

# Sur les feuilletages géodésiques continus de variétés hyperboliques.

Zeghib, A.

pp. 193 - 206



---

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes.

Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

### Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

## Sur les feuilletages géodésiques continus des variétés hyperboliques

A. Zeghib

C.N.R.S.: U.M.R. 128, Ecole normale supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie,  
F-69364 Lyon Cedex 07, France

Oblatum II-1993

**Summary.** We prove that a compact hyperbolic 3-manifold does not possess a  $C^0$  foliation, with geodesic leaves.

**Resumé.** On démontre qu'une 3-variété hyperbolique compacte n'admet pas de feuilletage  $C^0$ , dont les feuilles sont géodésiques.

### 1 Introduction

Dans ce travail on montre que les 3-variétés hyperboliques fermées n'admettent pas de feuilletage géodésique continu. Mais, discutons d'abord un «exemple» potentiel d'un tel feuilletage (qui n'en sera pas un d'après notre résultat). Je le dois à J.P. Otal.

Soit  $M^3$  une variété fermée de dimension 3 fibrant sur le cercle. Supposons que la monodromie de cette fibration est un difféomorphisme pseudo-Anosov  $\sigma$  sur une surface  $S$  de genre supérieur ou égal à 2.

1.1. *Le flot suspension.* Le fait suivant est tout à fait général:

**Affirmation.** Soit  $\sigma: S \rightarrow S$  un difféomorphisme d'une variété  $S$ , et  $\psi$  le flot suspension de  $\sigma$ . Alors il existe une métrique rendant les orbites de  $\psi$  géodésiques. De plus les orbites du relevé dans le revêtement cyclique associé sont minimisantes (pour la métrique relevée).

*Preuve.* Le flot  $\psi$  est défini sur la variété  $M = S \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\sigma x, 1)$ , fibrant sur  $S^1$ . Il suffit de prendre n'importe quelle métrique rendant le champ tangent au flot de longueur égale à 1, et orthogonal aux fibres. En effet une telle métrique se relève dans le revêtement cyclique  $S \times \mathbb{R}$  en une métrique de la forme  $g_{(x, t)} = h_{(x, t)} + dt^2$ , où  $h_{(x, t)}$  est une certaine métrique sur  $T_x S$ . (La métrique  $g$  est de plus invariante par  $(x, t) \rightarrow (\sigma x, t + 1)$ .) Le champ de vecteurs tangent au relèvement de  $\psi$  est simplement  $\partial/\partial t$ . Pour une telle métrique il est clair que la longueur d'un chemin joignant deux points  $(x, t_1)$  et  $(y, t_2)$  est  $\geq |t_1 - t_2|$ . Les orbites de  $\partial/\partial t$  sont donc bien minimisantes.  $\square$

1.2. *Métrie hyperbolique sur  $M$ .* Un grand théorème de Thurston [Sul] affirme que notre variété (fibrant sur  $S^1$  avec une monodromie de type pseudo-Anosov) admet une structure hyperbolique, c'est à dire une métrique riemannienne à courbure constante  $-1$ . Notons  $g_0$  une telle métrique (qui est par ailleurs unique par rigidité de Mostow) et  $g_1$  une métrique vérifiant l'affirmation précédente.

1.3. **Affirmation.** *Il existe  $f: M \rightarrow M$ , une application continue homotope à l'identité telle que l'image par  $f$  de toute orbite de  $\psi$  soit une géodésique hyperbolique (i.e. géodésique au sens de  $g_0$ ).*

*Preuve.* Dans  $\tilde{M} = \mathbb{H}^3$ , les métriques  $\tilde{g}_0$  et  $\tilde{g}_1$  sont équivalentes car  $M$  est compact. En particulier, après normalisation, les distances respectives qu'elles déterminent vérifient une inégalité:  $d_0 \leq d_1 \leq k d_0$ . On en déduit que toute orbite  $l$  de  $\psi$  est  $k$ -quasi géodésique au sens de la métrique hyperbolique (i.e.  $d_i \leq k d_0$  où  $d_i$  est la distance intrinsèque sur  $l$ ). Il en résulte qu'il existe une unique géodésique hyperbolique  $l'$  à distance  $\leq k'$  ( $=k'(k)$ ) de  $l$ . Considérons l'application  $\tilde{f}: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  dont la restriction à toute orbite  $l$  est la projection orthogonale sur la géodésique associée  $l'$ . Elle est équivariante par  $\pi_1(M)$  et répond bien à la question [Gro2, Thu].

1.4. *Question.*  $f$  est-elle injective de telle façon que  $M$  supporte un flot continu à orbites géodésiques?

Avant de répondre à cette question, remarquons que la bonne question se pose plutôt pour une variante de  $f$  pour laquelle  $\tilde{f}$  soit injective le long des orbites. On montre en effet grâce à l'astuce de [Ghy1] ou [Gro1] qu'on peut «régulariser» (de façon canonique) la projection orthogonale de toute orbite  $l$  sur la géodésique associée  $l'$  pour obtenir une application injective le long des orbites.

1.5. *Variété topologique invariante par le flot géodésique de  $M$ .* Supposons  $f$  comme ci-dessus. Considérons l'application  $h: M \rightarrow T^1 M$  (=le fibré unitaire tangent à  $M$ ) définie par:

$$h(x) = \{\text{le vecteur unitaire tangent en } f(x) \text{ à l'image par } f \text{ de la } \psi\text{-orbite de } x\}.$$

**Proposition.**  *$h$  est injective. Il s'ensuit que  $h(M)$  est une variété topologique de  $T^1 M$ , invariante par le flot géodésique sur  $T^1 M$ , et homéomorphe à  $M$ . (La projection de  $h(M)$  sur  $M$  est surjective car son image coïncide avec  $f(M)$  qui est égale à  $M$  puisque  $f$  est homotope à l'identité.)*

La preuve sera donnée au §5. Remarquons qu'il existe une autre classe d'exemples de variétés topologiques invariantes par le flot géodésique qui s'obtient de la façon suivante. Soit  $\Gamma \subset \pi_1(M)$ , un sous-groupe quasi-fuchsien i.e. son ensemble limite  $L_\Gamma$  (dans  $S^2$ ) est un cercle topologique, et le quotient  $H(\Gamma)/\Gamma$  est compact, où  $H(\Gamma)$  est l'enveloppe convexe de  $L_\Gamma$  [Thu]. Notons  $[L_\Gamma] \subset T^1 \mathbb{H}^3$  l'ensemble des vecteurs déterminant des géodésiques à extrémités (les deux) dans  $L_\Gamma$ . C'est une sous-variété topologique de dimension 3 homéomorphe au fibré tangent de  $\mathbb{H}^2$ . Le quotient  $[L_\Gamma]/\Gamma$  est l'ensemble non-errant du flot géodésique de la variété hyperbolique (non-compacte)  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ . La projection de  $[L_\Gamma]$  dans  $T^1 M$  est une sous-variété topologique (immergée) invariante par le flot géodésique, homéomorphe à un quotient fini de  $[L_\Gamma]/\Gamma$ .

## 2 Flots à orbites géodésiques

La réponse à la question précédente est: non,  $f$  ne peut jamais être injective. Plus généralement on a:

**Théorème A.** *Une variété hyperbolique fermée de dimension 3, n'admet pas de feuilletage de dimension 1, de classe  $C^0$  et à orbites géodésiques.*

*Historique.* Une variété hyperbolique fermée de dimension 3 n'admet pas non plus de feuilletage  $C^0$  de dimension 2, c'est-à-dire de codimension 1. C'est un fait assez facile à établir. En fait, on sait d'après [Ghy2] qu'il n'y a même pas de feuilletage  $C^2$ , géodésique (i.e. qui soit géodésique pour une certaine métrique) de codimension 1, sur une variété compacte admettant une métrique de courbure négative. D'autre part, la solution par M. Ratner de la conjecture de Raghunathan entraîne que les variétés hyperboliques compactes n'admettent pas de feuilletages géodésiques continus de dimension  $\geq 2$  [Ghy3]. Les questions autour de la conjecture de Raghunathan, i.e. les flots unipotents, sont cependant «étrangères» à la dimension 1, où il s'agit de flots hyperboliques.

*Preuve.* La preuve se fait par l'absurde en 3 étapes:

- (i) La structure «pseudo-Anosov» d'un tel feuilletage.
- (ii) La régularité du feuilletage. On montre qu'il est (quelque part) localement Lipschitz (§3).
- (iii) La preuve pourrait être achevée en appliquant un résultat de [Zeg] affirmant que les feuilletages géodésiques (locaux) localement Lipschitz n'existent pas sur une variété hyperbolique (en toute dimension). Ici (§4) on donnera une preuve simplifiée adaptée à notre situation.

*Remarque.* Quant à la question « $f$  est-elle injective», l'étape  $i$  est déjà gagnée. En effet dans ce cas, le feuilletage obtenu aura la même structure que celui déterminé par le flot suspension  $\psi$ .

**2.2. Structure de produit local.** Supposons donc qu'il existe un tel feuilletage sur une 3-variété hyperbolique  $M$ . Quitte à passer à un revêtement double on peut supposer que notre feuilletage est défini par un champ unitaire  $X$ , engendrant un groupe à un paramètre d'homéomorphismes  $\phi^t$ .

L'image  $X(M)$  de la section  $X: M \rightarrow T^1 M$  est invariante par le flot géodésique sur  $T^1 M$ , par définition du fait que  $X$  soit à orbites géodésiques. L'application  $X$  réalise donc un isomorphisme entre  $(M, \phi)$  et un sous-ensemble invariant du flot géodésique. On en déduit que  $(M, \phi)$  est expansif car c'est le cas du flot géodésique (parce qu'il est d'Anosov). Rappelons que cette propriété signifie qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que, la fonction distance entre deux orbites distinctes, arbitrairement paramétrisées, est quelque part  $> \varepsilon$ . Or les flots expansifs sur les variétés topologiques de dimension 3 sont «pseudo-Anosov» [Pat]. Ceci est une généralisation du résultat de [Lew] et Hiraide [Hir] sur les homéomorphismes expansifs en dimension 2. Ce dernier résultat dit simplement que ces homéomorphismes sont conjugués à des difféomorphismes pseudo-Anosov de surfaces (au sens classique).

Un flot pseudo-Anosov sur une variété topologique de dimension 3 est, en dehors d'un nombre fini d'orbites périodiques, comme un flot d'Anosov au sens qu'il admet des feuilletages stable et instable supplémentaires. De plus ces feuilletages se prolongent en feuilletages singuliers sur toute la variété. Les modè-

les de singularité sont (transversalement) les mêmes que ceux des feuilletages associés aux difféomorphismes pseudo-Anosov sur les surfaces.

Ici, on ne retiendra de tout cela que le simple fait suivant: «quelque part (i.e. au voisinage d'un certain point), il existe une structure de produit local». En fait ceci peut être extrait par exemple d'une simple lecture des premières pages de [Lew].

Pour expliciter cette propriété, notons comme d'habitude  $W^{ss}(x)$ ,  $W^{su}(x)$ ,  $W^s(x)$ ,  $W^u(x)$ , les variétés respectivement, stable forte, instable forte, stable (faible) et instable (faible). Par exemple  $W^{ss}(x)$  se définit par:

$$W^{ss}(x) = \{y \in M/d(\phi^t x, \phi^t y) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty\} \quad \text{et} \quad W^s(x) = \cup \{W^{ss}(\phi^t x)/t \in \mathbb{R}\}.$$

Choisissons un point  $x_0$  non-singulier (i.e. qui ne fait pas partie des orbites périodiques en dehors desquelles le flot ressemble à un flot d'Anosov). Il admet un voisinage  $U$  où le couple de feuilletages  $(W^s, W^{su})$  est un produit. En d'autres termes si  $W_{10_c}^s(x)$  et  $W_{10_c}^{su}(x)$  sont les composantes connexes de  $x$  dans les traces respectives de  $W^s(x)$  et  $W^{su}(x)$  sur  $U$ , alors l'application:

$$\begin{aligned} W_{10_c}^{su}(x_0) \times W_{10_c}^s(x_0) &\rightarrow U \\ (x, y) &\rightarrow [x, y] = W_{10_c}^s(x) \cap W_{10_c}^{su}(y), \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Considérons la projection:  $p_{+\infty}: U \rightarrow U/W_{10_c}^s$ , sur l'espace des feuilles de  $W_{10_c}^s$ .

La propriété de structure de produit local entraîne que pour tout  $x \in \tilde{U}$ , la restriction de  $p_{+\infty}$  à  $W_{10_c}^{su}(x)$  est un homéomorphisme (bijectif). En particulier  $p_{+\infty}(U)$  est un arc (de dimension 1).

**2.3. Le flot relevé dans  $\mathbb{H}^3$ .** Raisonnons dans le modèle de Klein où l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  est identifié à la boule unité ouverte  $B^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , et les géodésiques sont les segments de droites (au sens euclidien) de cette boule.

Les orbites du relevé de notre flot sont donc des segments de droites orientés  $]a, b[$  où  $a$  et  $b$  appartiennent à la sphère  $S^2 = \partial B^3$ . Deux orbites  $]a, b[$  et  $]a', b'[$  sont dans une même feuille de  $\tilde{W}^s$  si et seulement si  $b = b'$ . Cela entraîne que l'application  $p_{+\infty}: \mathbb{H}^3 \rightarrow S^2$ ;  $p_{+\infty}(x) = \{\text{la seconde extrémité de l'orbite de } x\}$ , est un plongement de l'espace quotient  $\mathbb{H}^3/\tilde{W}^s$  dans  $S^2$ .

Plaçons nous dans un ouvert  $U$  muni d'une structure de produit local comme ci-dessus et notons  $\tilde{V}'$  son saturé.

D'après ce qui précède  $p_{+\infty}(\tilde{V}')$  est un arc  $c_1$  de  $S^2$ .

On peut aussi considérer l'application  $p_{-\infty}$ , définie de façon analogue. On obtiendra donc un arc  $c_2 = p_{-\infty}(\tilde{V}')$ .

**2.4. Résumé.** Dans un ouvert saturé  $\tilde{V}'$  dans  $\mathbb{H}^3$ , les orbites du flot sont exactement (tous) les segments  $]x, y[$  avec  $x \in c_1$  et  $y \in c_2$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux arcs (non réduits à des points) de  $S^2$ .

### 3 Régularité

Ce paragraphe est consacré à la preuve du fait suivant, dont les conditions sont issues de la situation précédente:

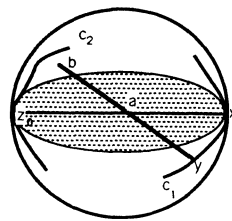


Fig. 1

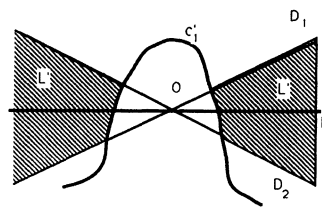


Fig. 2

**3.1. Proposition.** Soit  $c_1$  et  $c_2$  deux courbes (non-réduites à des points) de  $S^2$  vérifiant: pour tous  $x, x'$  éléments de  $c_1$  et  $y, y'$  éléments de  $c_2$ , si  $(x, y) \neq (x', y')$ , alors  $]x, y[ \cap ]x', y'[$  est vide. Alors les courbes  $c_1$  et  $c_2$  sont localement bi-Lipschitz.

**3.2. Corollaire.** Il existe un ouvert invariant  $V$  dans  $M$  où le flot  $\phi^t$  est localement Lipschitz et où les feuilles stables et instables fortes sont des courbes localement Lipschitz.

*Preuve.* Il suffit de prendre la projection  $V$  de l'ouvert  $\tilde{V}'$  ci-dessus (2.3). Le fait que le feuilletage soit localement Lipschitz dans  $V$  est clair. Quant aux feuilles stables et instables fortes, elles s'identifient canoniquement à  $c_2$  et  $c_1$  respectivement. En effet d'après 2.1, la restriction de la projection  $p_{-\infty}$  identifie la variété stable locale de tout point  $x \in \tilde{V}'$ , à  $c_2$ . Mais cette restriction est aussi la restriction de la projection à l'infini de l'horosphère  $\mathcal{H}_x$  déterminée par le vecteur  $\tilde{X}(x)$ , où  $\tilde{X}$  est le relevé dans  $\mathbb{H}^3$  de notre champ vectoriel  $X$ . Cette dernière projection est  $C^1$  (et même analytique). Les variétés stables fortes sont donc bien localement Lipschitz. Le même raisonnement s'applique aux variétés instables fortes.  $\square$

*Preuve de la proposition.* On peut supposer que les deux courbes sont disjointes (sinon on passera à des sous-courbes disjointes).

Soit  $x, y$  deux points distincts de  $c_1$  et  $z_0$  un point  $c_2$ . Soit  $a$  un point du segment  $]z_0, x[$ . La droite déterminée par le segment  $]a, y[$  coupe la sphère  $S^2$  en un deuxième point (autre que  $y$ ) qu'on note  $b$  (Fig. 1).

**3.3. Zone interdite.** L'observation suivante est fondamentale pour notre preuve: le point  $b$  n'appartient pas à  $c_2$ . En effet sinon l'intersection des segments  $]z_0, x[$  et  $]b, y[$  contient  $a$  et ne sera donc pas vide contrairement aux hypothèses de la proposition.

Essayons maintenant de trouver le lieu  $L = L_{z_0}$  des points  $b$  lorsque  $a$  parcourt  $]z_0, x[$ , et  $x$  et  $y$  parcourent la courbe  $c_1$ . Ce lieu sera donc une zone interdite à  $c_2$ .

D'abord pour  $x$  et  $y$  fixes et  $a$  se déplaçant sur  $]z_0, x[$ , le point  $b$  parcourt un arc du cercle  $C(z_0, x, y)$  déterminé par les trois points  $z_0, x$  et  $y$ . Il s'agit de l'arc d'extrémités  $z_0$  et  $x$  et ne contenant pas  $y$ .

En changeant le rôle de  $x$  et  $y$ , on obtient au total l'arc  $A(x, z_0, y)$  qui est l'arc de cercle d'extrémités  $x$  et  $y$  et contenant  $z_0$ .

Ainsi  $L$  est la réunion de tous les arcs  $A(x, z_0, y)$  lorsque  $(x, y)$  parcourt l'ensemble des couples de points distincts de  $c_1$ .

Pour avoir une image plus claire de  $L$ , faisons une projection stéréographique de pôle  $z_0$ ;  $S^2 - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Notons  $c'_1$  et  $c'_2$  les images de nos courbes. Pour  $x', y'$  appartenant à  $\mathbb{R}^2$ , notons  $D(x', y')$  la droite qui les contient (i.e. le cercle  $C(x', \infty, y')$ ). A l'aide de ces notations on voit facilement que l'image  $L$  de la zone  $L$  est la réunion de toutes les différences  $D(x', y') - [x', y']$ , pour tous les couples  $(x', y')$  de points distincts de  $c'_1$ .

3.4. *Cônes*. Profitons de l'image précédente pour remarquer le fait suivant :

**Affirmation.** *Supposons que  $c'_1$  ne soit pas contenue dans une droite (i.e. la courbe  $c_1$  n'est pas incluse dans un cercle contenant  $z_0$ ). Alors il existe un point  $O$ , une droite  $D_0$  passant par  $O$  et un nombre  $\varepsilon$  tels que toute droite  $D$  passant par  $O$  et faisant un angle  $\leq \varepsilon$  avec  $D_0$ , coupe  $c'_1$  en au moins deux points (distincts).*

*Preuve.* Soit  $D_1$  une droite coupant  $c'_1$  en deux points distincts de telle façon que  $c'_1$  ne soit pas entièrement contenue dans un demi-espace déterminé par  $D_1$ . Evidemment une telle droite existe exactement quand  $c'_1$  n'est pas contenue dans une droite. On prendra pour  $O$  n'importe quel point à l'intérieur du segment déterminé par les deux points d'intersection. Toute droite  $D_2$  passant par  $O$  et assez proche de  $D_1$  est telle que: soit  $D_2$ , soit sa symétrique par rapport à  $D_1$  coupe  $c'_1$  en deux points distincts (proches des points d'intersection avec  $D_1$ ). Supposons par exemple que c'est  $D_1$  qui coupe. Alors toutes les droites entre  $D_1$  et  $D_2$  coupent de la même façon. On prendra  $D_0$  la bissectrice du secteur déterminé par  $D_1$  et  $D_2$  et  $\varepsilon$  la moitié de l'angle de ce secteur.  $\square$

3.4.1. *Remarque.* Remarquons que si  $c'_1$  est contenue dans une droite, c'est-à-dire si  $z_0$  appartient à un cercle contenant la courbe  $c_1$ , alors cela ne se répétera pour aucun autre point  $z$  de  $c_2$ . En effet sinon, les points  $z$  et  $z_0$  seront dans le cercle contenant  $c_1$ . On trouvera donc des points  $x$  et  $y$  de  $c_1$  tels que les segments  $]z, x[$  et  $]z_0, y[$  soient d'intersection non-vides. Ainsi on va continuer notre preuve avec l'hypothèse de l'affirmation. Ceci nous permettra de conclure à la fin que  $c_2$  est bi-Lipschitz au voisinage des points remplissant cette hypothèse. On pourrait montrer à partir de là que  $c_2$  est également Lipschitz au voisinage de l'unique éventuel point ne vérifiant pas l'hypothèse. On ne donnera pas ici les détails de ce fait pour la simple raison que pour la suite de la preuve de notre théorème, on peut simplement ignorer ce point.

3.4.2. **Corollaire.** *Il existe un compact  $K$  tel que les droites précédentes ne coupent pas  $c'_2 - K$ . En d'autres termes  $c'_2 - K$  est inclus dans la réunion des droites passant par  $O$  et faisant un angle  $\leq \pi - \varepsilon$  avec la droite  $D'_0$  orthogonale à  $D_0$ .*

*Preuve.* Toute droite  $D$  comme dans l'affirmation coupe  $c'_1$  en deux points  $x'$  et  $y'$ . D'après 3.3,  $D - ]x', y'[$  est dans l'image de la zone interdite et n'intersecte donc pas  $c'_2$ . On prendra pour  $K$  la fermeture de la réunion de tous ces segments (c'est bien un compact car  $c'_1$  est bornée puisqu'elle ne contient pas le point à l'infini qui appartient à  $c'_2$ ).  $\square$

3.5. *Cônes dans  $S^2$* . Revenons à la sphère  $S^2$  et précisons la notion suivante. Deux cercles dans  $S^2$ , s'intersectant en deux points distincts, la découpent en 4 régions fermées.

**Définition.** Un cône (symétrique) de  $S^2$  est la donnée d'un point dit *sommet du cône* et la réunion de deux régions opposées délimitées par deux cercles passant par le sommet. L'angle de ces deux cercles est appelé *angle du cône*.

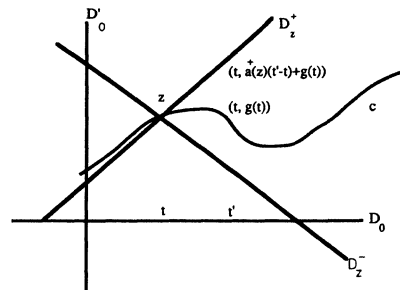


Fig. 3

Les deux régions restantes déterminent un autre cône qu'on appellera *cône supplémentaire*.

Le corollaire précédent s'interprète maintenant de la façon suivante: la zone interdite  $L=L_{z_0}$  contient  $\mathcal{C}' - K'$  où  $K'$  est un compact ne contenant pas  $z_0$  et  $\mathcal{C}'$  est un cône de sommet  $z_0$  et d'angle  $\geq \varepsilon$ . Pour le voir il suffit d'appliquer la réciproque de la projection stéréographique qui est, rappelons le, conforme.

Il en découle qu'il existe un voisinage  $U$  de  $z_0$  tel que:  $c_2 \cap U \subset \mathcal{C}$ , où  $\mathcal{C}$  est le cône supplémentaire de  $\mathcal{C}'$ . Plus généralement:

**Affirmation.** *Il existe un voisinage  $U$  de  $z_0$  tel que pour tout point  $z \in c_2 \cap U$ , on a:  $c_2 \cap U \subset \mathcal{C}_z$ , où  $\mathcal{C}_z$  est un cône de sommet  $z$  et d'angle  $\leq \pi - \varepsilon$ . De plus ce cône dépend continûment de  $z$  (au sens que c'est le cas des deux cercles qui déterminent ce cône).*

*Preuve.* Le raisonnement précédent s'applique à tout point  $z$  de  $c_2$  et fournira donc un cône de sommet  $z$  contenant localement  $c_2$ . Il s'agit de voir qu'on peut choisir continûment ce cône. Considérons le cône précédent  $\mathcal{C}'$ . Comme il est inclus dans la zone interdite  $L_{z_0}$ , il est réunion de cercles  $C(x, z_0, y)$  où  $(x, y)$  parcourt un sous-ensemble  $E$  de couples de points distincts de  $c_2$ . On définit alors  $\mathcal{C}'_z$  comme la réunion des cercles  $C(x, z, y)$  quand  $(x, y)$  appartient au même sous-ensemble  $E$ . C'est bien un cône de sommet  $z$ , inclus dans la zone interdite  $L_z$ . On prendra comme  $\mathcal{C}_z$  le supplémentaire de ce cône  $\mathcal{C}'_z$ . Quitte à changer  $\varepsilon$  par  $\varepsilon/2$ , ce cône vérifie bien les conditions de l'affirmation.  $\square$

La preuve de la proposition sera achevée à l'aide du lemme suivant qui reprend exactement les conditions de l'affirmation précédente:

**3.6. Lemme.** *Une courbe dans  $S^2$  dirigée par un cône continu et d'angle strictement plus petit que  $\pi$  est localement bi-Lipschitz. Plus précisément soit  $c$  une courbe et pour tout  $z \in c$ ,  $\mathcal{C}_z$  un cône de sommet  $z$ , contenant  $c$ . Supposons ce cône dépendant continûment de  $z$  et d'angle  $\leq \pi - \varepsilon$  pour un certain  $\varepsilon > 0$ . Alors  $c$  est localement bi-Lipschitz.*

*Preuve* (Fig. 3). Il est facile de se convaincre qu'il suffit de démontrer la version «linéaire» dans  $\mathbb{R}^2$ . Cela veut dire que  $\mathcal{C}_z$  est comme dans 3.3, un cône affine au sens qu'il existe une droite  $D_z$  passant par  $z$ , tel que  $\mathcal{C}_z$  soit la réunion des droites passant par  $z$  et faisant un angle  $\leq (\pi - \varepsilon)/2$  avec  $D_z$ . Le bord de  $\mathcal{C}_z$  est formé de deux droites  $D_z^+$  et  $D_z^-$ .



Soit  $D'_0$  la droite orthogonale à  $D_0 = D_{z_0}$ . Soit  $p$  la projection sur  $D_0$  parallèlement à  $D'_0$ . La restriction de  $p$  à un voisinage de  $z_0$  (dans la courbe  $c$ ) est injective. En effet l'égalité  $p(z) = p(z')$  signifie que  $z$  et  $z'$  sont sur une même droite parallèle à  $D'_0$ . Mais la droite passant par un point  $z$  proche de  $z_0$  et parallèle à  $D'_0$ , n'est pas contenue dans  $\mathcal{C}_z$  (par continuité de  $\mathcal{C}_z$ ). On a donc une contradiction avec le fait que  $c \subset \mathcal{C}_z$  à moins que  $z = z'$ .

Ainsi,  $p$  étant injective, on peut voir  $c$  (au voisinage de  $z_0$ ) comme un graphe:  $t \rightarrow (t, g(t))$ , au dessus des axes  $D_0$  et  $D'_0$  (orientées de telle façon que  $D_0^+$  soit au dessus de  $D_0^-$ ). Pour  $z$  proche de  $z_0$ , les droites  $D_z^+$  et  $D_z^-$  ont des pentes finis et continus  $a^+(z)$  et  $a^-(z)$ .

Soit  $b^+$  la plus grande des bornes supérieures des valeurs absolues de  $a^+$  et  $a^-$  dans un voisinage de  $z_0$ . Pour  $t' \geq t$ , le graphe de  $g$  est en dessous de la (demi-) droite  $D_z^+$ , avec  $z = (t, g(t))$ . En particulier le point  $(t', g(t'))$  est en dessous du point  $(t', a^+(z)(t' - t) + g(t))$  qui appartient à la droite  $D_z^+$ . On en déduit que  $g(t') - g(t) \leq a^+(z)(t' - t) \leq b^+(t' - t)$ . On raisonne de la même façon avec le droite  $D_z^-$  pour obtenir l'inégalité:  $g(t') - g(t) \geq -a^+(z)(t' - t) \geq -b^+(t' - t)$ . Ceci veut dire que:  $|g(t') - g(t)| \leq b^+ |t' - t|$ , c'est-à-dire que  $g$  est  $b^+$ -Lipschitz. Le même raisonnement nous donne:  $|g(t') - g(t)| \geq b^- |t' - t|$  où  $b^-$  est la plus petite des bornes inférieures de  $a^+$  et  $a^-$  en valeur absolue. Donc  $g$  est bi-Lipschitz au voisinage de  $z_0$ . La preuve du lemme est ainsi achevée.  $\square$

#### 4 Feuilletages géodésiques Lipschitz

La preuve du théorème A sera achevée à l'aide du résultat suivant de [Zeg] dont on donne dans ce qui suit une preuve simplifiée adaptée à notre situation:

**Théorème B.** *Une variété hyperbolique compacte n'admet pas de feuilletage géodésique local et localement Lipschitz.*

Par définition un feuilletage géodésique local d'une variété riemannienne compacte est un feuilletage d'un ouvert  $V$  de cette variété, à feuilles géodésiques et complètes. C'est donc exactement ce qu'on a rencontré en 3.2. Le théorème B permet donc bien d'achever la preuve du théorème A. Le présent paragraphe est consacré à la démonstration du théorème B dans les conditions du corollaire 3.2 (i.e. le feuilletage local est restriction d'un feuilletage global, à un ouvert muni d'une structure de produit local).

*Remarque.* La démonstration du théorème B en dimension 3 pour les feuilletages locaux en général, demande une application de la théorie de rectifiabilité de [Fed]. L'idée est absolument la même. On utilise le lemme 1, qu'on démontrera ici en toute généralité. On définit par la suite les «variétés» stables et instables fortes comme niveaux d'une application Lipschitz. Elles seront donc «dénombrablement- $\mathcal{H}^1$ -rectifiable», où  $\mathcal{H}^1$  est la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle. Sans rentrer dans les détails de cette propriété, disons simplement qu'elle permet de définir une «densité 1-dimensionnelle» qui se manipule pratiquement comme dans notre cas ici.

**4.1.1. Notations.** Continuons à noter simplement  $X$  et  $\phi'$  les restrictions à l'ouvert  $V$  (3.2) de notre champ de vecteurs et son flot (2.1). Notons  $\tilde{X}$  et  $\tilde{\phi}^t$  les

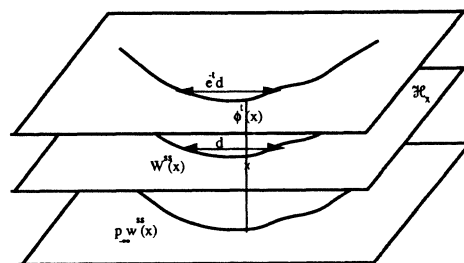


Fig. 4

relèvements dans  $\tilde{V}$ , l'image réciproque de  $V$  dans  $\mathbb{H}^3$  ( $\tilde{V}$  est simplement le saturé par le groupe fondamental  $\pi_1(M)$  de l'ouvert  $\tilde{V}'$  de 2.3, ayant une structure de produit).

Pour  $x \in \tilde{V}$ , notons  $\mathcal{H}_x$  l'horosphère déterminée par le vecteur  $\tilde{X}(x)$ . Pour  $r$  réel notons  $B(x, r)$  la boule de  $\mathcal{H}_x$  (munie de la métrique riemannienne induite) de centre  $x$  et rayon  $r$ .

Notre flot n'étant défini que sur l'ouvert  $\tilde{V}$ , on aura besoin de définir:  $\varepsilon_x = \sup \{ \varepsilon \text{ tel que: } \text{Fermeture}(B(x, \varepsilon) \cap W^{ss}(x)) \subset \tilde{V} \}$ .

4.1.2. *Densité.* Notons  $\mathcal{H}^1$  la mesure de Hausdorff de dimension 1 sur  $\mathbb{H}^3$ . La restriction de  $\mathcal{H}^1$  sur les variétés stables fortes, qui sont des courbes localement Lipschitz et par suite localement rectifiables, n'est rien d'autre que la mesure de longueur le long de ces courbes. Définissons la fonction  $\varepsilon$ -densité (éventuellement infinie) par:

$$\Theta_\varepsilon(x) = \mathcal{H}^1(W^{ss}(x) \cap B(x, \varepsilon)) / 2\varepsilon.$$

Par définition de  $\varepsilon_x$ ,  $\Theta_\varepsilon(x)$  est finie pour  $\varepsilon < \varepsilon_x$ .

Le principe du jeu ici est que  $\varepsilon$  ne sera pas infiniment petit mais plutôt de l'ordre de  $\varepsilon_x$ . Ceci provient du fait suivant qui est le point clé de la démonstration:

4.1.3. *Fait.* On a:  $\Theta_{\varepsilon e^{-t}}(\phi^t x) = \Theta_\varepsilon(x)$ .

*Preuve* (Fig. 4). Par définition de  $W^{ss}(x)$  les orbites (par  $\tilde{\phi}^t$ ) de ses points font partie du flot radial à l'infini, de foyer  $p_{+\infty}^u(x)$ . Il est connu que ce flot respecte les horosphères parallèles à celle de  $\tilde{X}(x)$  (i.e.  $\mathcal{H}_x$ ), en les contractant par un facteur  $e^{-t}$ .  $\square$

4.1.4. *Interprétation.* La fonction  $\Theta_\varepsilon(x)$  descend en une fonction définie sur  $V \subset M$ , qu'on notera de la même façon.

Considérons pour commencer un point  $x$  périodique:  $\phi^p(x) = x$ . Supposons que  $W^{ss}(x)$  soit différentiable en  $x$ . Alors la limite (densité infinitésimale) de  $\Theta_\varepsilon(x)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0 existe et vaut 1. Le fait précédent dit que le densité «macroscopique»  $\Theta_\varepsilon(x)$  (pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_x$ ) vaut elle aussi 1.

On en déduit que  $W^{ss}(x)$  est géodésique dans  $\mathcal{H}_x$ , ou en termes plus élémentaires que  $W^{ss}(x)$  est un segment de droite dans l'horosphère  $\mathcal{H}_x$  qui s'identifie à un espace euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Il suffit pour le voir de considérer deux points distincts  $y$  et  $z$  appartenant à l'intersection de  $W^{ss}(x)$  avec le bord de la boule  $B(x, \varepsilon)$ , pour  $\varepsilon$  assez petit (deux tels points existent par différentiabilité). La condition

$\Theta_\varepsilon(x)=1$  entraîne que les longueurs des deux morceaux de la courbe joignant  $x$  à  $y$  et  $x$  à  $z$  sont égales à  $\varepsilon$ . Ces morceaux sont donc géodésiques. Par différentiabilité le segment de la courbe  $W^{ss}(x)$ , joignant  $y$  et  $z$  est géodésique. De plus on déduit de l'invariance de  $W^{ss}(x)$  par  $\phi^p$  que  $W^{ss}(x)$  est en fait une droite (complète) dans  $\mathcal{H}_x$ .

On peut également arriver à la conclusion: « $W^{ss}(x)$  est une droite dans  $\mathcal{H}_x$ , pour tout  $x$ », avec les hypothèses de régularité suivantes. On supposera que  $W^{ss}$  définit un feuilletage global (i.e.  $V=M$ ) et qu'il est  $C^1$  (i.e. défini localement par des submersions  $C^1$ ). Dans ce cas  $\Theta_\varepsilon$  tend uniformément vers 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Il s'ensuit que  $\Theta_\varepsilon$  est identiquement égale à 1 pour tout  $\varepsilon$ . En effet si  $x_n = \phi^{t_n}(x_0)$  converge vers  $x$ , alors la densité infinitésimale  $\Theta_0(x)$  (limite de  $\Theta_\varepsilon(x)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0) qui vaut 1 est par 4.1.3 égale à  $\Theta_\varepsilon(x_0)$ .

On se propose maintenant de démontrer la même chose (presque partout) en toute généralité:

**4.2. Affirmation.** Notons  $m$  la mesure riemannienne sur  $V$ . Alors pour  $m$ -presque tout  $x$ ,  $W^{ss}(x)$  est une droite dans l'horosphère  $\mathcal{H}_x$ .

La preuve consiste à étendre la discussion précédente où l'uniformité (i.e. compacité de  $M$ ) sera remplacée par la récurrence de  $\phi$  et la différentiabilité des feuilles de  $W^{ss}$  par leur rectifiabilité. On montre pour cela:

**Lemme 1** *Le flot  $\phi$  conserve la mesure riemannienne  $m$ .*

Ce lemme sera démontré en 4.4.

**Lemme 2** *Pour  $m$ -presque tout  $x$  dans  $V$  et  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $y$  dans  $W^{ss}(x)$  on a:  $\Theta_1(y)=1$  (on peut remplacer l'indice 1 par n'importe quel  $\varepsilon$ :  $\Theta_\varepsilon(y)=1$ ).*

**4.2.1. Preuve de l'affirmation d'après le lemme 2** L'affirmation 4.2 se déduit du lemme 2 pratiquement comme dans 4.1.4.

On remarque d'abord que pour  $m$ -presque tout  $x$ ,  $W^{ss}(x)$  est une courbe complète dans l'horosphère  $\mathcal{H}_x$ . Il suffit pour cela de montrer que  $\varepsilon_x$  (défini en 4.1.1)  $= \infty$ , pour  $x$  négativement récurrent, et par suite pour  $m$ -presque tout  $x$  d'après la récurrence de Poincaré et le lemme 1. Ceci est un fait général assez facile à établir. Ici on a en fait comme en 4.1.2, la formule exacte:  $\varepsilon_{\phi^t(x)} = e^{-t} \varepsilon_x$ . Donc si  $x$  est limite d'une sous-suite  $\phi^{t_n} x$ , avec  $t_n \rightarrow -\infty$ , alors  $\varepsilon_x = \infty$ .

Il est maintenant facile de voir que si une courbe  $C$  dans  $\mathbb{R}^2$ , simple, et vérifiant  $\Theta_1(y)=1$  pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $y \in C$ , et complète (i.e. non bornée), est une droite (complète). (La courbe  $C$  étant simple et complète, pour tout  $y \in C$ ,  $B(y, 1)$  contient au moins deux points. On termine alors comme en 4.1.4.)  $\square$

**4.2.2. Preuve du lemme 2** La preuve utilise le fait suivant:

**Affirmation.** *Le feuilletage  $W^{ss}$  est absolument continu par rapport à la mesure riemannienne  $m$ : pour toute sous-variété  $C^1$ ,  $T$  transverse à  $W^{ss}$ , et toute partie  $A \subset V$ , on a:  $m(A)=0$  si et seulement si  $\mathcal{H}^1(A \cap W^{ss}(x))=0$  pour presque tout  $x \in T$  (au sens de la mesure de Lebesgue sur  $T$ ).*

**Preuve.** Pour alléger l'exposé et ne pas introduire plus de notations, on va démontrer la continuité absolue du feuilletage stable faible  $W^s$  (cette fois on remplace  $\mathcal{H}^1$  par  $\mathcal{H}^2$ ). La démonstration pour  $W^{ss}$  est la même. Dans  $\tilde{V}$ , le feuilletage  $W^s$  est défini par l'application Lipschitz  $p_{-\infty}$ . Ainsi en considérant un ouvert  $U$  assez petit (borné et à fermeture dans  $\tilde{V}$ ), et en identifiant de façon Lipschitz

la courbe  $c_1$  à un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , on peut dire que notre feuilletage est défini par une application Lipschitz  $p: U \rightarrow I$ . La formule de la co-aire [Fed] dit que si  $A$  est une partie mesurable de  $U$ , et  $ds$  la mesure riemannienne sur  $I$ , alors:

$$\int_A \|D_x p\| dm = \int_I \mathcal{H}^2(p^{-1}(s) \cap A) ds.$$

Ceci entraîne bien la continuité absolue de  $W^s$ .  $\square$

*Remarque.* La preuve pour  $W^{ss}$  utilise au lieu de  $p_{-\infty}$ , une projection dans l'espace des horosphères de  $\mathbb{H}^3$ . C'est cette même projection qui permettra de définir dans le cas général (i.e. pour un feuilletage géodésique local) les variétés stables fortes.

Maintenant pour tout  $x$ , la variété stable forte  $W^{ss}(x)$  est une courbe Lipschitz. Il s'ensuit que pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout point de  $W^{ss}(x)$ , la densité  $\Theta_\varepsilon(x)$  tend vers 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 (il suffit par exemple de considérer les points de différentiabilité de  $W^{ss}(x)$ ). Il découle de l'affirmation précédente que pour  $m$ -presque tout point de  $V$ ,  $\Theta_\varepsilon(x)$  tend vers 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0).

En particulier pour tout  $\alpha$ ,  $m(E(\alpha, \varepsilon))$  tend vers  $m(V)$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0, où  $E(\alpha, \varepsilon) = \{x \in V \mid 1 - \alpha \leq \Theta_\varepsilon(x) \leq 1 + \alpha\}$ . Or 4.1.3 entraîne:  $\phi^t(E(\alpha, \varepsilon)) = E(\alpha, e^{-t}\varepsilon)$ . Mais  $\phi^t$  préserve le volume d'après le lemme 1. On en déduit que  $m(E(0, \varepsilon)) = m(V)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . En particulier  $\Theta_1(x) = 1$  pour  $m$ -presque tout  $x \in V$ . Appliquons une deuxième fois l'affirmation précédente, on obtient: pour  $m$ -presque tout  $x$  dans  $V$  et  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $y$  dans  $W^{ss}(x)$ ,  $\Theta_1(y) = 1$ .  $\square$

4.3. *Fin de la preuve du théorème B d'après 4.2* Considérons comme dans 2.2 les projections à l'infini  $p_{+\infty}$  et  $p_{-\infty}: \tilde{V} \rightarrow S^2$ .

**Affirmation.** *Supposons  $x$  comme dans 4.2, c'est-à-dire que  $W^{ss}(x)$  est une droite dans  $\mathcal{H}_x$ . Alors  $p_{-\infty}(W^{ss}(x))$  est inclus dans un cercle contenant  $p_{+\infty}(x)$  (en fait  $p_{-\infty}(W^{ss}(x)) \cup \{p_{+\infty}(x)\}$  est un cercle).*

*Preuve.* Il suffit de regarder dans le modèle du demi-espace supérieur où: l'horosphère  $\mathcal{H}_x$  est un plan vertical,  $p_{+\infty}(x)$  est à l'infini et la projection  $p_{-\infty}$  restreinte à  $\mathcal{H}_x$  est la projection orthogonale (au sens euclidien) sur le plan vertical, bord de  $\mathbb{H}^3$ .

Reprenons les notations de 2.1 et 2.2. On a:  $c_2 = p_{-\infty}(U) \subset p_{-\infty}(U \cap W^{ss}(x))$ , pour tout  $x \in U$ . Ainsi pour presque tout  $x$  dans  $U$ ,  $p_{+\infty}(x)$  est dans un cercle contenant  $c_2$ . Il en résulte par continuité de  $c_1 = p_{+\infty}(U)$  que  $c_1$  et  $c_2$  sont inclus dans un même cercle. Ceci contredit violemment 3.4.1: les segments joignant les points de  $c_1$  à ceux de  $c_2$  ne peuvent pas feuilleter un ouvert de  $\mathbb{H}^3$ .  $\square$

4.4. *Preuve du lemme 1* La preuve qu'on donnera à ce lemme s'étend à tous les feuilletages géodésiques locaux, de dimension 1 et localement Lipschitz des variétés hyperboliques compactes de dimension quelconque.

4.4.1. *Dynamique infinitésimale de  $\phi$  et champs de Jacobi* [C-E]. Une variation  $C^1$  de géodésiques donne lieu à un champ de Jacobi. Plus précisément, soit  $\alpha(s)$  et  $X(s)$  deux courbes  $C^1$  de  $M$  et  $T^1 M$  respectivement, telles que  $X(s) \in T_{\alpha(s)}^1 M$  pour tout  $s$ . Considérons l'application à deux variables:  $\alpha(s, t) = \exp_{\alpha(s)}(tX(s))$ , i.e. pour  $s$  fixé,  $t \rightarrow \alpha(s, t)$  est la géodésique déterminée par le vecteur  $X(s)$ . Pour

$s$  fixé, le champ:  $t \rightarrow (\partial \alpha / \partial s)(s, t)$  est donc un champ de Jacobi le long de la géodésique:  $t \rightarrow \alpha(s, t)$ . Il est facile de voir que ceci se généralise au cas où  $\alpha$  et  $X$  sont Lipschitz. Dans ce cas pour tout  $s$  où  $\alpha$  et  $X$  sont dérivables (donc pour presque tout  $s$ ) le champ  $\partial \alpha / \partial s$  est un champ de Jacobi, le long de la géodésique:  $t \rightarrow \alpha(s, t)$ . On en déduit:

**Affirmation.** Pour presque tout  $x \in V$  (au sens de la mesure de Lebesgue) et tout  $J_0 \in T_x M$ ,  $D_x \phi^t(J_0)$  est un champ de Jacobi le long de l'orbite de  $x$ .

*Preuve.* Il suffit d'appliquer le théorème de Rademacher [Fed], disant qu'un champ localement Lipschitz (tel que  $X$ ) est presque partout différentiable.

**4.4.2. Cas hyperbolique.** Dans le cas hyperbolique (ou en général localement symétrique), l'équation de Jacobi est très simple et facile à intégrer. Si  $t \rightarrow x(t)$  est une géodésique, alors l'équation de Jacobi se réduit à:  $J'' = J$ . La dérivation ici est entendue au sens de la dérivation covariante par rapport à  $\partial x / \partial t$ . Si  $J_0 = J(0)$  et  $J'_0 = J'(0)$  sont les conditions initiales dans  $T_{x(0)} M$ , d'un champ de Jacobi  $J(t)$ , alors on a:  $J(t) = \tau^t(\text{ch } t J_0 + \text{sh } t J'_0)$ , où  $\tau^t: T_{x(0)} M \rightarrow T_{x(t)} M$  est le transport parallèle le long la géodésique  $x(t)$ .

Considérons notre champ  $J(t) = D_x \phi^t(J_0)$ , on sait qu'il vérifie  $J(0) = J_0$ . La dérivée initiale  $J'(0) = J'_0$  est quant à elle, dictée par le flot  $\phi^t$ . On la note  $A_x(J_0)$ . On a donc:

$$D_x \phi^t(J_0) = \tau^t(\text{ch } t J_0 + \text{sh } t A_x(J_0)).$$

On en déduit que  $A_x: T_x M \rightarrow T_x M$  est linéaire, ce qui permettra d'écrire:

$$D_x \phi^t = \tau^t(\text{ch } t 1 + \text{sh } t A_x).$$

**4.4.3. Jacobien.** Le transport parallèle étant isométrique, le Jacobien de  $\phi^t$  au point  $x$ , s'écrit simplement:  $\det(D_x \phi^t) = \det(\text{ch } t 1 + \text{sh } t A_x)$ . Il se développe:

$$\det(D_x \phi^t) = a_3(x) e^{3t} + a_2(x) e^{2t} + a_1(x) e^t + a_0(x) + a_{-1}(x) e^{-t} + a_{-2}(x) e^{-2t} + a_{-3}(x) e^{-3t}.$$

Les coefficients  $a_i$  sont mesurables. Montrons qu'ils sont tous nuls sauf  $a_0$ . Commençons par  $a_3$ . Soit  $\varepsilon$  et  $R$  deux réels et:

$$N = \{x \in V / a_3(x) \geq \varepsilon, \text{ et } a_i(x) \leq R, \text{ pour } i \neq 3\}.$$

Pour  $t$  assez grand et  $x \in N$ , on a:  $\det(D_x \phi^t) \geq (\varepsilon/2) e^{3t}$ . Donc:

$$\text{Vol}(\phi^t(N)) \geq (\varepsilon/2) e^{3t} \text{Vol}(N).$$

Ceci contredit le fait que  $\text{Vol}(V)$  et par suite  $\text{Vol}(N)$  soit fini ( $V$  est un ouvert de la variété compacte  $M$ ), à moins que  $\text{Vol}(N) = 0$ . Ainsi, en jouant sur  $\varepsilon$  (petit) et  $R$  (grand), on montre que  $a_3$  est identiquement nul. On répète le même raisonnement pour tous les coefficients autre que  $a_0$  qui seront ainsi tous nuls. Donc:  $\det(D_x \phi^t) = a_0(x)$  est indépendant de  $t$ . Mais pour  $t=0$ ,  $\det(D_x \phi^t) = 1$ . Donc  $\det(D_x \phi^t) = 1$  pour tout  $t$ . En conclusion  $\phi^t$  préserve le volume riemannien. Ceci achève la démonstration du lemme 1.  $\square$

### 5 Preuve de la proposition 1.5

Il s'agit de montrer que l'application  $h: M \rightarrow T^1M$  est injective (sachant que l'application  $\tilde{f}$  est injective le long des orbites de  $\tilde{\psi}$ ). Il suffit de montrer que le relèvement  $\tilde{h}: \mathbb{H}^3 \rightarrow T^1\mathbb{H}^3$  est injective car  $f$  est homotope à l'identité ou de façon équivalente car  $\tilde{h}$  est  $\pi_1(M)$ -équivariante ( $\tilde{h}(\gamma x) = \gamma \tilde{h}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{H}^3$  et  $\gamma \in \pi_1(M)$ ).

Supposons le contraire. Il existera donc deux  $\tilde{\psi}$ -orbites distinctes  $l_1$  et  $l_2$  ayant une même image  $l'$  par  $\tilde{f}$ , i.e. ces deux orbites sont à distance finie de la géodésique  $l'$ . Il en résulte que ces deux orbites elles même sont à distance finie entre elles.

Soit  $\tilde{S} \subset \mathbb{H}^3$ , l'image réciproque de la section  $S \subset M$  du flot  $\psi$ . Les orbites précédentes sont  $\tilde{\psi}$ -orbites de deux points distincts  $x$  et  $y$  dans  $\tilde{S}$  (car  $\tilde{S}$  est une section globale de  $\tilde{\psi}$ ). Remarquons qu'alors:  $d_1(\tilde{\psi}^t(x), \tilde{\psi}^t(y))$  est bornée (quand  $t \in \mathbb{R}$ ), où  $d_1$  est la distance définie en 1.3. Il suffit pour cela de remarquer d'après la preuve de 1.1 que:  $d_1(\tilde{\psi}^t(x), \tilde{\psi}^s(y)) \geq |t-s|$  (c'est-à-dire qu'un point  $\tilde{\psi}^t(x)$  ne peut être proche que des points  $\tilde{\psi}^s(y)$  avec  $s$  proche de  $t$ ).

Notons  $\tilde{\sigma}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ , le relèvement de la monodromie  $\sigma$ . Il existe un élément  $\gamma$  de  $\pi_1(M)$  tel que  $\tilde{\psi}^n(z) = \gamma^n \tilde{\sigma}^n(z)$  pour tout  $z \in \tilde{S}$ . Ainsi  $d_1(\tilde{\sigma}^n(x), \tilde{\sigma}^n(y)) = d_1(\tilde{\psi}^n(x), \tilde{\psi}^n(y))$  est bornée quand  $n \in \mathbb{Z}$ .

Soit maintenant  $d$  la distance déterminée par la métrique riemannienne induite sur  $\tilde{S}$ . Cette distance n'est pas (globalement) équivalente à la restriction de  $d_1$  à  $\tilde{S}$ . Il est toutefois vrai que  $d(\tilde{\sigma}^n(x), \tilde{\sigma}^n(y))$  est bornée quand  $n \in \mathbb{Z}$ . La preuve de la proposition sera ainsi achevée à l'aide du lemme suivant:

**Lemme.** *Soit  $\sigma: S \rightarrow S$  un difféomorphisme pseudo-Anosov d'une surface  $S$ . Soit  $\tilde{\sigma}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ , le relèvement de  $\sigma$  dans le revêtement universel et  $d$  une distance sur  $\tilde{S}$  déterminée par une métrique riemannienne provenant de  $S$ . Soit  $x$  et  $y$  deux points de  $\tilde{S}$  tels que  $d(\tilde{\sigma}^n(x), \tilde{\sigma}^n(y))$  soit bornée quand  $n \in \mathbb{Z}$ . Alors  $x = y$ .*

*Preuve.* Toutes les distances du lemme sont équivalentes. Choisissons une qui provient d'une métrique riemannienne  $g$ , plate singulière sur  $S$ , pour laquelle les feuilletages stables et instables de  $\sigma$  sont orthogonaux [FLP].

Un rectangle  $R$  dans  $S$  est une partie fermée évitant les singularités, de diamètre petit, et muni d'une structure de produit local (i.e. l'intersection de variétés stables et instables de points de  $R$  appartient à  $R$ ). La restriction de  $g$  à un tel rectangle  $R$  est isométrique à un produit d'intervalles  $[0, \alpha] \times [0, \beta]$ . La restriction de  $g$  à l'image  $\sigma^n(R)$  est isométrique à  $[0, \lambda^n \alpha] \times [0, \lambda^n \beta]$  où  $\lambda$  est le coefficient de dilatation de  $\sigma$ . Dans ces coordonnées,  $\sigma^n$  s'écrit  $\sigma^n(a, b) = (\lambda^n a, \lambda^{-n} b)$ . On en déduit:

- (i) Pour tout courbe  $c$  non-réduite à un point, l'ensemble des longueurs  $\text{long}(\sigma^n(c))$ , quand  $n$  parcourt  $\mathbb{Z}$ , n'est pas borné.
- (ii)  $\sigma$  envoie géodésique en géodésique. Ceci découle de l'expression de  $\sigma$  ci-dessus pour une géodésique ne passant pas par les singularités. Il en va de même pour toute géodésique puisque les géodésiques sans singularités sont denses.

La métrique  $g$  est à courbure non-positive car les angles aux singularités sont plus grands que  $2\pi$ . Il en résulte que dans  $\tilde{S}$ , deux points peuvent être joints par une unique géodésique [A-B].

Soit  $c$  la géodésique joignant  $x$  et  $y$ . D'après ce qui précède, on a:  $d(\tilde{\sigma}^n(x), \tilde{\sigma}^n(y)) = \text{long}(\tilde{\sigma}^n(c))$ . D'après i, ces longueurs sont bornées pour  $n$  parcourant  $\mathbb{Z}$ , si et seulement si  $c$  est réduite à un point, c'est-à-dire  $x = y$ .  $\square$

*Remarque.* On peut montrer que la dimension de Hausdorff de la variété topologique  $h(M) \subset T^1 M$ , est strictement supérieure à 3.

*Remerciements.* Je remercie J.P. Otal pour son intérêt à ce travail. Je remercie également F. Paulin pour ses suggestions et remarques sur le texte.

### Références

- [A-B] Alexander, S., Bishop, R.: The Hadamard-Cartan theorem in locally convex metric spaces. *Enseign. Math.* **36**, 309–320 (1990)
- [C-E] Cheeger, J., Ebin, D.: *Comparison theorems in Riemannian Geometry*. Amsterdam: North Holland 1975
- [Fed] Federer, H.: *Geometric measure theory*. Berlin Heidelberg New York: Springer 1969
- [FLP] Fathi, A., Laudenbach, F., Poenaru, V.: *Travaux de Thurston sur les surfaces*. (Astérisque vol. 66–67) Paris: Soc. Math. Fr. 1979
- [Ghy1] Ghys, E.: Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercle. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **4**, 67–80 (1984)
- [Ghy2] Ghys, E.: Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un. *Comment. Math. Helv.* **58**, 543–572 (1983)
- [Ghy3] Ghys, E.: Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes. Sémin. Bourbaki, exposé 747. Paris: Soc. Math. Fr. 1991
- [Gro1] Gromov, M.: Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group. (Preprint 1977)
- [Gro2] Gromov, M.: Hyperbolic groups. In: Gersten, S.M. (ed.) *Essay in group theory*. (Math. Sci. Res. Inst. Publ. vol. 8, pp. 75–263) Berlin Heidelberg New York: Springer 1987
- [Hir] Hiraide, K.: Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov. *Osaka J. Math.* **27**, 117–162 (1990)
- [Lew] Lewowicz, J.: Expansive homeomorphisms of surfaces. *Bol. Soc. Bra. Mat.* **20** (no. 1), 113–133 (1989)
- [Pat] Paternain, M.: Expansive flows and the fundamental group. (Preprint)
- [Sul] Sullivan, D.: *Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsien et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur  $S^1$* . Sémin. Bourbaki, exposé 554. (Lect. Notes Math., vol. 842, pp. 196–214) Berlin Heidelberg New York: Springer 1981
- [Thu] Thurston, W.P.: *The topology and geometry of 3-manifolds*. (Princeton Lect. Notes) Princeton, NJ: Princeton University Press 1978
- [Zeg] Zeghib, A.: *Feuilletages géodésiques des variétés localement symétriques*. Lyon: ENS (Preprint 1992)