SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS RIGIDES: THÉORÈME DE L'ORBITE DENSE-OUVERTE

par

Abdelghani Zeghib

Table des matières

Résumé. —
Le but est de donner une démonstration complète et nouvelle d'un théorème de M. Gromov, affirmant que, si le pseudo-groupe des transformations locales préservant une connexion affine définie sur une variété admet une orbite dense, alors celle-ci est ouverte (et dense), en d'autres termes, un ouvert dense est localement homogène.

Abstract

The goal here is to give a new and self-contained proof of a theorem of Gromov stating that if the pseudo-group of local transformations preserving an affine connection on a manifold has a dense orbit, then this orbit is open. In other words, an open dense subset is locally homogeneous.

0.1. But.— Le but principal de ces notes est de présenter une nouvelle approche (introduite dans [**19**]) permettant en particulier de retrouver le théorème suivant de M. Gromov:

Théorème de l'orbite dense-ouverte 0.1. — [**13**] *Une orbite* dense *du pseudo-groupe d'isométries locales d'une structure pseudo-riemannienne, est* ouverte *(et dense). (En d'autres termes, il existe un ouvert dense localement homogène).*

Rappelons qu'une métrique pseudo-riemannienne sur une variété différentiable M est un champ de formes quadratiques non-dégénérées d'une certaine signature $- \ldots - + \ldots +$.

Une isométrie locale est un difféomorphisme f entre deux ouverts U et V de M, respectant les structures induites.

Le pseudo-groupe d'isométries locales $PIsom(M)$ consiste en la collection des isométries locales. En général, ceci ne se réduit pas à la localisation des éléments du groupe d'isométries $Isom(M)$.

L'inconvénient de $PIsom(M)$ par rapport à $Isom(M)$ est qu'il n'est pas un groupe; la composition est définie partiellement, ce qui rend délicate l'étude dynamique de son "action". Cependant, on peut parler d'orbites de $PIsom(M)$, l'orbite d'un point $x \in M$ étant $\mathcal{O}_x = \{f(x), f$ isométrie locale définie au voisinage de $x\}$.

Nous allons en réalité démontrer le théorème pour une connexion affine (au lieu d'une métrique pseudo-riemannienne). Les isométries (locales) se définissent de la même façon; elles sont parfois dites transformations affines (locales).

À une métrique pseudo-riemannienne est associée naturellement une connexion, dite de Levi-Civita. Le pseudo-groupe de la connexion contient, parfois strictement, celui de la métrique. La métrique pseudo-riemannienne paraît comme une structure de "connexion enrichie" (de contraintes). C'est en fait pour ce genre de structures que le théorème de l'orbite dense-ouverte sera démontré (§2.3).

0.2. Quelques motivations.— Comme l'objectif ici est de démontrer plutôt que d'appliquer le théorème, on va se contenter de mentionner une application majeure du théorème, qui avait permis à Benoist-Foulon-Labourie [**6**] de démarrer leur classification des flots d'Anosov de contact ayant des distributions stable et instable différentiables.

Le point de départ, dû à Kanai [**15**], est de voir qu'un tel flot préserve une métrique pseudo-riemannienne. La construction classique se résume dans le fait qu'une forme symplectique sur un espace vectoriel, ainsi que la donné d'un couple de sous-espaces lagrangiens transverses, déterminent canoniquement une métrique pseudo-riemanniennes: une sorte de symétrisation de la forme symplectique (qui est anti-symétrique).

On a donc une métrique pseudo-riemannienne préservée par un flot ayant des orbites denses (comme tout flot d'Anosov préservant le volume). D'après le théorème de l'orbite dense-ouverte, il existe un ouvert dense localement homogène.

L'apport de [**6**] était d'abord de montrer que cet ouvert est tout, et ensuite de l'identifier en tant qu'espace localement homogène.

Notons que même dans ce cadre fortement homogène, il existe des exemples où le groupe d'isométries est réduit au flot d'Anosov lui même. (Par exemple, le fibré unitaire tangent d'une variété hyperbolique de dimension 3 admet une métrique pseudo-riemannienne naturelle localement homogène, dont le groupe d'isométries se réduit au flot géodésique). Les orbites du groupe d'isométries sont donc maigres quoique denses. On peut donc dire que le théorème de l'orbite dense-ouverte présente un avantage du pseudo-groupe d'isométries locales, par rapport au groupe d'isométries!

Notons également que l'existence de métriques, peu régulières, par exemple C^1, invariantes par des flots d'Anosov, n'a point de conséquences (tous les flots géodésiques des surfaces à courbure négative en ont). Le théorème de l'orbite dense-ouverte exige une différentiabilité suffisante (dépendante de la dimension). On simplifie ici en supposant tout C^∞.

Citons quelques autres références (en plus de [**6**], [**13**] et [**19**]) contenant d'autres approches ou des applications du théorème de l'orbite dense ouverte: [**2**], [**3**], [**7**], [**8**], [**9**], [**10**] et [**20**].

0.3. Plan.— Considérons sur M la relation d'équivalence $\mathcal{R} \subset M \times M$ définie par $(x, y) \in \mathcal{R} \iff x$ et y ont la même orbite par le pseudo-groupe d'isométries locales (Fait 2.8).

Le théorème de l'orbite dense-ouverte équivaut au fait que: si $\mathcal{R}$ est dense, alors, $\mathcal{R}$ contient un ouvert dense (dans $M \times M$).

Pour voir que $\mathcal{R}$ vérifie cette propriété, on montre que $\mathcal{R}$ est la projection d'un certain ensemble "partiellement algébrique" contenu dans un certain fibré au dessus de $M \times M$.

• Les ensembles (ainsi que d'autres objets) partiellement algébriques sont étudiés au §1. On montre en particulier qu'ils vérifient une propriété de "projection dominante", i.e. leurs projections vérifient un principe "dense-ouvert".

• L'ensemble partiellement algébrique candidat naturel à être au dessus de $\mathcal{R}$, est le "domaine d'intégrabilité" $\mathcal{D}$ d'un certain champ de plans, introduit au §2.

• La démonstration du fait que $\mathcal{D}$ est effectivement partiellement algébrique se fait en le rapprochant d'un autre domaine d'"intégrabilité formelle" $\mathcal{D}^\infty$, qui sera évidemment partiellement algébrique (§§2.11 et 2.13). L'égalité $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$, est un problème d'intégrabilité appréhendé ici par la théorie du contrôle (§3).

Je remercie P. Foulon pour m'avoir inviter à la session état de la recherche de la SMF "rigidité, groupe fondamental et dynamique", ce qui m'a donné l'occasion de rédiger ce texte.

1. Géométrie (semi-) algébrique partielle

Soit $N \to B$ un fibré vectoriel au dessus d'un espace topologique B. Pour commencer, supposons le trivial, $N = B \times R^m$. Une fonction $f : N \to \mathbb{R}$ est dite C^0**-partiellement algébrique** si elle est élément de l'anneau $C^0(B)[X_1, \ldots, X_m]$. En d'autres termes, f s'écrit comme somme finie,

$$f(x, X) = \Sigma_I a_I(x) X^I$$

où $x \in B$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$, $a_I \in C^0(B)$, $I = (i_1, \ldots, i_m)$ multi-indice et $X^I = X_1^{i_1} \ldots X_m^{i_m}$.

Dans le cas où le fibré n'est pas (globalement) trivial, on définit une fonction partiellement algébrique par le fait qu'elle soit partiellement algébrique au dessus de tout ouvert trivialisant le fibré. Cette définition est cohérente à cause du caractère linéaire des changements de trivialisations.

Remarque 1.1. — Une autre notion plus faible serait de définir une fonction $f : N \to \mathbb{R}$ C^0-partiellement algébrique, par le fait qu'elle soit continue et que pour tout $b \in B$ la restriction de f à la fibre N_b soit polynomiale.

On introduit de la même façon une notion de fonction C^∞**-partiellement algébrique** lorsque B est une variété lisse. Localement, il s'agit d'éléments de l'anneau $C^\infty(\mathbb{R}^n)[X_1, \ldots, X_m]$ ($n = \dim B$).

Pour alléger les notations on parlera dans la suite d'objets partiellement algébriques sans spécifier leur régularité C^0 ou C^∞, lorsque les deux cas peuvent être traités de la même façon, ou lorsque la catégorie considérée est précisée par le contexte

Un sous-ensemble S de N est **partiellement algébrique** lorsqu'il est lieu de zéros d'une famille (finie ou non) de fonctions partiellement algébriques.

Exemple 1.2. — Le graphe d'une section du fibré $N \to B$ est un ensemble C^0- partiellement algébrique. En effet, si $s : x \in B \to s(x) \in N$ est cette section, alors son graphe est le lieu des zéros de $(x, X) \to X - s(x)$ ($X \in N_x$).

Dans le cas lisse, si le graphe d'une section s est C^∞- partiellement algébrique, alors s est "pratiquement" C^∞. Ceci peut se voir facilement lorsque $m = 1$, i.e. lorsque la fibre type est $\mathbb{R}$.

Rappelons cependant que tout fermé d'une variété lisse est lieu de zéros de fonctions C^∞. En particulier, le graphe d'une section C^0 est lieu de zéros de fonctions C^∞ sur N.

Exemple 1.3. — Prenons $N = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, et $S = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$.

La structure du fibré est déterminée par une projection linéaire $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, parallèlement à une droite D supplémentaire de $\mathbb{R}$.

Lorsque la droite D est rationnelle (par exemple $D = \{0\} \times \mathbb{R}$), les fibres de S sont soit vides, soit homéomorphes à $\mathbb{Z}$. Mais, en toute généralité, si S

est un ensemble partiellement algébrique, alors ses fibres sont des ensembles algébriques (au sens usuel). En conclusion, pour un fibré correspondant à une droite rationnelle, $\mathbb{Z}^2$ n'est pas partiellement algébrique (car $\mathbb{Z}$ n'est pas algébrique).

Supposons maintenant que D est une droite irrationnelle. Dans ce cas une fibre est soit vide soit réduite à un seul point (une droite irrationnelle contient au plus un point entier). Donc les fibres de S sont individuellement algébriques.

Dans ce cas, la réponse (négative) à la question S est -il partiellement algébrique provient du résultat suivant.

Lemme de la projection dominante 1.4. — *Soit $\pi : N \to B$ un fibré au dessus d'un espace topologique B et $S \subset N$ un ensemble C^0-partiellement algébrique. Alors $\pi(S)$ contient un ouvert dense de son adhérence $\overline{\pi(S)}$. (Il est équivalent de dire que, quitte à remplacer B par un ouvert dense, la projection de S devient fermée).*

Un ingrédient de la preuve, et autre fait fondamental de la théorie est le:

Lemme de la noetherienité locale 1.5. — *Soit R l'un des deux anneaux, $R = C^0(B)[X_1, \dots, X_m]$ où B espace topologique, ou $R = C^\infty(B)[X_1, \dots, X_m]$ où B est une variété.*

Soit L un sous-module d'une puissance R^l, alors il existe un ouvert dense $U \subset B$, tel que $L|U$ soit localement de type fini: $\forall x \in U$, $\exists V \subset U$ voisinage de x tel que $L|V$ soit finiment engendré (en tant que $C^0(V)[X_1, \dots, X_m]$-module).

1.1. Preuve de la noetherienité locale.— On se restreind ici au cas de $R = C^0(B)[X_1, \dots, X_m]$. L'idée est qu'on a une famille $\{L_b\}_{b \in B}$ de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$-sous-modules de $(\mathbb{R}[X_1, \dots, X_m])^l$. Par le théorème de base de Hilbert, les L_b sont individuellement de type fini. Le point, est qu'en dehors d'un ensemble d'accidents, un fermé maigre, on peut choisir continûment des bases pour les L_b.

La preuve elle même ressemble à celle du cas classique, c'est-à-dire que $R[X_1, \dots, X_m]$ est noetherien, dès que R est noetherien (voir par exemple [**16**]).

Ici, $R = C^0(B)$ est "localement noetherien" au sens qu' étant donné un idéal L de R, il existe un ouvert dense U (dans B) tel que, pour tout $x \in U$, il existe un voisinage V_x tel que $L|V_x$ soit un idéal de type fini sur $C^0(V_x)$.

On prend $U = U_1 \cup U_2$, où $U_1 = \{x : \exists f \in L, f(x) \neq 0\}$ et $U_2 = \{x : \exists V_x$ voisinage de x tel que $f|V_x = 0, \forall f \in L\}$.

Pour $x \in U_1$, si $f \in L$ ne s'annule pas sur un voisinage de x, alors $L|V_x = C^0(V_x)$.

Donc, localement sur $U_1 \cup U_2$, L est trivial, c'est-à-dire que c'est soit 0 soit tout. En particulier, L est localement de type fini sur U.

On vérifie facilement que U est dense dans B.

1.2. Preuve de la projection dominante.— Soit S un ensemble partiellement algébrique. On peut supposer que $\pi(S)$ est dense dans B, et ce en remplaçant B par $\overline{\pi(S)}$. On est amené à montrer que $\pi(S)$ contient un ouvert dense de B. La question étant locale, on peut tout restreindre à un ouvert de B. On peut en particulier, d'après la noetherienité locale, supposer que S est lieu de zéros d'un système fini de fonctions partiellement algébriques $f_1, \ldots f_l$. Comme tout est réel, S est défini par la seule fonction partiellement algébrique $f = \Sigma f_i^2$.

Écrivons $f(x, X) = \Sigma_{|I| \leq k} a_I(x) X^I$. Considérons l'application $g : x \in B \to$ le polynôme $\Sigma a_I(x) X^I \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]_{\leq k}$, où $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]_{\leq k}$ est l'espace des polynômes de degré $\leq k$ (k est un majorant du degré de f).

La projection de S s'identifie avec l'ensemble des x tels que $g(x)$ admet une racine (réelle).

La projection dominante découlera donc du fait suivant:

Lemme 1.6. — *Soit $g : B \to \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]_{\leq k}$ une application continue et $Y = \{x \in B /$ le polynôme $g(x)$ a une racine réelle $\}$. Alors Y contient un ouvert dense de $\overline{Y}$.*

Preuve. Le cas $m = 1$, i.e. $g(x)$ est un polynôme à une indéterminée, est particulièrement simple. Dans ce cas, $g(x)$ est soit un polynôme constant, soit il admet une racine complexe. Notons $B_0 = \{x \in B / g(x) = \text{une constante }\}$. Donc $Y \cap (B - B_0)$ est fermé dans l'ouvert $B - B_0$. (Sur $B - B_0$, $g(x)$ admet une racine complexe, la condition avoir une racine réelle, est fermée).

Ainsi, Y est réunion d'un fermé de $B - B_0$, et d'un fermé C de B_0, $C = \{x \in B_0, g(x) = \text{polynôme nul}\}$. On voit facilement que Y contient un ouvert dense de son adhérence.

Dans le cas $m > 1$, Y est l'image réciproque par g, de $Z \subset \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]_{\leq k}$, l'ensemble des polynômes admettant une racine réelle.

L'ensemble Z est un ensemble semi-algébrique "universel". En effet, Z est la projection de l'ensemble algébrique "universel" $\Phi^{-1}(0)$, défini par le polynôme "universel":

$\Phi : (X_1, \ldots, X_m, p) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_m]_{\leq k} \to p(X_1, \ldots, X_m) \in \mathbb{R}$.

Un ensemble semi-algébrique se définit par le fait qu'il soit **décrit** par des polynômes, i.e. il est combinaison booléenne finie d'inégalités polynomiales [**5**]. C'est équivalent au fait que cet ensemble soit réunion **finie** d'ensembles de la forme

$$\{x, g_1(x) = 0, \ldots, g_l(x) = 0, h_1(x) > 0, \ldots, h_r(x) > 0\}$$

Ainsi, Z est décrit par des polynômes. Il en découle que $Y = g^{-1}Z$ est décrit par des fonctions continues (celles obtenues en composant par g les polynômes décrivant Z). Donc Y est réunion finie $Y = \cup Y_i$ où chaque Y_i a la forme: $Y_i = \{x \in B, g_1(x) = 0, \ldots, g_l(x) = 0, h_1(x) > 0, \ldots, h_r(x) > 0\}$ (g_j et h_j continues).

Remarquons que chaque Y_i est l'intersection du fermé $F_i = \{x \in B, g_1(x) = 0, \ldots, g_l(x) = 0\}$ et l'ouvert $O_i = \{x \in B, h_1(x) > 0, \ldots, h_r(x) > 0\}$.

Donc Y_i est ouvert dans F_i et par suite Y_i est ouvert dans $\overline{Y_i}$, car $\overline{Y_i} \subset F_i$. Ainsi Y_i est ouvert et dense (par définition) dans $\overline{Y_i}$.

Une manipulation de topologie générale permet de montrer qu'une réunion finie $Y = \cup Y_i = \cup_i (F_i \cap O_i)$ contient un ouvert dense de son adhérence.

$\diamondsuit$

1.3. Ensembles partiellement constructibles.— On aura besoin de généraliser les ensembles partiellement algébriques comme suit. Un sous-ensemble $S \subset N$ est dit **partiellement constructible** s'il s'écrit comme différence $S = S_1 - S_2$ de deux ensembles partiellement algébriques.

La projection dominante s'étend pour les ensembles partiellement constructibles. Pour le voir, supposons le fibré trivial, $N = B \times \mathbb{R}^m$ et que S_1 et S_2 soient définies par deux fonctions partiellement algébriques $f(x, X)$ et $g(x, X)$ respectivement ($x \in B$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$).

Considérons l'application $\phi : B \times \mathbb{R}^m - S_2 \to B \times \mathbb{R}^{m+1}$, $\phi(x, X) = (x, X, \frac{1}{g(x,X)})$. Ainsi $S_1 - S_2$ et $\phi(S_1 - S_2)$ ont la même projection dans B. Mais $\phi(S_1 - S_2)$ est un sous-ensemble partiellement algébrique de $B \times \mathbb{R}^{m+1}$: il est défini par les équations: $X_{m+1} g(x, X) - 1 = 0$ et $f(x, X) = 0$.

Remarque 1.7. — [Principe de Tarski-Seidenberg généralisé]. Dans [**4**], on attribue à Łojasiewicz la version suivante du théorème de Tarski-Seidenberg. Soit E un ensemble, et $\mathcal{A}$ un anneau de fonctions réelles sur E. Notons par $S(\mathcal{A})$ l'ensemble des sous-ensembles de E "décrits" par $\mathcal{A}$: la plus petite famille de sous-ensembles, stable par intersection et union **finies** et passage au complémentaire, et contenant les parties élémentaires de la forme $\{x \in E, f(x) > 0\}$, $f \in \mathcal{A}$.

Le version de Łojasiewicz du théorème de Tarski-Seidenberg affirme que si $F \subset E \times \mathbb{R}^k$ appartient à $S(\mathcal{A}[X_1, \ldots, X_k])$, alors $\pi(F) \in S(\mathcal{A})$, où π désigne la projection $E \times \mathbb{R}^k \to E$.

La preuve est identique à celle du cas classique des ensembles semi-algébriques.

On voit donc que le théorème de la projection dominante se déduit de la noetherienité locale et de la version de Łojasiewicz du théorème de Tarski-Seidenberg.

1.4. Autres objets partiellement algébriques.— Ici B est une variété, et $N \to B$ est un fibré lisse. Localement $N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Un **champ de vecteurs** V sur N est vu comme une application $V : (x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to (V_1, \dots, V_{n+m}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Il est dit **partiellement algébrique** si toutes les fonctions V_i sont partiellement algébriques.

On constate que cette notion s'étend aux fibrés vectoriels. Il s'agit de remarquer que les difféomorphismes locaux: $\Phi : (x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to (\phi(x), A(x)X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, où A est une application $A : \mathbb{R}^n \to GL(\mathbb{R}^m)$, préservent l'ensemble des champs de vecteurs partiellement algébriques.

On a:

Fait 1.8. — *Le crochet de deux champs de vecteurs partiellement algébriques est partiellement algébrique.*

Un **champ de plans** est partiellement algébrique s'il est localement engendré par une famille de champs de vecteurs partiellement algébriques.

1.4.1. Exemples.— Une métrique pseudo-riemannienne sur une variété M est une fonction partiellement algébrique sur TM.

Son flot géodésique (plus précisément son générateur infinitésimal) est un champ de vecteurs partiellement algébrique.

Plus généralement, le champ hamiltonien définie par une fonction partiellement algébrique sur T^*M, est un champ de vecteurs partiellement algébrique.

Le flot géodésique d'une connexion est un champ de vecteurs partiellement algébrique (sur TM). En effet, ce champ admet l'expression locale suivante:

$$V : (x, p) \in U \times R^n \to (p_1, \dots, p_n, \Sigma_{ij}\Gamma^1_{ij}(x)p_ip_j, \dots, \Sigma_{ij}\Gamma^n_{ij}(x)p_ip_j)$$

où $(x, p) = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ et les Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel de la connexion.

Le but du § suivant est d'introduire un champ de plans "géodésique tautologique" sur les fibrés en grassmanniennes $Gr^d(M)$, défini pour tout d entre 1 et dim M. Il sera "partiellement algébrique".

1.5. Complément: structure des ensembles partiellement algébriques.— À titre de complement (cela ne servira pas pour la preuve du Théorème 0.1) nous discuterons dans ce qui suit une autre propriété de régularité vérifiée par les ensembles partiellement algébriques (et de la même façon par les ensembles partiellement constructibles).

En fait, il semble, au moins dans le cas C^∞-partiellement algébrique, que les ensembles partiellement algébriques jouissent de propriétés de structure parallèles à celles des ensembles algébriques. Voici un exemple de résultat:

Proposition 1.9. — *Soit S un ensemble C^∞-partiellement constructible dans N qui se projette* surjectivement *sur (la variété) B. Alors, il existe $S' \subset S$,* *une sous-variété C^∞, canoniquement définie, ouverte dans S, et sur laquelle la projection est une submersion sur un ouvert dense de B.*

Preuve. On se restreindra au cas où S est partiellement algébrique, on a vu ci-dessus comment se ramener du cas partiellement constructible au cas partiellement algébrique.

Le problème étant local, supposons S défini par un système fini d'équations partiellement algébriques: $f_1 = \ldots = f_k = 0$. On définit naturellement une différentiation verticale d^v. On note $r(x)$ le rang du système des différentielles $d^v f_1, \ldots, d^v f_k$. Soit r_0 le maximum de $r(x)$ sur S. Notons $S^{reg} = \{x \in S / r(x) = r_0\}$ et $S^{sing} = S - S^{reg}$.

Soit $(x_0, X_0) \in S^{reg}$. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que le rang de $\{d^v f_1, \ldots, d^v f_{r_0}\}$ est égale à r_0 en (x_0, X_0).

Notons V le lieu des zéros de $f_1 \ldots f_{r_0}$. On a r_0 fonctions dont le rang vertical vaut r_0, donc leur rang ordinaire vaut également r_0 et est maximal, et ainsi V est une sous-variété au voisinage de (x_0, X_0). La projection est une submersion car le rang vertical est maximal.

Évidemment, $S \subset V$ (il y a moins d'équations pour V). La théorie des ensembles algébriques (voir par exemple l'approche de Whitney [**18**]), dit que, dans la fibre de (x_0, X_0), S et V coincident dans un voisinage de (x_0, X_0).

À priori, il n'y a pas de coincidence de S et V en dehors de la fibre N_{x_0}. En effet, le autres fibres de S peuvent être dramatiquement vides. En revanche si une fibre N_x contient un point (x, X) de S assez proche de (x_0, X_0), alors la coincidence locale de S et V s'étend à cette fibre (au voisinage de (x, X)). Cela découle du fait que $(x, X) \in S^{reg}$ et du fait que V joue le même rôle pour (x, X) (que pour (x_0, X_0)).

Ainsi, pour assurer une structure de sous-variété et de submersion, il suffit de se placer aux points de S^{reg} pour lesquels toutes les fibres voisines contiennent des points de S. Pour cela, introduisons,

$$S^{maig} = \{x \in S, \exists V_x, \text{voisinage de } x \text{ dans } S \text{ tel que } \mathrm{int}(\pi(V_x)) = \emptyset\}$$

(où int désigne l'intérieur). C'est un ouvert de S dont la projection est maigre. Notons S^{ouv} le complémentaire de S^{maig} (dans S). C'est un fermé dont la projection est résiduelle.

Si (x_0, X_0) appartient à S^{ouv}, alors, toutes les fibres voisines contiennent des points de S proches. En particulier, si en plus, comme ci-dessus, $(x_0, X_0) \in S^{reg}$, alors S et V coincident dans un voisinage de (x_0, X_0). Dans ce voisinage, π est une submersion sur B, et par conséquent, il est contenu dans $S^{reg} \cap S^{ouv}$. On a ainsi montré:

Fait 1.10. — *S^{reg} est réunion disjointe de deux ouverts $S^{reg} \cap S^{maig}$ et $S^{reg} \cap S^{ouv}$. Ce dernier est une sous-variété sur laquelle la projection est une submersion sur B.*

Toutefois, il peut arriver que $S^{reg} \cap S^{ouv}$ soit vide. Cela équivaut au fait que la projection de S^{reg} soit maigre. Il peut aussi arriver que cette projection soit d'intérieur non-vide mais non-dense dans B. Notons $U = \mathrm{int}(\pi(S^{reg}))$. Si U est dense, la proposition est démontrée. Sinon, on restreind tout à $\mathrm{int}(B - U)$, et on remplace S par S^{sing}, qui est évidemment partiellement algébrique.

Par l'hypothèse de surjectivité de la projection de S sur B, et par construction de U, la projection de S^{sing} sur $\mathrm{int}(B - U)$ est résiduelle. Donc, par le théorème de la projection dominante, on peut supposer que c'est tout, quitte à remplacer $\mathrm{int}(B - U)$ par un ouvert dense.

On peut ainsi appliquer à S^{sing} restreint à $\mathrm{int}(B - U)$, les constructions précédentes sur S. Le r_0 correspondant à S^{sing} est strictement plus petit que celui de S. Ce processus arrivera donc à terme dans un temps fini. On prendra pour S' la réunion de toutes les sous-variétés de type $S^{reg} \cap S^{ouv}$, obtenues durant les étapes de l'itération de la construction.

$\diamondsuit$

Remarque 1.11. — Des considérations implicites d'ensembles partiellement algébriques existent dans la littérature, voir à titre d'exemple [**11**]. Il existe également des variantes (explicites), mais avec des différences assez profondes, voir par exemple [**17**]

2. Géométrie différentielle

Soit (M, ∇), une variété affine, c'est-à-dire que M est munie d'une connexion ∇. Pour simplifier, on supposera que la connexion est sans torsion.

La connexion détermine des espaces horizontaux sur les fibrés naturels associés à M. En particulier, pour tout entier d, $1 \leq d \leq \dim M$, le fibré des grassmanniennes des d-plans tangents $Gr^d M \to M$, est muni d'un splitting de son espace tangent $TGr^d M = V \bigoplus H$, V étant le fibré vertical (canonique) et H est l'espace horizontal (déterminé par la connexion).

Une courbe $c(t)$ de $Gr^d M$ peut s'écrire $(x(t), p(t))$, où $x(t)$ est une courbe de M, et $p(t)$ est champ de d-plans le long de de la courbe $x(t)$, i.e. $p(t) \in Gr^d_{x(t)} M$.

La courbe $c(t)$ (supposée lisse) est horizontale, c'est-à-dire tangente à H, si et seulement si $p(t)$ est parallèle le long de $x(t)$.

2.1. Champ de plans géodésique tautologique.— Notons $\pi : Gr^d M \to M$ la projection. Pour tout $p \in Gr^d M$, $d_p\pi$ établit une identification $H_p \to T_{\pi(p)} M$. On définit de "façon tautologique" un champ de plans τ de dimension d, par $\tau(p) \subset H_p$ et $d_p\pi(\tau(p)) = p$ $(\subset T_{\pi(p)} M)$.

On notera ce champ τ^d pour mentionner sa dépendance de la dimension, et on l'appellera le champ de plans **géodésique tautologique** de dimension d.

Pour $d = 1$, τ^1 est le "flot" géodésique sur le projectivisé $P(TM)$ du fibré tangent TM, i.e. le feuilletage de dimension 1 obtenu à partir du flot géodésique sur TM, par passage au quotient $TM \to P(TM)$.

Remarque 2.1. — Sur $Gr^d(M)$ il y a un **système de Pfaff tautologique**, qui est un champ de plans T de codimension $n - d$, $n = \dim M$. Il est défini par $d_p\pi(T(p)) = p$ (notations ci-dessus). Ceci est une généralisation de la forme de Liouville sur l'espace cotangent. Le champ de plans géodésique tautologique est simplement l'intersection du système de Pfaff tautologique avec l'horizontal.

On démontre directement le fait suivant, dont le point (i) correspond au caractère horizontal, et le point (ii) au caractère tautologique.

Fait 2.2. — *Une courbe $c(t) = (x(t), p(t))$ est tangente à τ^d, si et seulement si:*

i) Elle est horizontale: $p(t)$ est parallèle le long de $x(t)$.

ii) $x'(t) \in p(t)$.

2.1.1. Feuilles.— Une feuille de τ^d est une sous-variété de Gr^dM **de dimension (maximale)** d partout tangente à τ^d.

Une sous-variété S de M admet un relèvement dans Gr^dM, par son application de Gauss $Ga : x \in S \to T_xS \in Gr^dM$.

Une sous-variété S est (totalement) **géodésique** si elle contient localement les géodésiques qui lui sont tangentes: si $x(t)$ est une géodésique de M définie sur un intervalle contenant 0 et $x'(0) \in TS$, alors $x(t) \in S$, pour t dans un intervalle contenant 0.

Ceci est équivalent au fait que: pour toute courbe $x(t)$ dans S, le champ de plans: $t \to T_{x(t)}S$ est parallèle le long de $x(t)$. (C'est pour assurer cette équivalence qu'on a supposé la connexion sans torsion). Ceci et le fait précédent permettent de démontrer.

Fait 2.3. — *Une sous-variété S' de dimension d dans Gr^dM est une feuille de τ^d si et seulement si elle est le relèvement de Gauss d'une sous-variété géodésique S de dimension d dans M.*

Rappelons qu'en tout point $x \in M$, l'application exponentielle $\exp_x$ est définie d'un voisinage de 0 dans T_xM à valeurs dans un voisinage de x dans M. Elle envoie droite (vectorielle) en géodésique passant par x.

Pour p un d-plan en x, $\exp_x(p)$ est une sous-variété de M tangente à p.

Fait 2.4. — *Par un élément $p \in Gr^d_xM$ passe une feuille de τ^d si et seulement si, p est l'espace tangent d'une sous-variété géodésique dans M.*

C'est équivalent au fait que $\exp_x(p)$ soit une sous-variété géodésique (au voisinage de x).

2.1.2. Cas intégrable.— D'après ce qui précède, si τ^d est intégrable, alors, tout d-plan de M est tangent à une sous-variété géodésique. Dans le cas des connexions de Levi-Civita des métriques riemanniennes, la caractérisation classique des variétés riemanniennes vérifiant cette propriété d'existence de sous-variétés géodésiques, est dûe à Schur. On la formule ici sous le nom de lemme de Schur, car c'est essentiellement équivalent aux deux lemmes de Schur classiques, en théorie des représentations, et en géométrie riemannienne (qu'on va en fait utiliser dans la preuve qui suit).

Lemme de Schur 2.5. — *Pour une variété riemannienne M de dimension > 2, il existe un d non trivial, c'est-à-dire $1 < d < dimM$, tel que τ^d soit intégrable, si et seulement si, M est à courbure constante.*

Preuve. Faisons la preuve pour $d = 2$. Donc tout 2-plan est tangent à une sous-variété géodésique. L'information qu'on va en tirer est que tout 2-plan p est invariant par le tenseur de courbure de la connexion $R : TM \bigoplus TM \bigoplus TM \to TM$, i.e. $X, Y, Z \in p \Longrightarrow R(X,Y)Z \in p$. Ceci vient du fait que l'espace tangent d'une sous-variété géodésique est invariant par R (car il est invariant par la connexion elle même).

Pour $X \in T_xM$ fixé, notons $A_X : T_xM \to T_xM$, l'endomorphisme $A_X(Y) = R(X,Y)X$. C'est un endomorphisme symétrique, en particulier préservant $\mathbb{R}X^\perp$.

L'invariance par R appliquée aux plans $\mathbb{R}X \bigoplus \mathbb{R}Y$, entraîne que tout $Y \in \mathbb{R}X^\perp$ est vecteur propre de A_X. Ainsi A_X est une homothétie (ceci rappelle le lemme de Schur en théorie des représentations). Tous les 2-plans contenant X ont donc une même courbure sectionnelle.

Ceci appliqué à un $X \in T_xM$ quelconque, montre qu'en fait tous les 2-plans en x ont une même courbure sectionnelle.

Pour en déduire que la courbure sectionnelle est indépendante de $x \in M$, on utilise le lemme de Schur de géométrie riemannienne, disant que si une variété (de dimension > 2) est ponctuellement d'Einstein, i.e. sa courbure de Ricci est proportionnelle à sa métrique en tout point, alors la variété est d'Einstein, au sens que le coefficient de proportionnalité est constant.

$\diamondsuit$

Le résultat précédent se généralise aux connexions de Levi-Civita des métriques pseudo-riemanniennes.

Pour une connexion quelconque, il n'y a pas de notion de courbure sectionnelle. Le résultat (moins évident) est que, un τ^d, de dimension non-triviale est intégrable, si et seulement si la connexion est (localement) projectivement plate, i.e. qu'elle est (localement) projectivement équivalente à une connexion plate [**12**]. Rappelons F qu'une équivalence projective est un difféomorphisme entre deux variétés munies de connexions, envoyant géodésique (non-paramétrée) sur géodésique (non-paramétrée).

Remarquons qu'en fait τ^d est un invariant projectif.

2.1.3. Domaine d'intégrabilité.— À l'opposé du cas dégénéré qui précède, on peut montrer que pour une connexion générique, et toute dimension d non-triviale, τ^d est un champ de plans "absolument non-intégrable". Une façon de traduire cela consiste à dire que les crochets de Lie itérés des champs de vecteurs tangents à τ^d engendrent TGr^dM. Toutefois, ce sont les cas intermédiaires non-génériques, et non-dégénérés, qui semblent être intéressants en géométrie. Pour évaluer le taux d'intégrabilité on définit (naïvement):

Definition 2.6. — *Le* **domaine d'intégrabilité** $\mathcal{D}$ *de* τ^d *est l'ensemble des* p *par lesquels passe une feuille (plus précisément un germe de feuille) de* τ^d.

En d'autres termes, $p \in \mathcal{D}$*, si et seulement si* $\exp_x p$ *est une sous-variété géodésique au voisinage de* x*, la projection de* p *dans* M.

2.2. Pseudo-groupe d'isométries.— À partir d'une connexion ∇ sur M, on peut construire naturellement une connexion produit $\nabla \oplus \nabla$ sur $M \times M$. Considérons un champ sur $M \times M$ de la forme $(X(x,y),0)$, $(x,y) \in M \times M$. Pour y fixé, $X(x,y)$ est un champ sur M. Soit (x_0,y_0) un point fixé et $(Y,Z) \in T_{x_0}M \times T_{y_0}M$. Alors $\nabla \oplus \nabla_{(Y,Z)}(X,0) = (\nabla_Y X(x_0,y_0) + d_yX.Z(x_0,y_0),0)$, où la dérivé covariante $\nabla_Y X$ est obtenue en fixant $y = y_0$, et d_yX est la dérivée usuelle, obtenue en fixant $x = x_0$, et voyant X comme une application vectorielle $y \to X(x_0,y) \in T_{x_0}M$.

La connexion $\nabla \oplus \nabla$ est caractérisée par le fait qu'une courbe $c(t) = (x(t),y(t))$ est géodésique, si et seulement si, $x(t)$ et $y(t)$ sont des géodésiques de M.

Lorsque ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique pseudo-riemannienne g sur M, alors $\nabla \oplus \nabla$ est la connexion de Levi-Civita de $g \oplus g$. Elle est également la connexion de Levi-Civita de $g \oplus (-g)$.

Fait 2.7. — *Soit* $f : U \to V$ *un difféomorphisme entre deux ouverts de* M*. Le graphe de* f*, Graphe* (f) *est une sous-variété géodésique de* $M \times M$ *si et seulement si* f *est une isométrie (de la connexion).*

Preuve. La preuve marche comme dans le cas euclidien. On utilise pour cela qu'une géodésique de $M \times M$ est caractérisée par le fait que ses projections sur M sont géodésiques, ainsi que le fait qu'une isométrie (de la connexion sur M) est caractérisée par le fait qu'elle envoie géodésique en géodésique.

$\diamondsuit$

Considérons le champ de plans géodésique tautologique τ^n sur $Gr^n(M \times M)$, où $n = \mathrm{dim}M$.

Les graphes des isométries de M, relevés dans $Gr^n(M \times M)$ donnent des feuilles de τ^n.

La réciproque de ce fait est vrai, c'est-à-dire que la projection dans $M \times M$ d'une feuille de τ^n est (localement) le graphe d'une isométrie, à condition de prendre une feuille de τ^n restreint à l'ouvert $Gr^{**}(M \times M)$ défini comme suit. Un plan $p \in Gr^{**}_{(x,y)}(M \times M) \iff p$ est le graphe d'un isomorphisme $A : T_xM \to T_yM$.

Remarquons qu'il y a un autre ouvert plus grand, $Gr^*(M \times M)$ défini par $p \in Gr^*_{(x,y)}(M \times M) \iff p$ est le graphe d'une application linéaire $A : T_xM \to T_yM$.

On obtient ainsi une identification entre l'ensemble des graphes d'isométries locales de M et l'ensemble des feuilles de τ^n dans $Gr^{**}(M \times M)$.

En particulier:

Fait 2.8. — *Considérons sur M la relation d'équivalence $\mathcal{R} \subset M \times M$ définie par $(x, y) \in \mathcal{R} \iff x$ et y ont la même orbite par le pseudo-groupe d'isométries locales.*

Alors, $\mathcal{R}$ est la projection de $\mathcal{D} \cap Gr^{**}(M \times M)$, où $\mathcal{D}$ est le domaine d'intégrabilité de τ^n.

2.2.1. Fibrés projectifs.— Les notions d'ensembles partiellement algébriques se généralisent à des fibrés de fibre type algébrique, avec des changements de trivialisation algébriques (le long des fibres). Ceci s'applique en particulier aux fibrés considérés ici, i.e. de fibre type grassmannienne.

Tout comme pour le flot géodésique d'une connexion (§1.4):

Fait 2.9. — *Les champs de plans géodésiques tautologiques τ^d sont partiellement algébriques.*

En fait, pour le problème du pseudo-groupe d'isométries qui nous intéresse, on peut se restreindre à $Gr^*(M \times M)$, qui est un fibré vectoriel (au dessus de $M \times M$) de fibre type $Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (la fibre au dessus de (x, y) est $Hom(T_xM, T_yM)$).

2.2.2. Première réduction du théorème de l'orbite dense-ouverte.— Ce qui précède réduit le théorème de l'orbite dense-ouverte au fait suivant:

Fait 2.10. — *Si la projection de $\mathcal{D} \cap Gr^{**}(M \times M)$ sur $M \times M$ est dense, alors elle contient un ouvert dense.*

Ce fait découlera du lemme de la projection dominante ainsi que du théorème suivant:

Théorème 2.11. — *[Algébricité partielle du domaine d'intégrabilité] Il existe un ouvert dense de $M \times M$ au dessus duquel $\mathcal{D}$ est partiellement algébrique.*

Le théorème découlera du théorème 2.13 ci-dessous.

Cette régularité de $\mathcal{D}$ n'est nullement évidente, à priori. La définition "naïve" ne permet même pas de voir que $\mathcal{D}$ est fermé au dessus d'un ouvert de $M \times M$.

2.2.3. Passage au domaine d'intégrabilité infinitésimale.— Pour montrer l'algébricité partielle de $\mathcal{D}$, on le remplace par un domaine plus grand $\mathcal{D}^\infty$, **domaine d'intégrabilité infinitésimale** défini par:

$\mathcal{D}^\infty = \{x$ tel que pour tous $V_1, \dots V_l$ champs de vecteurs tangents à τ, leur crochet itéré $[V_1, [V_2, [V_3.....]$ évalué en x appartient à $\tau(x)\}$

On peut également l'appeler domaine d'intégrabilité **formelle**.

Fait 2.12. — *$\mathcal{D}^\infty$ est partiellement algébrique.*

Preuve. Soit $X_1, \dots, X_d$ des champs partiellement algébriques linéairement indépendants engendrant τ^d au voisinage d'un point p.

Soit Y un champ obtenu comme crochet itéré à partir des X_i. Il est partiellement algébrique.

La condition $x \in \mathcal{D}^\infty$, équivaut au fait que $Y \wedge X_1 \dots \wedge X_d = 0$, pour tout tel champ Y. Dans une carte locale de M, on peut traduire ces équations par l'annulation de fonctions partiellement algébriques. ♢

2.2.4. Deuxième réduction du théorème de l'orbite dense-ouverte: égalité $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$?— Cette égalité signifierait que toute "feuille infinitésimale" (ou formelle) donne lieu à une vraie feuille. C'est un **problème d'intégrabilité** dont le cadre naturel est la théorie du contrôle. Il fera l'objet du § suivant dont la synthèse est le théorème 3.10. Ce théorème entraîne en particulier:

***Théorème 2.13* (Intégrabilité).** — *Au dessus d'un ouvert dense U de $M \times M$, on a: $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$.*

2.3. Autres structures géométriques. Connexions algébriquement enrichies.— Supposons que la connexion considérée dérive d'une métrique pseudo-riemannienne g sur M. Munissons $M \times M$ de la métrique $g \oplus (-g)$. Alors, le graphe d'un difféomorphisme local de M correspond à une isométrie de g, si et seulement si c'est une sous-variété **isotrope** (et en plus géodésique).

Ainsi, la relation d'équivalence $\mathcal{R}_g$, être congru par le pseudo-groupe des isométries locales de g, est la projection sur $M \times M$ de $\mathcal{D} \cap Gr^{**}(M \times M) \cap I$, où I désigne l'ensemble, évidemment partiellement algébrique, des n-plans isotropes de $Gr^n(M \times M)$.

Ainsi, d'après Théorème 2.11, sur un ouvert dense de $M \times M$, $\mathcal{R}_g$ est la projection d'un ensemble constructible. Le théorème de l'orbite dense-ouverte est donc valable dans ce cas.

Ceci se généralise au pseudo-groupe des transformations locales préservant une connexion ainsi qu'une **structure partiellement algébrique** annexe, par exemple, un tenseur (en particulier un champ de vecteurs), ou un champ de plans...

3. Théorie du contrôle

Ici, on introduit le cadre naturel dans lequel on peut étudier le problème d'intégrabilité $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$ posé au § précédent. Le présent § est rédigé de façon indépendante de son précédent.

3.1. Problème d'intégrabilité des champs de plans.— On se donne une variété N munie de P, un champ de plans lisse de dimension d. (Dans le § précédent $N = Gr^{**}(M \times M)$ et $P = \tau^n$).

On définit une **feuille** de P comme une sous-variété de **dimension** d partout tangente à P.

Du point de vue existence de feuilles, il y a deux cas extrêmes. Le cas dégénéré est celui où P est complètement intégrable, des feuilles existent partout. Le cas générique est celui où il n'y a pas du tout de feuille, P est "absolument non-intégrable"

Le théorème de Frobenius donne une caractérisation infinitésimale du cas complètement intégrable. Le théorème de Chow (voir par exemple [**1**]) donne une condition suffisante pour que le champ de plans soit absolument non-intégrable, et ce en vérifiant une condition d'accessibilité: deux points quelconques peuvent être joints par une courbe tangente au champ de plans. La condition de Chow est que les crochets des champs de vecteurs tangents au champ de plans, engendrent tout l'espace tangent.

Dans le cas général (i.e. entre Frobenius et Chow), on introduit deux types de domaines d'intégrabilités:

Definition 3.1. — *Le domaine d'intégrabilité $\mathcal{D}$ de P est l'ensemble des points par lesquels passe une feuille (plus précisément un germe de feuille).*

Le domaine d'intégrabilité infinitésimale (ou intégrabilité formelle, ou domaine d'involutivité) $\mathcal{D}^\infty$ est défini comme l'ensemble des points x tels que pour tous $V_1, \dots V_l$, champs de vecteurs tangents à P, leur crochet itéré $[V_1, [V_2, [V_3 .....]$ évalué en x, appartient à P.

Remarque 3.2. — On peut montrer que par un point $x \in \mathcal{D}^\infty$, passe une sous-variété infiniment tangente à P (de même dimension que P).

On a évidemment $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^\infty$. Les théorèmes de Frobenius et Chow établissent trivialement l'égalité $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$ dans deux cas extrêmes. On est amené à se demander si l'égalité ne soit pas vraie en toute généralité. Cette question est motivée par le constat que le long de $\mathcal{D}^\infty$, la condition d'involutivité de Frobenius est satisfaite. On est tenté d'appliquer Frobenius à $(\mathcal{D}^\infty, P)$. Mais là, on s'éloigne trop du cadre d'application du théorème de Frobenius: $\mathcal{D}^\infty$ n'est pas nécessairement une variété, on ne dispose pas encore d'un théorème de Frobenius fractal. Pire, même si $\mathcal{D}^\infty$ est une sous-variété, P ne lui sera pas nécessairement tangent!

Exemple 3.3. — Ici $N = \mathbb{R}^3$, et P est le champ d'hyperplans, noyau de la forme $\omega = dz - f(x)dy$. On a $d\omega = -f'(x)dx \wedge dy$.

La forme de contact standard correspond au cas $f(x) = x$.

Choisissons ici f plate en 0: $f(0) = f'(0) = ...0$, et $f(x) > 0$ si $x \neq 0$. Dans ce cas, $\mathcal{D}^\infty$ est le plan $\{x = 0\}$.

Mais il n' y a pas de feuille, P n'est pas tangent à $\{x = 0\}$. (En d'autres termes, P est un hyperplan de contact au sens topologique, mais ne l'est pas au sens différentiable).

Dans le cas analytique, $\mathcal{D}^\infty$ est un ensemble analytique, donc pratiquement une variété. Il est vrai que dans ce cas $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$ [**14**], donc, en particulier P est tangent à $\mathcal{D}^\infty$. Il n'est cependant pas clair comment montrer directement cette tangence (à moins qu'on utilise la remarque ci-dessus, qui n'est pas tout-à-fait évidente!). La preuve (de $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$) passe par la considération des distributions.

3.2. Langage des distributions.— On se donne un sous-anneau R de $C^\infty(N)$. Les cas intéressants ici sont ceux où $R = C^\infty(N)$, où R est l'anneau des fonctions partiellement algébriques, lorsque N est un fibré lisse vectoriel $N \to B$.

Definitions 3.4. — *Une distribution $\mathcal{G}$ sur N est un R-sous-module de $\chi(N)$, l'espace des champs de vecteurs sur N.*

Une distribution $\mathcal{G}$ admet une **évaluation**, *un "champ de plans discontinue" $x \to G(x) = \{X(x), X \in \mathcal{G}\}$.*

$\mathcal{G}$ est dite **régulière** *si son évaluation est un champ de plans continue, i.e. G a une dimension constante.*

Une **feuille** *de $\mathcal{G}$ est une sous-variété S telle que $\forall x \in S$, $T_xS = G(x)$ (c'est différent de $T_xS \subset G(x)$!).*

$\mathcal{G}$ est **intégrable** *si par* **tout point** *passe une feuille.*

$\mathcal{G}$ est **involutive** *si elle est une sous-algèbre pour le crochet de Lie sur $\chi(N)$.*

Par exemple, sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des champs de vecteurs de la forme $f\partial/\partial x + g\partial/\partial y$, avec f et g deux fonctions C^∞, s'annulant en $(0,0)$, est une distribution non-régulière, involutive et intégrable. Ses feuilles sont $\{(0,0)\}$ et $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Remarque 3.5. — Un avantage des distributions sur les champs de plans est qu'une distribution engendre une distribution involutive, alors que la distribution involutive engendrée par un champ de plans, ne correspond pas nécessairement à un champ de plans (i.e. elle n'est pas régulière). (Le terme distribution utilisé dans d'autres circonstances, par exemple dans le sens de fonction généralisée, présente un intérêt tautologique similaire).

Fait 3.6. — *Si la distribution involutive $\mathcal{G}$ engendrée par un champ de plans P est intégrable, alors, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$ (car $\mathcal{D}^\infty = \{x/G(x) = P(x)\}$, donc les feuilles de $\mathcal{G}$ passant par $\mathcal{D}^\infty$ sont des feuilles de P, et ainsi $\mathcal{D}^\infty \subset \mathcal{D}$).*

3.3. Un théorème d'intégrabilité.— Si une distribution est intégrable, alors la distribution involutive qu'elle engendre est également intégrable: les deux distributions ont dans ce cas les mêmes feuilles. Le problème d'intégrabilité pour les distributions est le suivant: dans quels cas une distribution involutive est-elle intégrable?

Pour donner une réponse (partielle) à cette question on précise qu'une distribution $\mathcal{G}$ est **localement finiment engendrée** (ou localement de type fini) si tout point admet un voisinage sur lequel $\mathcal{G}$ est finiment engendré en tant que R-module (R étant l'anneau des fonctions de base de la distribution).

Théorème 3.7. — *(R. Hermann* [**14**]*) Une distribution involutive localement de type fini, est intégrable.*

Exemple 3.8. — Une distribution analytique involutive est intégrable. Cela découle des propriétés noetheriennes dans ce cas.

3.3.1. Applications aux distributions partiellement algébriques.— Ici, on a un fibré vectoriel $\pi : N \to B$. Une distribution est partiellement algébrique si elle est constituée de champs de vecteurs partiellement algébriques.

Théorème 3.9. — *Soit $\pi : N \to B$ un fibré vectoriel, et $\mathcal{G}$ une distribution partiellement algébrique sur N. Alors, il existe un ouvert dense U de B tel que sur $\pi^{-1}(U)$, la distribution involutive engendrée par $\mathcal{G}$ est intégrable.*

Preuve. La distribution involutive engendrée par $\mathcal{G}$ est partiellement algébrique (car d'après Fait 1.8, le crochet de deux champs partiellement algébriques, est partiellement algébrique). Donc, par noetherienité locale, il existe U ouvert dense tel que sur $\pi^{-1}(U)$, cette distribution soit localement finiment engendrée. On applique alors le théorème 3.7.

$\diamondsuit$

On en déduit le résultat suivant (la dernière affirmation du théorème vient de la projection dominante).

Théorème 3.10. — *(Problème d'intégrabilité pour les champs de plans partiellement algébriques) Soit P un champ de plans partiellement algébrique sur un fibré $\pi : N \to B$. Alors, il existe un ouvert dense U de B tel que sur $\pi^{-1}(U)$, on a l'égalité: $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\infty$.*

De plus la projection de $\mathcal{D}$ sur U est fermée.

3.3.2. Preuve du théorème d'intégrabilité.—

Lemme 3.11. — *Une distribution $\mathcal{G}$ est intégrable, si et seulement si, pour tout $X \in \mathcal{G}$, le flot ϕ^t de X, préserve l'évaluation G.*

Preuve. La condition et évidemment nécessaire. Voyons pourquoi elle est suffisante. Supposons pour commencer qu'en un point x_0, dim $G(x_0) = 1$. Montrons que $\mathcal{G}$ admet une feuille passant par x_0. Soit $X \in \mathcal{G}$ un champ non-singulier en x_0, et ϕ^t son flot. La trajectoire de x_0 par ϕ^t est une feuille, car par hypothèse d'invariance de G par ϕ^t, la dimension de G le long de cette trajectoire est partout $= 1$. Donc, la trajectoire est une feuille, c'est-à-dire que son espace tangent coïncide avec G.

Le cas général se traite par récurrence sur dim $G(x_0)$. On choisit une hypersurface H transverse à $G(x_0)$. Par hypothèse de récurrence, le point x_0 admet une feuille F pour la restriction de $\mathcal{G}$ à H. L'hypothèse d'invariance assure comme dans le cas dim $G(x_0) = 1$, que le saturé de F par le flot ϕ^t d'un champ $X \in \mathcal{G}$ transverse à H, est une feuille de $\mathcal{G}$.

$\diamondsuit$

Fait 3.12. — *Une distribution involutive localement finiment engendrée vérifie la condition d'invariance du lemme ci-dessus.*

Preuve. Soit $X \in \mathcal{G}$ un champ non-singulier en un point x_0, et ϕ^t son flot. On peut localement redresser la situation de telle façon que X devient le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, muni des coordonnées $(t, t_2, \ldots, t_n)$. On suppose que x_0 correspond à $(0, \ldots, 0)$.

Comme $D\phi^t$ agit par transport parallèle, et $\mathcal{G}$ est involutive et de type fini, la preuve du fait s'achèvera en appliquant le lemme suivant. $\diamondsuit$

Lemme 3.13. — *Soient $V_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1 \ldots k$, des applications vectorielles C^∞, telles que les dérivées $\frac{\partial V}{\partial t}$ s'expriment* **continûment** *en fonction des V_i. Alors, le plan (vectoriel) engendré par les $V_i(t)$ est constant (ou de manière équivalente, le plan affine engendré par les $V_i(t)$ est parallèle le long de l'axe des t).*

Preuve. Soit $e_1, \ldots e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Écrivons $V_i = \Sigma_j c_{ij} e_j$, $C = (c_{ij})$ est une $k \times n$-matrice (dépendente de t).

Par hypothèse, il existe une $k \times k$-matrice continue $A = (a_{ij})$ telle que $\frac{\partial V_i}{\partial t} = \Sigma_j a_{ij} V_j$.

Il en résulte que $\frac{\partial C}{\partial t} = A.C$. Donc, $C(t) = R(t)C(0)$, où $R(t)$ est la résolvante de l'équation linéaire $y'(t) = A(t)y$ ($y \in \mathbb{R}^k$).

On en déduit en particulier que le rang de $\{V_1, \ldots, V_k\}$ est constant (car $R(t)$ est inversible). On peut donc se ramener au cas où ce rang vaut k, c'est-à-dire que $V_1, \ldots, V_k$ sont linéairement indépendants.

Considérons $V(t) = V_1(t) \wedge \ldots \wedge V_k(t)$. Ce vecteur ne s'annule jamais et vérifie une équation différentielle de la forme $V'(t) = \alpha(t)V(t)$ (obtenue à partir de l'équation sur les $V_i(t)$). Il en résulte que $e(t) = \frac{V(t)}{|V(t)|}$ vérifie $\frac{\partial e(t)}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que le plan engendré par les V_i est constant.

$\diamondsuit$

Références

[1] A. Bellaïche, J-J. Risler (Éditeurs) Sub-Riemannian geometry. Progress in Mathematics, 144. Birkhäuser Verlag, Basel (1996).

[2] Y. Benoist, Orbites des structures rigides (d'après M. Gromov). Integrable systems and foliations/Feuilletages et systèmes intégrables (Montpellier, 1995), 1–17, Progr. Math., 145, Birkhäuser Boston.

[3] Y. Benoist, F. Labourie, Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables. Invent. Math. 111 (1993), no. 2, 285–308.

[4] E. Bierstone; P. Milman, Semianalytic and subanalytic sets. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 67 , (1988), 5–42.

[5] R. Benedetti; J-J. Risler, Real algebraic and semi-algebraic sets. Actualités Mathématiques. Hermann, Paris (1990).

[6] Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie, Flots d'Anosov à distributions stable et instable différentiables. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 1, 33–74.

[7] G. D'Ambra, Isometry groups of Lorentz manifolds, Invent. Math. **92** (1988) 555-565.

[8] G. D'Ambra, M. Gromov, Lectures on transformation groups: geometry and dynamics. Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990), 19–111, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

[9] S. Dumitrescu, Structures géométriques holomorphes, Thèse de Doctorat, ENS-Lyon, 1999.

[10] R. Feres, Rigid geometric structures and actions of semisimple Lie groups, Ces actes.

[11] P. Foulon, F. Labourie, Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques. (French) [On asymptotically harmonic compact manifolds] Invent. Math. 109 (1992), no. 1, 97–111.

[12] Ivanov G. Ganchev, ; S. Ivanov, The totally geodesic plane axiom on a differentiable manifold with a linear connection. C. R. Acad. Bulgare Sci. 40 (1987), no. 1, 33–35.

[13] M. Gromov, Rigid transformation groups, "Géometrie différentielle", D. Bernard et Choquet-Bruhat. Ed. Travaux en cours **33**. Paris. Hermann (1988).

[14] R. Hermann, On the accessibility problem in control theory. Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, 325–332 (1963) Academic Press, New York.

[15] M. Kanai, Geodesic flows of negatively curved manifolds with smooth stable and unstable foliations. Erg. Th. Dyn. Sys. 8 (1988) 215–239.

[16] S. Lang, Algebra. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass. (1984).

[17] S. Łojasiewicz, Sur l'adhérence d'un ensemble partiellement semi-algébrique. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 68 , (1988), 205–210 (1989).

[18] H. Whitney, Elementary structure of real algebraic varieties. Ann. of Math. (2) 66 (1957) 545–556.

[19] A. Zeghib, On Gromov's theory of rigid transformation groups: A dual approach, Erg. Th. Dyn. Sys., à paraître.

[20] R. Zimmer, Automorphism groups and fundamental groups of geometric manifolds. Differential geometry: Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990), 693–710, Proc. Sympos. Pure Math., 54, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, FRANCE
Zeghib@umpa.ens-lyon.fr
http://umpa.ens-lyon.fr/~zeghib/

Mars 2000

ABDELGHANI ZEGHIB