par x_0

$*_N$

$(*)_N$ équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{i=\nu}\delta_i & =0 \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{i=\nu}\delta_i^N & =0 \end{array}\right.$$

$*_N$

$(*)_N$ équivaut à

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=\nu} \delta_i & = 0 \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{i=\nu} \delta_i^N & = 0 \end{cases}$$

Si $N \geq \nu$, solution unique triviale $(0, \dots, 0)$

Cor: Sur une graphe de valence $\nu \leq N$, les solutions de $(*)_N$ sont constantes.

Propagation, Graphes de valence 3 et 4

Lemme *Soit* e *(resp.* (e, f)*) donnés. Il existe* (u, v) *unique modulo transposition tels que:*

$$\begin{cases} e + (u + v) & = 0 \\ e^2 + (u^2 + v^2) & = 0 \end{cases}$$

resp.

$$\begin{cases} e + f + (u + v) & = 0 \\ e^2 + f^2 + (u^2 + v^2) & = 0 \end{cases}$$

Cas de T_3

$e \longrightarrow (u, v)$

$j^3 = 1$ racine cubique de l'unité

$$\begin{cases} u & = je \text{ ou } j^2 e \\ v & = j^2 e \text{ ou } je \end{cases}$$

- Chemin:

$(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$, $a_i \in \{1, 2\}$

$\longrightarrow$

$(e, j^{a_1} e, j^{a_1 + a_2} e, \ldots, e j^{a_1 + a_2 + \ldots a_n}, \ldots)$

- Marche aléatoire localement injective sur le pavage hexagonal.
- Théorie ergodique: Sous-shift de type fini

Remarques

f est conforme (structure conforme sur T_3?)

Corollaire : tout graphe de valence 3 (en tout sommet), qui n'est pas un revêtement de $\mathcal{H}$ n'admet pas de fonction holomorphe non-constante (preuve: son revêtement universel est T_3)

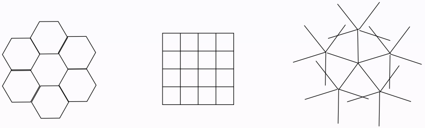
N-holomorphie

Figure pour $(*)_N$

T_{N+1}

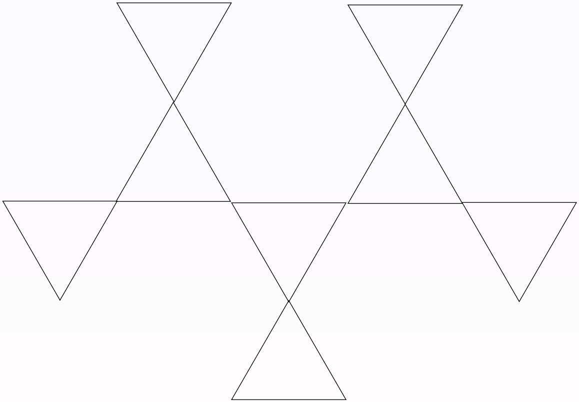
$N = 2, 3, 4, 5$

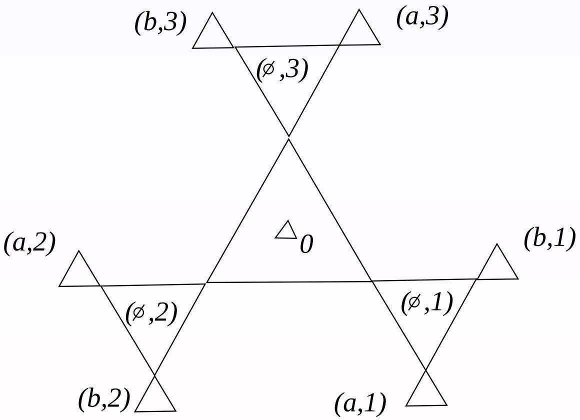
Figures



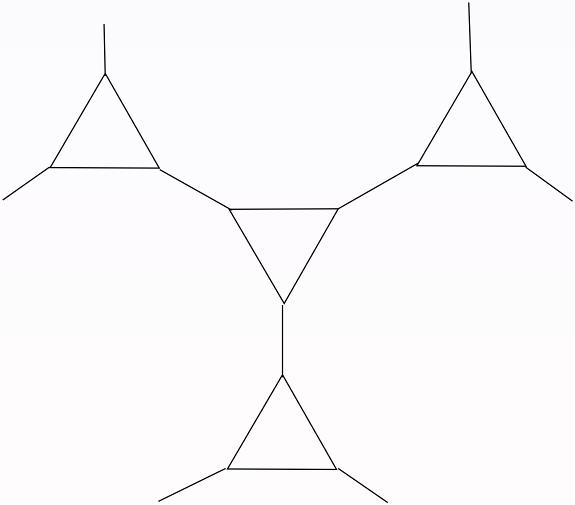
Tr_3

Figure: Tr_3 “dual” de T_3




(b,3)
(a,3)
(∅,3)
△0
(a,2)
(b,1)
(∅,2)
(∅,1)
(b,2)
(a,1)

REM: un autre graphe, de Cayley

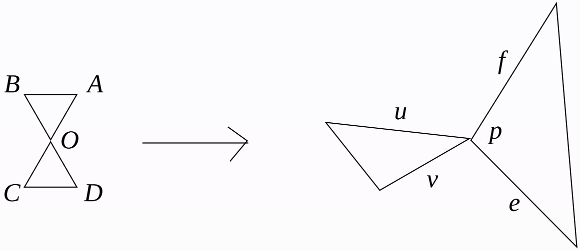


Correspondance:

$(p, e, f, x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$

$$\begin{cases} e + f - y + (-y + z) & = 0 \\ e^2 + f^2 + y^2 + (-y + z)^2 & = 0 \\ p - (x + y) & = 0 \end{cases}$$

$M : (p, e, f) \to (x; y, z)$ multivaluée


B
A
O
C
D
f
u
p
v
e

• Détermination finie: deux fonctions holomorphes sont conjuguées mod $Aut(Tr_3) \iff$ même valeurs pour 2 triangles.

Questions:

• relation d'équivalence sur $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^2 - \{0\}) =$ espace des triangles marqués

$\Delta' = \Delta \iff \exists f / f(\Delta) = \Delta'$

• Projectivisation $\rightarrow$ Correspondance (et relation d'équivalence) sur $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ (resp. $\mathbb{C}P^1$) est-elle ergodique?

Dynamique, simulations...