Sur une notion d'autonomie de systèmes dynamiques, appliquée aux ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques.

par

A. Zeghib

C.N.R.S : U.M.R 128. Ecole Normale Supérieure de Lyon,
46, Allée d'Italie, 69364 LYON Cedex 07. FRANCE.

Abstract. We introduce a notion of autonomous dynamical systems which generalizes algebraic dynamical systems. We show by giving examples and by describing some properties that this generalization is not a trivial one. We apply the methods then developed to algebraic Anosov systems. We prove that a C^1 - submanifold of finite volume which is invariant by an algebraic Anosov system is "essentially" algebraic.

Résumé . On introduit une notion de systèmes dynamiques autonomes généralisant les systèmes dynamiques algébriques. On montre en donnant des exemples et en décrivant certaines propriétés que cette généralisation est non-triviale. On applique les méthodes ainsi développées aux ensembles invariants des systèmes d'Anosov algébriques. On démontre qu'une sous-variété C^1 de volume fini et invariante par un système d'Anosov algébrique est "essentiellement" algébrique.

§0. Introduction.

Cet article a deux objectifs : l'introduction (et l'étude) d'une notion de systèmes dynamiques autonomes, puis leur application à l'étude des sous-ensembles invariants des systèmes d'Anosov algébriques.

0.1. Systèmes dynamiques autonomes. Le §1 sert d'introduction aux systèmes dynamiques autonomes. On y trouvera les définitions et propriétés préliminaires ainsi que quelques exemples.

Ces systèmes dynamiques autonomes généralisent, de façon non-triviale les systèmes algébriques (i.e. les groupes à un paramètre de translation sur les quotients de groupes de Lie), comme il ressortira des exemples du §3. Ils englobent par exemple (en plus des flots algébriques), d'un côté tous les flots isométriques, et de l'autre tous les flots géodésiques des variétés localement symétriques.
Cette généralisation n'est pas non plus très vague. En effet, on remarquera par exemple en 1.4, que le exposants de Lypunov sont continus. On remarquera aussi (1.5, théorème A) un phénomène, très intéressant de conservation de volume, qui malgré sa simplicité paraît non connu même dans le cas classique des flots algébriques. Enfin il semble même qu'une classification de ces objets soit possible. Dans ce sens le théorème C (formulé et démontré au §8) dit essentiellement qu'un flot autonome et mixing (et vérifiant une condition qu'on ne peut pas expliciter à ce niveau) est algébrique. En général il est raisonnable de penser que les composantes ergodiques d'un système dynamique autonome sont algébriques (ces composantes peuvent cependant être très différentes entre elles).

0.2. Motivation. Voici à notre avis deux avantages de ces systèmes dynamiques autonomes (en plus de leur naturalité) par rapport aux systèmes algébriques :
i) Ils s'expriment pour des flots fibrés (1.2), ce qui n'est pas le cas des systèmes algébriques. Ce langage de flots fibrés permettra de dégager facilement la propriété de conservation du volume (1.5, §3) ainsi que d'autres faits qu'on rencontrera par la suite.
ii) Généralement un "sous-système d'un système autonome est autonome" (§7). On ne peut par contre pas espérer la même chose pour les systèmes algébriques, à moins qu'il soit par exemple de type Anosov comme dans le présent texte. Considérons par exemple une matrice A SL(n, Z) agissant sur le tore T^n. Supposons A scindée de la façon suivante : pour tout (x, y) $T^k x T^{n-k}$, on a A(x, y) = (Bx, y) où B SL(k, Z). Toute sous-variété de la forme N = T^kxN', où N' est une sous-variété de T^{n-k} est donc A-invariante. On ne peut dire que la restriction de A à N est (naturellement) algébrique que si N est un tore géométrique (i.e. affine). On peut par contre généralement affirmer que cette restriction est autonome. Certes c'est un exemple un peu trivial, mais on peut dire à **première approximation** que les systèmes autonomes sont simplement les sous-systèmes des systèmes algébriques (i.e. ce qu'on obtient en saturant l'ensemble des systèmes algébriques par l'opération de restriction).

0.3. Ensembles invariants des systèmes d'Anosov algébriques. Le §2 contient les résultats de cet article sur les sous-ensembles invariants des systèmes d'Anosov algébriques. Soit (M, φ) un tel système : M est une variété compacte et φ est un difféomorphisme ou un flot d'Anosov dessus. Soit NcM une sous-variété C^1, fermée (compacte sans bord) invariante par φ. L'étude de telles N a été inaugurée dans [Hir] et poursuivie dans [Fat], [Fra], [Han], [Hir], [Mañ]$_1$, [Mañ]$_2$, [Zeg]$_1$..

J. Franks [Fra] (dans le cas C^∞), puis R. Mañé [Mañé]$_2$ (dans le cas C^1) ont démontré dans le cas des automorphismes hyperboliques du tore que N est un sous-tore (géométrique). Dans ce présent travail on généralisera ce résultat en supposant que (M, φ) est algébrique (ce qui est assez vaste pour être classifié d'après [Tom]). Quant à N, elle sera simplement supposée une sous-variété immergée (pas nécessairement injectivement) et de classe C^1. En particulier N ne sera pas supposée fermée dans M. Notre approche, contrairement aux réferences citées ci-dessus, est géométrique et purement non-topologique. On remarquera (sans le démontrer ici) que notre méthode peut s'adapter au cas où N est rectifiable [Fed]. Cette dernière hypothèse de régularité est presque optimale comme le montrent les constructions de [Fat] et [Han].

0.4. Contenu du texte. Le §1 introduit les systèmes dynamiques autonomes et surtout l'énoncé du théorème A sur la conservation du volume. Le §2 contient les résultats sur les sous-ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques : le théorème B et ses variantes. Le §3 contient des exemples de systèmes dynamiques autonomes et le §4 contient la preuve du théorème A. Le §5 (intéressant en lui même) étudie la relation de Lipschitz-ergodicité, qui s'obtient de la même façon que les composantes ergodiques au sens de la théorie de la mesure en remplaçant les fonctions mesurables invariantes par des fonctions Lipschitz invariantes. Il se trouve que cette relation se caractérise de façon géométrique très simple. Au §6 on définit l'holonomie d'un flot fibré linéaire isométrique (transport parallèle). Le §7 contient les notions essentielles servant aux preuves des théorèmes B et C. Il est aussi simple et central que le §4 sur la conservation du volume. On y précise le fait discuté ci dessus (0.2) disant que généralement un sous-système d'un système autonome est autonome. Enfin les preuves des théorèmes C et B seront achevées respectivement aux §§ 8 et 9. Ces preuves reposent fondamentalement sur le théorème A et le théorème 7.4.

§1. Sur une notion d'autonomie de systèmes dynamiques.

Dans ce texte on entend par système dynamique un flot (groupe à un paramètre continu de difféomorphismes) généralement noté (M, φ) (les groupes à un paramètre discret, c'est-à-dire les difféomorphismes se traitent de la même façon. On fera le long du texte quelques remarques sur des légères différences entre les deux cas). Ici M est une variété riemannienne qui ne sera supposée ni compacte (ni même complète) et φ désignera aussi bien le flot que le champ vectoriel qu'il détermine (en réalité la majorité des notions qu'on introduira par la suite s'étendent au cas où M est un espace métrique et φ est un groupe à un paramètre d'homéomorphismes dessus).

1.1 Flots algébriques [Tom].

Soit G un groupe de Lie et $g^t = \exp(t\,\alpha)$ un groupe à un paramètre de G, α étant dans l'algèbre de Lie de G. Cela définit sur G un flot de translations à droite, $x \to x\, g^t$. Ce n'est rien d'autre que le flot du champ invariant à gauche déterminé par α.

Observation fondamentale : Ce flot est conservé par l'action à **gauche** de G sur lui même. En effet les translations à gauche et à droite commutent entre elles. Il s'agit simplement de l'associativité de la multiplication de G!

Soit Γ un sous-groupe discret de G. On a alors un flot quotient sur $\Gamma \backslash G$: $\Gamma x \to \Gamma x g^t$. Cette fois G n'agit plus à gauche sur $\Gamma \backslash G$. Il agit plutôt localement au sens précis qu'il agit sur un revêtement de $\Gamma \backslash G$, qui est en l'occurrence G lui même. Cette action locale préserve le flot au sens que c'est le cas dans le revêtement précédent. Plus intuitivement , soit g un élément de G et U un ouvert de G assez petit pour que la projection $G \to \Gamma \backslash G$ soit injective sur U et gU. Alors g détermine un difféomorphisme entre ces projections. "L'observation fondamentale" dit simplement que le flot sur $\Gamma \backslash G$ est conservé par tous ces difféomorphismes locaux et par suite par le pseudo-groupe de difféomorphismes qu'ils engendrent. Ce dernier pseudo-groupe agit transitivement sur $\Gamma \backslash G$. On peut le rendre isométrique en munissant G d'une métrique invariante à gauche, qui déterminera donc une métrique sur $\Gamma \backslash G$ invariante par notre pseudo-groupe.

Soit encore H un sous-groupe compact de G. Supposons que g^t centralise H c'est à dire que $g^t h = h\, g^t$ pour tout h élément de H . Alors le flot se projette sur $M = \Gamma \backslash G / H$: $x \to \Gamma x g^t H$ (pour ne pas sortir de notre cadre, on supposera que M est une variété, c'est-à-dire que H agit à droite sans point fixe sur $\Gamma \backslash G$). On peut supposer que la métrique précédente sur G est H-invariante à droite (car H est compacte) de telle façon qu'elle passera à M. L'observation est la même : notre flot commute avec un pseudo-groupe d'isométries transitif sur M.

La réciproque de cette observation est en fait vraie si l'on élargit les variétés (localement homogènes) de type $M = \Gamma \backslash G /H$ aux variétés admettant une (G, G/H)-structure (voir $[\mathrm{Ghy}]_1$, [Thu]). Cela veut dire que M est recouverte par des cartes à valeurs dans G/H et telles que le passage de l'une à l'autre soit la restriction d'une translation à gauche sur G/H. Le groupe à un paramètre g^t (supposé comme ci-dessus centralisant H) détermine un flot local (i.e. un champ vectoriel) sur M. De même la métrique ci-dessus se définira bien dans M (elle est éventuellement non-complète). Ce flot local est toujours préservé par un pseudo-groupe d'isométries transitif.

Affirmation. Tout flot local (sur une variété riemannienne) conservé par un pseudo-groupe d'isométries transitif s'obtient de la façon précédente.

La preuve est standard, on la fera en 8.1 lorsque H est trivial (le cas général se fait de la même façon).

Terminologie. Un tel flot sera dit **algébrique**. On dira qu'il est **de type homogène** si H est trivial et **de type localement homogène** dans le cas général.

Dans ce texte, sauf au §8, et ce pour alléger l'exposé, on ignorera le cas non-complet. En d'autres termes on supposera que M est complète (i.e. M est de la forme $\Gamma \backslash G / H$)

Remarque. 1. Les difféomorphismes algébriques se définissent de la même façon, en supposant que g^t est un groupe à un paramètre discret (i. e. t Z). On les définit classiquement, plus directement à l'aide d'automorphismes (affines) de groupes de Lie. Des considérations de produits semi-directs permettent de montrer l'équivalence des deux formulations.

Remarque. 2. La compacité de H est importante pour nous. Sans elle on peut obtenir des flots exotiques comme dans $[\mathrm{Ghy}]_1$, où il a été question d'un tel flot sur une 3-variété compacte, qui est de type Anosov. Ce flot n'est pas isomorphe (en tant que flot) à un flot algébrique.

Généralisation. Les flots autonomes qu'on va introduire tout de suite sont essentiellement obtenus en affaiblissant la propriété précédente de la manière suivante:

i) Le groupe G n'agit "qu'infinitésimalement ".

ii) L'action n'est plus transitive sur M, mais elle l'est seulement le long des orbites de φ.

On verra plus loin (§1.3 et partout le long de ce texte) que ce faisant , on gardera bien l'essentiel de la beauté des flots algébriques.
Passons maintenant à des définitions précises.

1.2 Flots autonomes. Le cadre naturel de l'autonomie est les flots fibrés linéaires.

1.2.1. Flots fibrés linéaires [Sel]. Soit (M,φ) un flot, $E \rightarrow M$, un fibré au dessus de M et F un flot sur E au dessus de φ c'est à dire que pour tout x M, F^t envoie E_x sur $E_{\varphi^t(x)}$. On dira que (E, M, φ, F) ou tout simplement F est un flot fibré au dessus de (M,φ). On dira que c'est un flot fibré linéaire si le fibré est vectoriel et si F^t est un endomorphisme de ce fibré pour tout t. L'exemple classique est celui où E = TM et $F^t = D\varphi^t$ est le **flot tangent** à φ si φ est C^1.

1.2.2. Flots fibrés linéaires isométriques. Supposons le fibré muni d'une métrique (fibrée) riemannienne. On dira qu'un flot fibré (E, M, φ, T) est isométrique si pour tout $x \in M$, $T^t : E_x \to E_{\varphi^t(x)}$ est **isométrique**.

Exemple. Supposons M munie d'une connexion riemannienne (c'est-à-dire compatible avec la métrique riemannienne mais éventuellement à torsion). Alors le transport parallèle le long des trajectoires de φ définit un flot fibré linéaire isométrique sur TM (cette construction n'a pas d'analogue pour les difféomorphismes).

Définition (Autonomie). Soit (E, M, φ, T) un flot fibré isométrique. On dira qu'un flot fibré (E, M, φ, F) est T-autonome (ou autonome par rapport à T) si F et T commutent, c'est à dire : $F^t T^s = T^s F^t$ pour tout t et s réels.

Définition. Soit M une variété riemannienne. On dira que le flot (M, φ) est T-autonome si son flot tangent (TM, M, φ, Dφ) est T-autonome.

Définition. On dira que (E, M, φ, F) est autonome s'il est T-autonome pour un certain T (isométrique). On définit de même l'autonomie de (M, φ).

Remarque 1. Comme le suggère la notation le flot fibré isométrique T sera appelé le transport parallèle. Le point de départ de cette notion d'autonomie était en réalité, la remarque que le flot géodésique d'une variété localement symétrique est autonome par rapport à un flot fibré linéaire isométrique construit naturellement à l'aide du transport parallèle de cette variété (§ 3.2). De plus, on peut en général se ramener à l'exemple de 1.2.2, c'est-à-dire où le transport parallèle le long des orbites provient de celui d'une connexion riemannienne sur M. Sans rentrer dans ses détails, cette remarque nous permet de dire qu'en général les flots autonomes sont ceux qui préserve le transport parallèle le long de leurs orbites, au sens d'une connexion riemannienne (sans préserver complètement cette connexion!).

Remarque 2 (Régularité). On peut étudier les flots fibrés linéaires autonomes en se fixant un certain contexte de régularité pour φ, F, T et la métrique. Toutefois pour simplifier (surtout au §6 sur l'holonomie) on va supposer que T est **Lipschitz** et que φ est $\mathbf{C^1}$ (pour pouvoir parler de son flot tangent $F^t = D\varphi^t$).

Exemple.1. Les flots algébriques sont naturellement autonomes. Supposons d'abord que Γ et H sont triviaux. Pour tous x et y = φ^t x = xg^t , sur une même orbite , il existe une unique translation à gauche k = $xg^t\, x^{-1}$ amenant x à y . On prendra $T_x^t = D_x k$: T_xG ¾→ T_yG. C'est bien un flot fibré lineaire isométrique sur TG au dessus de φ. La condition d'autonomie est bien vérifiée puisque φ commute avec la translation à gauche k, elle même.

On montre maintenant que cela a un sens sur M = Γ \ G /H, c'est-à-dire que si x'   M et y' = φ^tx', x étant un relevé de x' dans G, alors T_x^t détermine une isométrie $T_{x'}M \to T_{y'}M$, indépendante du choix de x. Adoptons pour cela les notations standard : si u   TG, alors g.u (resp. u.g) est l'image de u par la dérivée de la multiplication à gauche (resp. à droite) par g. Ainsi si u_x T_xG, alors $T_x^t(u_x) = xg^tx^{-1}.u_x$.

Considérons u_x et u'_x deux éléments de T_xG se projetant sur un même vecteur de T_xM (i.e. u_x-u'_x x.H = T_x(x.H)), alors il en va de même pour $T_x^t(u_x)$ et $T_x^t(u'_x)$ car $T_x^t(u_x$-$u'_x)$ $xg^tx^{-1}(x.H) = xg^t.H$ = y.H.

Considérons maintenant u_z T_zG tel que z = γxh et $u_z = \gamma.u_x.h$, où γ Γ et h   H de telle façon que u_x et u_z déterminent le même élément de $T_{x'}M$. On a $T_z^t(u_z) = zg^tz^{-1}.u_z = \gamma xhg^th^{-1}x^{-1}\gamma^{-1}.u_z = \gamma xhg^th^{-1}x^{-1}\gamma^{-1}.\gamma.u_x.h = \gamma xg^tx^{-1}.u_x.h$ (car $hg^th^{-1} = g^t$) = $\gamma.T_x^t(u_z).h$. Le transport parallèle est donc bien défini sur M.

Une autre façon de voir les choses consiste à dire que G est canoniquement parallélisable, en identifiant tous ses espaces tangents par translation à gauche, à l'algèbre de Lie G. Ce parallélisme invariant à gauche passera aux quotients homogènes du type Γ \ G. Le transport parallèle est induit de ce parallélisme. Quant au cas localement homogène: M = Γ \ G /H, c'est seulement le transport parallèle le long des orbites de φ (mais non tout le parallélisme) qui passe à M = Γ \ G /H.

Exemple 2. Les flots isométriques (i.e. $D\varphi^t$ isométrique pour tout t) sont naturellement autonome. On prendra simplement $T^t = D\varphi^t$.

1.3. Flots et endomorphismes structuraux.

Considérons un flot algébrique de type homogène sur M = Γ \ G. Relativement au parallélisme canonique , identifiant tous les espaces tangents à G, l'application dérivée $D_x\varphi^t$ est représentée par $Ad(g^t)$: G - G (elle est en particulier indépendante de x). Ainsi , toute la dynamique infinitésimale de φ est déterminée par le groupe à un paramètre $Ad(g^t)$ Aut (G). Il n'est peut être pas exagéré de dire que cette propriété est l'essentiel de "l'algébricité" ([Ghy]$_2$, 2.1).

Les flots autonomes vérifient une propriété analogue. Soient en général (E, M, φ, T) et (E,M,φ,F) deux flots fibrés linéaires dont le premier est isométrique. Pour x   M, considérons $S_x^t : E_x \to E_x$; $S_x^t = T^{-t} F^t$. En général S_x^t est la résolvante d'une équation linéaire non autonome (c'est-à-dire que les applications t → $S_x^t(u)$, pour u E_x

sont solutions d'une équation linéaire non-autonome sur l'espace vectoriel E_x). Maintenant si F et T commutent alors S_x^t est bien un groupe à un paramètre : $S_x^{t+s} = T^{-t} T^{-s} F^t F^s = T^{-t} F^t T^{-s} F^s = S_x^t S_x^s$. En d'autres termes l'équation dont il s'agit est autonome. C'était là l'origine de la terminologie (flots autonomes). Réciproquement dès que S_x^t est un groupe à un paramètre alors le flot F est T- autonome (car : $T^{-t} (F^t T^s) F^{-s} = S_x^t S_x^{-s} = S_x^{t-s} = T^{s-t} F^{t-s} = T^{-t} (T^s F^t) F^{-s}$). On appellera S_x^t **le flot linéaire structural** (au point x). Il se transforme le long de l'orbite de x suivant la loi : $S^t_{\varphi^s(x)} = F^s S_x^t F^{-s} = T^s S_x^t . T^{-s}$.

Il existe un endomorphisme A_x, qu'on appellera également structural tel que $S_x^t = \exp(tA_x)$.

Remarque. Pour les difféomorphismes, il y a un automorphisme structural S_x^1, mais il n'y a pas d'endomorphisme structural comme A_x.

1.4. Scindement de Lyapunov.

Une propriété remarquable des exposants de Lyapunov des flots autonomes , est qu'ils déterminent le comportement exact et non seulement asymptotique (de la dynamique sous le flot tangent). Ces exposants sont continus et ne dépendent pas de la mesure servant à les définir et de plus tous les vecteurs sont réguliers (au sens de la théorie des exposants de Lyapunov).Tout cela découle de l'existence de l'endomorphisme structural (1.3). Soit en effet $\lambda_1(x), \ldots\lambda_n(x)$ les racines complexes (comptées avec multiplicité) de l'endomorphisme structural A_x. Localement on peut les choisir (c'est-à-dire éventuellement ré-indicer) continues. Soit $\nu_1(x) \geq \ldots . \geq \nu_n(x)$ leurs modules (comptées avec multiplicité). Ce sont les exposants de Lyapunov, qui sont donc continues . Notons P_i (x) l'espace caractéristique associé à $\lambda_i(x)$ et $E_i(x)$ la somme des espaces associés aux valeurs propres de module $\nu_i(x)$. Ce sont les sous-espaces de Lyapunov. Ils sont semi-continus supérieurement au sens que si $x_k \to x$ et $E_i(x_k) \to L$, alors Lc $E_i(x)$. Dans l'ouvert invariant dense où les dimensions de ces espaces sont localement constantes, ces espaces de Lyapunov sont en fait de classe C^r si le transport parallèle et le flot le sont. Cet ouvert est en fait égal à M dès que par exemple, (M, φ) est ergodique pour une mesure pleine invariante

1.5. Conservation du volume.

Comme première raison à la possibilité de "classification" des flots autonomes, remarquons le phénomène de conservation du volume suivant :

Théorème A. Soit (M, φ) un flot autonome et N une sous-variété (immergée) de classe C^1, invariante par φ et de volume fini pour la métrique riemannienne induite. Alors le flot (N,φ) conserve une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue. La mesure riemannienne elle même est en fait conservée lorsque M = N ou lorsque l'endomorphisme structural est partout à valeurs propres réelles. En général la densité de la mesure invariante par rapport à la mesure riemannienne, peut être choisie bornée le long des orbites.

Remarque. Le terme "sous-variété" sera précisé dans 2.2. Ce théorème s'étend (avec pratiquement la même démonstration) aux sous-ensembles rectifiables (voir [Fed] pour la définition de rectifiabilité).

§2. Ensembles invariants des flots d'Anosov algébriques.

Soit (M,φ) un flot d'Anosov algébrique et N un sous-ensemble invariant de M

2.1. Hypothèses sur N.

Régularité. Nos résultats sont valables pour N rectifiable [Fed]. Dans ce texte , on va simplifier en supposant que N est" une sous-variété C^1". Ceci signifie pour nous ici que N est l'image d'une immersion C^1 (qui n'est nécessairement ni injective ni propre). C'est par exemple le cas du complémentaire d'un nombre fini d'orbites périodiques (ou d'un fermé invariant d'intérieur vide quelconque) dans une sous-variété compacte. Naturellement nos résultats porteront sur $\overline{N}$ la fermeture de N.

"Compacité". On supposera que N est de volume fini pour la métrique riemannienne induite (mais elle n'est nécessairement ni compacte ni même complète). Aucune hypothèse de compacité ou finitude n'est faite sur M

2.2. Rigidité. Si M = $\Gamma \backslash G / H$, la question de rigidité naturelle qui se pose est : N (ou plus exactement sa fermeture puisqu'on ne suppose pas N fermée) est-elle la projection dans M d'une partie de G de la forme gG', où g G et G' est un sous-groupe de G. On donnera dans ce qui suit un exemple montrant que ceci n'est pas tout à fait vrai. Mais regardons d'abord quand est ce que une telle projection vérifie bien nos hypothèses précédentes.

2.2.1. Condition 1. Remarquons d'abord que pour que la projection soit φ-invariante, il n'est pas nécessaire que G' contienne le groupe à un paramètre $g^t = \exp(t\ \alpha)$ En effet d'autres groupes à un paramètre, combinaison de g^t avec des éléments de H, déterminent le même flot sur $M = \Gamma \backslash G / H$. Ils sont de la forme $\exp t (\alpha + \beta)$ où β est dans l'algèbre de Lie de H. On dira qu'ils sont équivalents à g^t. Le sous-groupe G' doit simplement en contenir un.

2.2.2. Condition 2. Remarquons maintenant que si la projection N de gG' est de volume fini, alors elle est fermée. Il suffit de le voir pour la projection correspondante dans $\Gamma \backslash G$. Ici elle n'est rien d'autre que l'orbite de $\Gamma g \quad \Gamma \backslash G$ par l'action de G' sur $\Gamma \backslash G$. Si elle n'est pas fermée, cette orbite passera une infinité de fois au voisinage d'un certain point et aura par conséquent un volume infini.

2.2.3. Définition (Flots sous-algébriques). Un flot sous-algébrique (N, φ) est une réunion finie de telles parties, c'est-à-dire que N est réunion finie de projections de parties de la forme gG' telles que :
i) G' est un sous-groupe de Lie fermé (pas nécessairement connexe) contenant un groupe à un paramètre équivalent à g^t.
ii) La projection de gG' dans M est fermée.

Remarque 1. Dans la définition précédente on ne suppose pas que N est de volume fini.

Remarque 2. Lorsque H est trivial, un flot sous-algébrique est simplement une réunion finie d'orbites fermées dans $\Gamma \backslash G$, de certains sous groupes de G, contenant g^t.

Remarque 3. Une composante connexe d'un flot sous-algébrique est naturellement algébrique (comme flot abstrait) : à l'aide des notations précédentes , on identifie cette composante à $\Gamma' \backslash G'/H'$ avec $H' = G' \cap H$ et $\Gamma' = (g^{-1} \Gamma g) \cap G'$. Le seul point à remarquer, c'est que le groupe à un paramètre inclus dans G' et équivalent à g^t normalise H et par suite H', mais ne les centralise pas (à priori) . On verra plus loin (3.1) qu'on peut en trouver un qui centralise.

2.2.4. Exemple. Voici un exemple qui n'est pas sous-algébrique, à partir duquel on dégagera une notion de flot semi sous algébrique. Soit B $\quad SL(2, Z)$, hyperbolique et à valeurs propres positives. Soit A $\quad SL(4, Z)$, définie par $A(x, y) = (B(x), B(y))$, pour $(x, y) \quad R^2xR^2$. Construisons un groupe à un paramètre $A^t \quad GL(4, R)$ telle que $A^1 = A$, de la façon suivante. D'abord, A étant diagonalisable et à valeurs propres positives, le groupe à un paramètre $C^t = \exp t \operatorname{Log}(A)$ existe bien. Soit u et v deux vecteurs propres (non-colinéaires) de B. Les espaces propres de A sont deux plans P_u et P_v où P_u (resp. P_v) est engendré par (u, 0) et (0, u) (resp. (v, 0) et (0, v)). Considérons un groupe à un paramètre R^t de R^4 qui respecte ces deux plans et qui soit trivial sur P_v et non-trivial sur

P_u. Un tel groupe commute avec C^t. On prendra $A^t = C^t R^t$, qui est donc bien un groupe à un paramètre.

Soit G le produit semi-direct $R^4 \times_{A^t} R$ muni de la multiplication $(x,t)(x',t') = (x + A^t(x'), t + t')$. On considère $g^t = (0,t)$. Soit $G' = (R^2 x\{(0, 0)\}) x_A Z = \{(x,n) / x \ \ R^2, n \ \ Z\}$. Ce G' est un sous-groupe contenant g^1 sans contenir tout g^t (dire que G' contient g^s équivaut au fait que R^2 est invariant par A^s). Notons N' le saturé de G' par le flot : $N' =)\{G'g^t / t \ \ R\}$. On a $N' =)\{G'g^t / t \ \ [0, 1]\}$ car G' contient g^1.

Considérons le tore hyperbolique $M = \Gamma \setminus G$ où $\Gamma = Z^4 x_A Z$. La projection N de N' dans M est une sous-variété compacte plongée, invariante par le flot algébrique déterminé par g^t. Elle n'est cependant pas sous-algébrique car N' n'est pas un sous-groupe de G.

Cet exemple nous amène à la notion suivante :

2.2.5. Flots semi sous-algebriques. Soit G' un sous-groupe fermé de G. Supposons que pour un certain groupe à un paramètre équivalent à g^t, disons pour simplifier g^t lui même, il existe un réel σ ($\neq 0$) tel que $g^\sigma \ \ G'$; et qu'il existe g tel que la projection S de gG' dans M soit fermée. Considérons $N' =)\{gG'g^t / t \ \ R\} =)\{gG'g^t / 0 \leq t \leq \sigma)$. La projection N de N' est une sous-variété fermée invariante.

On a : $N =)\{\varphi^t(S) / t \ \ R\} =)\{\varphi^t(S) / t \ \ [0, \sigma]\}$. Si G' contient un groupe équivalent à g^t, alors S = N et (N,φ) sera sous-algébrique. Sinon S est une section (une transversale globale coupant toutes les orbites) du flot (N,φ). Le flot (N, φ) est alors suspension à temps de retour (constant) diviseur de σ, du difféomorphisme g^σ agissant sur S. Une réunion finie de telle parties sera dite **semi sous algébrique** .

2.2.6. Remarque. On définit les mêmes notions pour les difféomorphismes algébriques. On peut voir dans ce cas qu'une partie semi sous algébrique qui est (une sous-variété) fermée et injectivement immergée (i. e. sans self intersection) et connexe est nécessairement sous-algébrique.

2.3.1. Théorème B. Soit (M, φ) un flot d'Anosov algébrique et N M une partie invariante (pas nécessairement fermée). Supposons que N est une sous-variété (immergée) de classe C^1 et de volume fini. Alors $(\overline{N}, \varphi)$ est un flot semi sous algébrique où $\overline{N}$ est la fermeture de N. De plus N est ouvert dans $\overline{N}$. En fait $(\overline{N}, \varphi)$ est sous-algébrique dès qu'il n'est pas une suspension.

2.3.2. Remarque. On peut montrer que $(\overline{N}, \varphi)$ est en fait sous-algébrique si l'endomorphisme structural $ad(\alpha)$, de (M, φ) est à spectre réel.

2.3.3. Remarque. D'après le théorème, ($\overline{N}$, φ) est en fait sous-algébrique dès qu'il n'est pas une suspension. C'est donc la projection d'une partie de G de la forme gG', avec G' un sous-groupe de G contenant un groupe à un paramètre équivalent à g^t. On remarque à partir de la preuve qu'on peut choisir G', contenant le groupe à un paramètre g^t lui-même. La même remarque est valable dans le cas où l'endomorphisme structural de (M, φ) est à spectre réel.

2.3.4. Remarque. Le même résultat est vrai pour les difféomorphismes algébriques. On déduit de 2.2.6 que lorsque N est fermée et injectivement immergée alors elle est sous-algébrique.

2.3.5. Remarque. Sachant que N est semi sous algébrique, il sera ensuite naturel de se demander quels sous-groupes G' (figurant dans la définition de semi sous algébrique) peuvent se présenter ? On ne s'intéresse pas ici à cette question, mais remarquons les deux cas suivants. Pour G = R^n, il est trivial que la composante neutre de G' est un sous espace linéaire. Ceci permet à l'aide de 2.2.6 et 2.3.2 de retrouver le théorème de Franks et Mañé cité dans l'introduction (1.3). Le second cas est celui du flot géodésique d'une variété localement symétrique et de courbure négative (3.2). On montre dans $[Zeg]_2$ qu'alors $\overline{N}$ est réunion finie de fibrés unitaires tangents de sous-variétés géodésiques dans notre variété.

2.3.6. Extensions du théorème B.

Le théorème B admet des variantes qui se démontrent de la même façon:

Théorème B' (version rectifiable). Supposons dans le théorème B que N est simplement un sous-ensemble rectifiable de dimension p (voir [Fed]). Alors il existe un flot semi sous algébrique ($\overline{N}$, φ) tel que $\overline{N}$ -N soit négligeable au sens de la mesure de Hausdorff de dimension p.

Théorème B" (version topologique). Le théorème B est vrai si l'on remplace le fait que N est de volume fini par l'hypothèse que (N, φ) est non errant.

2.4. Idée de la preuve du théorème B.

La preuve du théorème B se fait essentiellement grâce aux théorèmes A et 7.4. Voici une preuve succincte dans le cas particulier où N est C^∞ et l'endomorphisme structural du flot algébrique sur $\Gamma\backslash G$ est R- semi-simple (diagonalisable et à spectre réel) qui reprend en fait de façon simplifiée les idées de ces deux derniers théorèmes.. Dans ce cas N sera en fait sous-algébrique.

2.4.1. Notations. Soit $N \quad \Gamma \backslash G/H$, vérifiant les hypothèses du théorème A. Notons $M' = \Gamma \backslash G$, φ le flot algébrique dessus et $N' \quad M'$ l'image réciproque de N. Soit e le point base de M' correspondant à l'élément neutre de G. Pour $x \quad M'$ soit H_x : $T_xM' \to T_eM' = G$, l'identification canonique (par translation à gauche). Soit d un entier et $Gr^d(G)$ la Grasmannienne des d-plans de G et P^t le flot dessus, déterminé par $Ad(g^t) = \exp(t\, ad\alpha)$.

2.4.2. Tout point récurrent de ($Gr^d(G), P^t$) est un point fixe (par P^t). En particulier toute mesure invariante est à support dans l'ensemble des points fixes .

Preuve. Ceci provient de la R-semi-simplicité de $ad(\alpha)$ (voir 7.5.2).

2.4.3. Application de Gauss. Considérons l'application :

$$G_0 : N' \longrightarrow Gr^d(G)$$
$$x \longrightarrow H_x(T_xN') .$$

Cette application est équivariante : $G_0\varphi^t = P^tG_0$ (ce genre d'applications de Gauss ont été introduites et utilisées dans [Mar] et [Zim]).

2.4.4. G_0 est ϕ'-invariante: En effet , d'après le théorème A, une mesure de Lebesgue finie sur N' est conservée. presque tout point de N' est donc récurrent. Son image par G_0 l'est également par équivariance. On conclut à l'aide de 2.4.2.

2.4.5. Cas où G_0 est constante. Le programme est alors terminé. En effet cela veut dire que le plan tangent à N' est invariant par le parallélisme de $M' = \Gamma \backslash G$. On en déduit que N' est une partie ouverte d'une translatée gG' d'un sous-groupe de G (voir 7.3.3).

2.4.6. Cas où G_0 n'est pas constante. Considérons l'ouvert U_1 où le rang de G_0 est minimum. Les niveaux de G_0 restreinte à U_1 sont des sous-variétés C^∞, de dimension, disons d_1. Par φ-invariance de G_0, ces sous-variétés sont φ-invariantes.

Pour pouvoir réappliquer la construction précédente à une de ces sous-variétés, il faut s'assurer qu'elle est de volume finie. Ce n'est à priori pas le cas en général. On regardera donc plutôt toutes ces sous-variétés comme définissant un feuilletage G_1 de U_1 et on définira une application de Gauss pour ce feuilletage : $G_1 : N' \longrightarrow Gr^{d_1}(G)$

$$x \longrightarrow H_x(T_xG_1(x)) .$$

Cette construction s'itère et s'arrêtera au bout d'un certain temps n. On obtiendra alors un ouvert U_n muni d'un feuilletage φ-invariant G_n. L'application de Gauss le long d'une feuille est constante. Une telle feuille est donc sous-algébrique (2.4.5).

2.4.7. Une feuille de G_n se projette surjectivement sur N. En particulier N est sous-algébrique (ce qui achèvera la preuve).

Preuve. Remarquons en effet que les feuilles de G_n sont fermées dans U_n car elles sont composantes connexes de niveaux de fonctions continues. Ainsi la partition définie par G_n est moins fine que la décomposition ergodique de (N',φ'). Pour conclure il suffit de montrer que les composantes ergodiques de (N',φ') se surjecttent sur N. Or par H-invariance de φ', la décomposition ergodique de (N',φ') se projette sur celle de (N,φ). Mais (N,φ) est ergodique comme tout flot d'Anosov respectant la mesure de Lebesgue (le fait que (N,φ) soit un flot d'Anosov provient du fait que (M,φ) l'est, et de la conservation du volume. Ceci est un résultat classique [Hir, Pug] qui sera précisé au §9.1).

§3. Exemples de flots autonomes.

3.1. Flots algébriques (notations de 1.1 et 1.2). Les flots algébriques sont naturellement autonomes d'après 1.1. Quand on parle d'un flot algébrique en tant que flot autonome on entend qu'il s'agit du transport parallèle de 1.1. Le flot (resp. l'endomorphisme) structural au point de $M = \Gamma \backslash G / H$, projection de l'élément neutre de G, est égal à $Ad(g^t)$ (resp. $ad(\alpha)$) agissant sur le quotient G / H, où G et H sont les algèbres de Lie respectivement de G et H.

Remarque. On définit parfois les flots algébriques de type localement homogène en supposant simplement que le groupe à un paramètre g^t **normalise** H: $g^tH = Hg^t$. Montrons que dans ce cas on peut toujours trouver un groupe à un paramètre équivalent g'^t (2.3.1), **centralisant** H et par suite définissant le même flot sur $\Gamma \backslash G/H$. Soit K le sous groupe (de Lie immergé) engendré par H et g^t. Dire que g^t centralise H signifie que dim K = dim H + 1 (le cas dim K = dim H signifie que le flot est trivial). Considérons une métrique sur K (l'algèbre de Lie de K), Ad(H)-invariante. La direction orthogonale à H pour une telle métrique est Ad(H)- invariante. Un vecteur dans cette direction est également Ad(H)-invariant par connexité de H (qu'on a le droit de la supposer pour simplifier). Cela signifie qu'il commute avec tous les éléments de H. Choisissons le de façon qu'il soit de même projection que α (i.e. l'élément de G déterminant g^t) dans K / H. Le groupe à un paramètre ainsi défini répond à la question.
Ainsi tout choix d'un groupe à un paramètre tel que g'^t rend notre flot (algébrique), autonome. Un autre choix de g'^t déterminera un transport parallèle éventuellement différent.

3.2. Flots géodésiques [Ebe]. Soit V une variété riemannienne, $M = T^1 V$ son fibré unitaire tangent et φ le flot géodésique sur M. Soit $\pi = M \to V$ la projection.
Pour tout u $M = T^1V$, $T_u M$ admet un scindement naturel : $T_u M = H_u + V_u$ en espaces horizontal et vertical. L'horizontal s'identifie par projection à T_xV et le vertical s'identifie à l'hyperplan de T_xV orthogonal à u. Il existe une métrique naturelle sur M pour laquelle M $\overset{\pi}{\to}$ V est une fibration riemannienne dont l'horizontal est justement l'horizontal considéré (i. e. la projection restreinte à H_u est isométrique), et telle que V_u soit munie de la structure euclidienne déduite de l'identification précédente avec un hyperplan de T_xV (pour tout u M).
Soit $x(t) = \pi(\varphi^t(u))$ la géodésique définie par u. Soit (h,v) T_u M, h(t) et v(t) les transportés parallèles le long de x(t) de h et v (après identifications). On définit :

$$\mathbf{T^t (h,v) = (h (t), v(t)).}$$

Affirmation. T est un flot fibré isométrique au dessus du flot géodésique. On l'appelle le **transport parallèle usuel**. Û

Proposition. Le flot géodésique est autonome par rapport au transport parallèle usuel si et seulement si la variété est localement symétrique.

Preuve. Soit u $M = T^1 V$ et $x(t) = \pi(\varphi^t(u))$ la géodésique qu'il détermine et x = x (0). Soit $\tau^t : T_xV \to T_{x(t)}V$ le transport parallèle le long de x(t) et $B_u(t)$ l'endomorphisme de T_xV défini par : $B_x(t)(J) = R(c'(t), \tau^t J)\, c'(t)$ où R est le tenseur courbure et J T_yV.
Par définition un champ de Jacobi le long de x(t) s'écrit : $\tau^t J(t)$ où J(t) est solution (dans l'espace vectoriel T_xV) de l'équation $J''(t) = B_x(t) J(t)$ (par abus de langage on dit parfois que J(t) lui même est un champ de Jacobi).
La relation entre les champs de Jacobi et la dynamique infinitésimale du flot géodésique se traduit par le fait suivant : si (J_0, J'_0) $H_u + V_u = T_u M$, alors la projection dans TV de $D\varphi^t(J_0, J'_0)$ est un champ de Jacobi dont les conditions initiales sont (J_0, J'_0). De plus la projection verticale (i.e. sur V) de $D\varphi^t(J_0, J'_0)$ s'identifie avec la dérivée covariante de ce champ par rapport à x'(t). Ceci équivaut à dire que les courbes $t \to T^{-t}D\varphi^t(J_0, J'_0)$, quand (J_0, J'_0) $H_u + V_u$, sont les solutions dans l'espace des phases de l'équation $J''(t) = B_x(t) J(t)$. Tout cela rend clair le fait suivant (voir 1.3):

Affirmation. Le flot géodésique est autonome par rapport au transport parallèle usuel si et seulement si pour tout x M, $B_x(t)$ ne dépend pas de t.

Or pour une variété localement symétrique le tenseur R est parallèle (i.e. le tenseur R reste constant quand on l'applique à quatre champs de vecteurs parallèles le long de n'importe quelle courbe). Il s'ensuit que $B_u(t)$ est indépendant de t, et par suite que le flot géodésique est autonome par rapport au transport parallèle usuel.

Pour montrer la réciproque, c'est-à-dire que l'autonomie implique la symétrie locale, considérons la symétrie géodésique S autour de x :

$$S(\exp tu) = \exp(-tu), \text{ pour } u \quad T^1_x V \text{ (exp dénote l'exponentielle en x).}$$

Soit $x_1 = \exp t_0 u$ et $x_2 = S(x_1) = \exp - t_0 u$. Le calcul de $D_{x_1}S$ se fait à l'aide de champs de Jacobi comme pour celui de l'application exp en x. On considère des champs de Jacobi le long de la géodésique déterminé par u qui sont nuls en t = 0. Si J(t) est un tel champ, alors : $D_{x_1}S\ (J(t_0)) = J(-t_0)$. Or, après transport parallèle J(t) est solution d'une équation autonome $J'' = B_u J$ (B_u indépendant du temps par hypothèse) avec J(0) = 0. Il en résulte que : J(- t) = - J(t). En particulier $\|D_{x_1} S\ (J(t_0))\| = \|J(t_0)\|$. Par conséquent S est une isométrie locale et par définition V est localement symétrique. Û

Au cours de la preuve on a trouvé l'endomorphisme structural qui est $A_x\ (h,v) = (v, R(x, h)x)$.

Remarque.1. L'endomorphisme structural ne dépend pas de x, à conjugaison isométrique près, si et seulement si la variété est localement isotrope. Le flot géodésique est algébrique exactement dans ce cas. Pour le voir rappelons [Wol] que les espaces localement symétriques et localement isotropes sont soit localement euclidien soit de rang 1 (i.e. à courbure soit strictement positive soit strictement négative). On vérifie directement que leurs flots géodésiques sont algébriques. Les autres espaces sont de rang supérieur à 1. Ils possèdent nécessairement des vecteurs réguliers pour lesquels le rang de B_u est maximum, et d'autres qui ne le sont pas [Hel].

Remarque.2. Flots géodésiques sur les fibrés de Stiefel des repères. Sur $St^k(V)$, le fibré de Stiefel des k-repères (orthonormés) de V, il y a un flot géodésique qui consiste à translater le premier vecteur suivant sa géodésique et translater parallèlement les autres. Il y a également une métrique naturelle et un transport parallèle définis de la même manière que pour T^1V. Il est toujours vrai qu'un tel flot géodésique est autonome par rapport à ce transport parallèle si et seulement si la variété est localement symétrique.

3.3. Dimension deux. On peut montrer qu'un flot autonome non singulier sur un surface compacte (i.e. un tore) est à un changement affine du paramètre près, un flot d'isométries (au sens de la métrique qui le rend autonome). Cela veut dire si φ^t est notre flot, alors il existe une fonction a constante le long des orbites, telle que le flot $\psi^t(x) =$

$\varphi^{a(x)t}(x)$ est isométrique. L'idée de la preuve est la suivante. Notons X le champ tangent à notre flot et Y un champ orthogonal à X. On montre directement ou à l'aide de 7.4 que X (et par suite Y) est invariant par transport parallèle. Ainsi le repère (X, Y) détermine une trivialisation invariante par le transport parallèle, du fibré tangent à T^2. Dans cette trivialisation la matrice de $D_x\varphi^t$ a la forme : $\begin{pmatrix} 1 & t\lambda(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par autonomie de φ, $\lambda(x)$ est constante le long des orbites. Si a est une fonction φ-invariante, alors $\psi^t = \varphi^{ta(x)}$ est également autonome. Il suffit pour cela de vérifier que la matrice de $D_x\psi^t$ dans la trivialisation précédente est constante le long des orbites.
Maintenant, le flot φ conserve le volume (théorème A), ces orbites sont soit toutes denses soit toutes périodiques (car on est sur un tore).
Dans le premier cas λ est constante. On a : $[X, Y] = -\lambda X$. Ainsi les flots de X et Y définissent une action localement libre d'un groupe G sur T^2. Donc T^2 est un quotient de G. Or lorsque $\lambda \neq 0$, G est le groupe affine qui n'admet pas de quotient compact (car il n'est pas unimodulaire). Donc nécessairement $\lambda = 0$. Par conséquent φ^t est isométrique car la matrice de $D_x\varphi^t$ est la matrice unité.
Dans le cas périodique on prendra a(x) = période de x (pour φ). Donc ψ^1 = identité. Donc la matrice de $D_x\psi^t$ (de la même forme que celle de $D_x\varphi^t$) est la matrice unité pour tout t. Le flot ψ est donc bien isométrique.

3.5. Flots sur $\mathbf{R}^n$. Partons du transport parallèle usuel sur R^n , quels sont les flots qui sont autonomes par rapport à ce transport parallèle ? Soit φ un tel flot. L'autonomie signifie que pour tout x, $D_x\varphi^t$ est un groupe à un paramètre (de matrices). Il revient au même à dire que la relation $D_x \varphi^{t+s} = D_{\varphi^t(x)} \varphi^s . D_x\varphi^t$ devient (dans le cas autonome) $D_x\varphi^{t+s} = D_x\varphi^s . D_x\varphi^t$. Il est aussi équivalent de dire que $D\varphi^s$ (pour s fixé) est constant le long des orbites. Les flots affines, i. e. défini par un champ X(x) = A(x) + b (A matrice, b R^n) sont évidemment autonomes. Voici un exemple différent sur R^3.

$$\varphi^t(x, y, z) = (x + t\, u_1(z), y + t\, u_2(z), z)$$ (u_1 et u_2 sont des fonctions de z).

On calcule $D\varphi^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s\,u_1'(z) \\ 0 & 1 & s\,u_2'(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cela ne dépend que de z, donc constant sur les orbites qui sont des droites contenues dans des plans parallèles à $R^2 \times 0$.

3.6. Construction générale : pseudo-groupe d'isométries locales conservant un flot . Soit (M, φ) un flot et G un pseudo-groupe de Lie d'isométries locales de M [Mol] commutant avec φ (par exemple le pseudo-groupe de toutes les isométries locales respectant φ). Supposons que G agit **transitivement sur les orbites de** ϕ, c'est-à-dire que l'orbite par G d'un point (quelconque) contient son orbite par φ. On va montrer :

Affirmation. La restriction de φ à un ouvert dense invariant par φ et G, est naturellement autonome (mais pas de façon unique).

Lorsque M est compacte, cette construction paraît la plus générale possible:

Question. Tout flot autonome sur une variété compacte est construit de la façon précédente (c'est-à-dire qu'il est respecté par un pseudo-groupe d'isométries agissant transitivement sur ses orbites) ? En d'autres termes , les isométries infinitésimales (1.1) définies par le transport parallèle s'intégrent-elles bien ?...

Preuve de l'affirmation.

3.6.1. Supposons que G agit librement. Cela veut dire que si un élément de G fixe un point x de M, alors il fixera tous les points d'un voisinage de x. C'est par exemple le cas d'un flot algébrique de type homogène où G est le pseudo-groupe des translations (locales) à gauche (ce n'est pas nécessairement le pseudo-groupe de toutes les isométries conservant φ). Soit x M et $y = \varphi^t(x)$. Il existe g G unique, tel que $g(x) = y$. On prend pour transport parallèle $T_x^t = D_x g : T_x M \rightarrow T_y M$. On vérifie que φ est bien T-autonome (l'ouvert ici est M entier).

3.6.2. Cas où G n'agit pas librement. On considère M' **Erreur!**

Il s'agit maintenant de relever φ dans M'? Considérons par exemple φ'', le relèvement horizontal (au sens de la connexion de M). Le flot de φ'' consiste à translater parallèlement le repère (élément de M') le long de la trajectoire de sa projection. Il n'est cependant pas certain que G agisse transitivement sur les orbites de φ''. On corrige ceci de la façon suivante : pour x' M, considérons $L_{x'}$ l'espace tangent à l'orbite de G en x' et $L'_{x'}$ le sous-espace de $L_{x'}$ des éléments dont la projection par $d\pi$ est colinéaire à φ. Prenons φ' la projection de φ'' sur L' et φ' le multiple de φ' qui se projette exactement sur φ. Maintenant G agit bien transitivement sur les orbites de φ'. Par H-invariance de tous, le transport parallèle descend à (M, φ). Le seul point à remarquer est que φ' n'est pas nécessairement continu (car la dimension de L' n'est pas nécessairement constante)! Il l'est sur l'ouvert dense où la dimension du groupe d'isotropie (de G dans M) est localement constante. Le flot φ est donc autonome sur cet ouvert. Ù

Remarque. Il semble qu'une analyse plus fine au voisinage des orbites singulières de G (où la dimension du groupe d'isotropie est maximale) permettrait de montrer qu'en fait on peut trouver un relèvement global de φ, tangent à L et aussi régulier que φ lui même. Le flot φ serait ainsi autonome (sur M).

3.7. "Somme" des flots sur un espace homogène. Soit G un groupe de Lie. On va insérer tous les flots de translations à droite sur G en un même flot autonome. Ces flots peuvent être paramétrés par l'algèbre de Lie G de G. Soit M = G x G et $\phi^t(\alpha,x) = (\alpha, x \exp t\ \alpha)$. Le groupe G agit librement sur M par $g(\alpha,x) = (\alpha, gx)$. Cette action respecte φ. On a donc bien un flot autonome d'après 3.6.1.
D'autres variantes de ce flot s'obtiennent, en prenant une partie de l'algèbre de Lie, en changeant de paramétrage de l'ensemble des flots, en considérant un quotient $\Gamma \setminus G$ ainsi qu'en considérant si possible des quotients $\Gamma \setminus G / H$.

Application. Pour une variété $\Gamma \setminus G$, appelons courbe ombilic généralisée toute orbite d'un flot algébrique sur $\Gamma \setminus G$ (i. e. la projection dans $\Gamma \setminus G$ d'une courbe $t \to xg^t$ où g^t est un groupe à un paramètre de G). Un flot ombilic généralisé sur $\Gamma \setminus G$ est un flot dont les orbites sont des courbes ombilics généralisées. Ceci détermine un sous ensemble invariant du flot "somme de tous les flots algébriques sur $\Gamma \setminus G$" qui s'obtient comme précédemment en remplaçant G par $\Gamma \setminus G$. Ce sous-ensemble est une sous-variété C^1 et compacte si le flot est C^1 et $\Gamma \setminus G$ est compacte. Appliquons le théorème A à cette sous-variété. On obtient :

Théorème. Un flot ombilic généralisé de classe C^1 sur une variété compacte de type $\Gamma\setminus G$, conserve une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue.

Ce résultat s'étend aux feuilletages ombilics généralisés (i. e. dont les feuilles sont projections de parties de la forme xG', où G' est un sous-groupe de G) des variétés localement homogènes de type $\Gamma \setminus G / H$. Ces feuilletages conservent des mesures transverses équivalentes à la mesure de Lebesgue sur les transversales.

3.8. Les flots ombilicaux des variétés à courbure constante. Les flots ombilics (classiques) qu'on va discuter sont une variante de la construction précédente, qui nous permet ainsi d'avoir un exemple très intéressant de flot autonome.
Soit V une variété (complète) à courbure constante et α un réel non négatif. Soit M' = $St^2(V)$, la variété de Stiefel des 2- repères orthonormés tangents à V. On va définir ci-dessous sur M' un flot φ_α qu'on appellera flot α-ombilical. Tous ces flots ombilicaux peuvent se mettre ensemble dans $M = R^+ \times St^2(V)$, $\phi^t(\alpha,x) = (\alpha, \varphi_\alpha^t(x))$.

3.8.1. Construction de ϕ_α. Soit $x = (e_1, e_2)$ $St^{\,2}(V)$. Cela définit un 2-plan P_x, géodésique dans V. Supposant pour simplifier que V est simplement connexe de façon que P_x soit bien plongé. L'orbite de x par φ_α va être dans $St^{\,2}(P_x)$ $St^{\,2}(V)$. Sa projection dans P_x est un cercle de courbure α. Si c(t) est la projection de $\varphi^t_\alpha(e_1, e_2)$ = $(e_1(t), e_2(t))$ alors $c'(t) = e_1(t)$ et $c''(t) = \alpha e_2(t)$.

Remarque.1. les flots (M',φ_α) sont en fait algébriques. Leurs transports parallèles peuvent s'expliciter géométriquement.

Remarque.2. Lorsque V est hyperbolique, le flot (M,φ) contient aussi bien un comportement hyperbolique (partiel), qu' horocyclique (unipotent) ou elliptique. Soit I un intervalle compact de R^+. On peut faire le double de I x $St^{\,2}(V)$ pour avoir un flot autonome "intéressant" sur une variété (compacte sans bord si V l'était).

§ 4. Conservation du volume. Preuve du théorème A.

Commençons par la construction suivante :

4.1. Flots fibrés linéaires associés. A un flot fibré linéaire autonome, on peut associer d'autres flots naturellement autonomes tels ses puissances extérieures. Soit donc (E, M, φ, F) un flot fibré linéaire T-autonome. Considérons le fibré $\Lambda^p E$, $p^{\text{ième}}$ puissance extérieure de E. Les flots $\Lambda^p F^{\,t}$ et $\Lambda^p T^{\,t}$ agissent dessus. Le dernier agit isométriquement pour la métrique naturelle associée à celle de E. Il est clair que $(\Lambda^p E\ M, \varphi, F)$ est $\Lambda^p T$-autonome. Cette construction se généralise à d'autres flots fibrés associés qui seront donc naturellement autonomes.

Remarque. L'intérêt de cette construction dans la présente preuve ainsi que dans d'autres circonstances montre que le cadre naturel de l'autonomie est bien les flots fibrés linéaires (1.1). Ceci marque une différence avec les flots algébriques qui ne se définissent que pour les flots tangents.

4.2. Preuve du théorème A. Soit (M,φ) un flot autonome. Considérons le flot fibré linéaire autonome $p^{\text{ième}}$ puissance extérieur du flot tangent : $(E = \Lambda^p TM, M, \varphi, F = \Lambda^p(D\phi))$. Notons S^t_x et A_x ses flots et endomorphismes structuraux en x M. Soit E^+_x, E^-_x et E°_x les sous-espaces de E_x correspondants au valeurs propres à parties réelles respectivement positives, négatives et nulles de A_x.
Soit N une sous- variété C^1 de dimension p de M. Supposons pour simplifier que N est orientée (le cas non-orientable ne demande qu'un peu plus de notations). L'espace tangent

T_x N détermine un p-vecteur unitaire (décomposable) n(x) $\Lambda^p T_x M$: si $\{e_1,\dots.e_p\}$ est une base orthonormée positive de T_xN, alors $n(x) = e_1\Lambda\dots\dots\Lambda e_p$.

Le Jacobien de φ^t / N vérifie: $\mathbf{Jac(\phi_x^t\ /\ N) = ||F^t.n(x)||}$**.** Il est aussi égal à $\mathbf{||S_x^t\ n(x)||}$, car le transport parallèle est isométrique.

Affirmation.1 (partie exponentielle)**.** On a : n(x) $\overset{\circ}{E}_x$. Autrement dit si n(x) se décompose $n(x) = n^0(x)+n^+(x)+n^-(x)$, alors $n^+(x) = n^-(x) = 0$.

Preuve. Sinon dans un voisinage U d'un certain point générique x_o N (où les choses sont continues), les parties réelles positives des valeurs propres de S_x^t sont supérieures à un certain ε. Donc au voisinage de x_0 si v $\overset{+}{E}_x$, $||S_x^t(v)|| \geq c.e^{t\varepsilon}||v||$ pour une constante c. Donc $Jac(\varphi_x^t\ /\ N) \geq c'.e^{t\varepsilon}||n^+(x)||$ (la constante c' est égale à c si les espaces propres de S_x^t étaient orthogonaux...). Donc $vol(\varphi^t(U)) \geq c'e^{\varepsilon t} \int_U ||n^+(x)||$. Le volume de N étant fini, on en déduit que $n^+(x) = 0$. On fait de même pour $n^-(x)$. Û

Sur $\overset{\circ}{E}_x$, on a: $A_x / \overset{\circ}{E}_x = B_x + N_x$ où B_x est semi simple (à valeurs imaginaires pures par définition de $\overset{\circ}{E}_x$) et N_x est nilpotent. On a : $\exp(tA_x)n(x) = \exp(t B_x).\exp(tN_x)n(x)$.

Affirmation. 2 (partie nilpotente). On a : $\exp(tN_x)(n(x)) = n(x)$ (pour tout x).

Preuve. Dans un voisinage compact d'un point x_0 , $||\exp tA_x(n(x))||$ est équivalent à $||\exp(t N_x)(n(x))||$ car $\exp(t B_x)$ est à valeurs propres imaginaires. Or $||\exp(t N_x)(n(x))||$ se comporte comme la racine carrée d'un polynôme. On en déduit en utilisant la finitude de Vol(N) comme auparavant, que ce polynôme est en fait de degré 0. Ceci équivaut à dire que $\exp(t N_x)(n(x)) = n(x)$.
Û

Ainsi si $A_x / \overset{\circ}{E}_x$ est à spectre réel, auquel cas $B_x = 0$, on a : $S_x^t\ n(x) = n(x)$. En particulier (N,φ) préserve le volume. C'est le cas par exemple si N = M car alors dimE=1. C'est également le cas si l'endomorphisme structural du flot lui même est à spectre réel.

Affirmation. 3 (partie elliptique). Pour tout x N, soit ρ(x) = $\lim t^{-1} \int_0^t Jac(D_x\varphi^s)ds = \lim t^{-1} \int_0^t ||S_x^s n(x)||\ ds = \lim t^{-1} \int_0^t ||(\exp(s\ B_x))(n(x)||ds)$.

Alors ρ(x) existe partout. la fonction ρ est bornée le long des orbites et intégrable par rapport à la mesure riemannienne dm. La mesure ρdm est préservée par (N,φ).

Preuve. Montrons l'existence de $\rho(x)$. Notons $v_0 = n(x)$ et T la fermeture $\{\exp(t A_x)v_0 / t \quad R\}$. C'est un tore, et $\psi^t = \exp(t A_x)$ y induit un flot linéaire irrationnel.

Notons $f(v) = \|v\|$, alors $\rho(x) = \lim t^{-1} \int_o^t f(\psi^s v_0)ds$. Par unique ergodicité cela vaut : $(Vol(T))^{-1} \int_T f$. L'invariance de ρdm résulte de l'égalité $\rho(x) = \lim t^{-1} \int_o^t Jac(D_x\varphi^s)ds$. Il résulte également de cette formule que $\int \rho dm = \int dm = \quad Vol(N)$. Û

La preuve du théorème A est ainsi achevée. Ù

4.3. Changement du transport parallèle. La discussion suivante intéressante en elle-même montre que pour un flot autonome, on peut "toujours" se ramener au cas où l'endomorphisme structural est à spectre réel ". Elle fournira donc une autre méthode pour traiter la partie elliptique dans le théorème B. Soit donc (E, M, φ, F) un flot fibré linéaire T-autonome. Soit L un groupe à un paramètre d'endomorphismes de E au-dessus de l'identité, c'est-à-dire que $L^t : E_x \to E_x$ pour tout t. Considérons $T'^t = T^t L^t$.

Affirmation. Si L commute avec T, alors T' est un flot fibré linéaire au dessus de (M,φ). Si de plus L commute avec S_x^t pour tout x M, alors T' commute avec F. Û

Exemple. L'endomorphisme structural A_x se décompose en $A_x = B_x+N_x$ où B_x est semi- simple et N_x est nilpotent. La partie semi simple B_x s'écrit $B_x = D_x + R_x$ où D_x est diagonal (réel) et R_x (rotation) est à spectre imaginaire pur. Considérons $L_x^t = \exp t R_x$, alors F commute avec le T' construit comme ci dessus. Le flot structural devient $S'_x{}^t = \exp(tA'_x)$, avec $A'_x = D_x+N_x$, en particulier A'_x est à spectre réel. La partie elliptique R_x étant conjuguée à une matrice antisymétrique, on peut donc rendre L_x^t isométrique pour une métriqure sur E_x. Lorsque x varie, cette métrique ainsi que T' ne sont pas "vraiment" continus. Ils sont aussi réguliers que S_x^t aux points génériques. On a ce cas particulier

Proposition. Si la décomposition en sous-espaces propres de l'endomorphisme structural est continue alors il existe un transport parallèle T', isométrique pour une métrique équivalente à celle du départ. Le flot F est T'-autonome. L'endomorphisme structural de F par rapport à T' est à spectre réel. Û

Retour à la preuve du théorème A. On considère le flot fibré linéaire autonome restreint (TM/N, N, φ, $D\varphi$). Maintenant on remarque qu'il n'est pas gênant pour la preuve du théorème B de considérer des métriques comme ci-dessus (qui ne sont pas vraiment continues).

4.4. Remarque. Il est facile de généraliser le théorème B à des flots "peu autonomes". Ces flots se construisent comme des relèvements, projections ou somme de flots autonomes...

§5. Lipschitz-ergodicité

Cette notion, certainement classique, de Lipchitz-ergodicité qu'on va introduire et caractériser dans ce § sera d'un grand intérêt pour la suite. Soit donc (M, φ) un flot (quelconque).

5.1. La relation F. Considérons la relation : x F y si et seulement si pour toute fonction $f : M \to R$, Lipschitz et invariante par φ ($f\varphi^t = \varphi^t f$ pour tout t) on a $f(x) = f(y)$. Les classes d'équivalences, qui sont fermées dans M seront appelées composantes Lipchitz-ergodiques. Le flot sera dit Lipchitz-ergodique si F est triviale.

Remarque. Appelons relation de type F (fonctionnelle) toute relation obtenue en remplaçant les fonctions lipschitz par des fonctions d'une certaine classe de régularité. Par exemple pour les fonctions mesurables on retrouve l'ergodicité classique. Pour notre propos, la Lipschitz-ergodicité semble pertinente.

5.2 Chaînes. Une chaîne (non orientée) est une suite $c = (x_i, t_i)$, $i = 0,.., n$ où x_i M, t_i R et telle que $t_n = 0$. On dit qu'elle relie x_o à x_n. Considérons $x'_i = \varphi^{t_i} x_i$ et $\varepsilon_i = d(x'_i, x_{i+1})$, (d étant la distance dans M). Les ε_i (petits) sont appelés les **oscillations** de c. On appellera **oscillation totale** de c le nombre $0(c) = \Sigma\, \varepsilon_i$.

5.3. La relation G. Considérons la relation : x G y si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe c, chaîne reliant x à y telle que $0(c) < \varepsilon$. C'est bien une relation d'équivalence.

Lemme. x G y x F y (G est plus fine que F)

Preuve. Soit $f : M \to R$, l-Lipshitz et invariante. Soit c une chaîne reliant x à y. On a $|f(x_i) - f(x_{i+1})| = |f(x'_i) - f(x_{i+1})| \leq l.\varepsilon_i$. Donc $|f(x) - f(y)| \leq l\, \Sigma\varepsilon_i = l\, 0(c)$. Par suite xG y entraîne $f(x) - f(y) = 0$.
Û

5.4. Une semi-distance . Considérons sur M x M la fonction

$$\rho(x,y) = \inf \{0(c), c \text{ reliant } x \text{ à } y\}$$

Affirmation. On a :

i) $\rho(x,y) \leq d(x,y)$ (Il suffit de prendre la chaîne triviale $c = \{(x,0), (y,0)\}$.

ii) ρ est une semi-distance,

iii) $\rho(x,y) = 0$ si et seulement si x G y.

Û

vi) ρ détermine une distance $\bar{\rho}$ sur l'espace quotient M / G.

5.5. Proposition . On a : F = G.

Preuve. Soit x M. Considérons $f(y) = \rho(x,y)$. D'après l'affirmation précédente on a : $|f(y) - f(z)| = |\rho(x,y) - \rho(x,z)| \leq \rho(y,z) \leq d(y,z)$. Donc f est Lipschitz et invariante. Maintenant si y n'est pas G équivalent à x alors $f(x) = 0$ et $f(y) \neq 0$ c'est-à-dire que y n'est pas F équivalent à x. Donc F est plus fine que G. On conclut à l'aide du lemme précédent . Û

5.6. Remarque. Au lieu de l'oscillation totale $\Sigma\varepsilon_i$, on peut considérer d'autres quantités telles que $\Sigma a(\varepsilon_i)$ où a est une fonction réelle positive. On obtient alors d'autres relations qu'on appellera de type G (géométriques) et d'autres semi-distances si a est sous-additive . Il est intéressant de traduire des relations de type F par des relations de type G et vice versa.

5.7 Proposition. On a : $\rho(x,y) \leq d(x, C(y)) = \inf \{d(x,y') / y' \quad C(y)\}$ où C(y) est la composante lipschitz-ergodique de y. (Cette proposition sera utilisée au §6)

Preuve. Soit y' C(y) tel que $d(x,C(y)) > d(x,y') - \varepsilon$. On relie x à y par une chaîne obtenue en composant, d'abord une chaîne d'oscillation d(x, y') (et de longueur 1) joignant x à y', et ensuite une chaîne d'oscillation ε joignant y à y'. Donc $\rho(x, y) < d(x, C(y)) + 2\varepsilon$. Par suite $\rho(x, y) \leq d(x, C(y))$, puisque ε est arbitrairement petite. Û

§6. Holonomie.

Dans ce § on se donne (E, M, φ, T) un flot fibré linéaire isométrique au dessus de (M,φ) (on ne considère plus le flot compagnon (E,M,φ,F)). On suppose T Lipschitz (1.2.2) Le transport parallèle T, mène d'une fibre E_x à une fibre E_y d'un point y sur l'orbite de x. On va utiliser "la récurrence" de (M,φ) pour trouver plus de moyens de transport (idéaux) entre des points pas nécessairement sur les mêmes orbites.

6.1. Transport parallèle le long d'une chaîne. Soit $c = (x_i, t_i)$ une chaîne reliant deux points x et y. Notons $\varepsilon_i = d(x_i, x_{i+1})$ et $x'_i = \varphi^{t_i} x_i$. Pour trouver un moyen d'aller de x'_i à x_{i+1}, trivialisons localement, de façon Lipschitz le fibré E. On a donc des identifications (presque isométriques) $f_i : E_{x'_i} \to E_{x_{i+1}}$.

Considérons le "transport approximatif". $R_c = f_n \circ T^{t_n} \ldots f_1 \circ T^{t_1} : E_x \to E_y$.

Le lemme suivant se démontre par récurrence sur la longueur n de c :

Lemme. Considérons une autre trivialisation dont la transition à la trivalisation initiale est l -lipschitz c'est à dire qu'elle est définie par des identifications f'_i telles que $\|f'_i - f_i\| \leq l\, d(x'_i, x_{i+1}) = l\, \varepsilon_i$. Alors le transport parallèle approximatif R'_c qu'elle détermine vérifie $\|R_c - R'_c\| \leq l\ 0(c)$ où $0(c) = \Sigma \varepsilon_i$ est l'oscillation totale de la chaîne.

Û

6.2. Groupe d'holonomie. Soit x et y deux points G-équivalents et $\mathbf{H_{yx}}$ l'ensemble des isométries $R : E_x \to E_y$, telle que $R = \lim R_{c_n}$, c_n chaîne reliant x à y et $0(c_n) \to 0$.

La discussion précédente montre que H_{yx} est bien défini (indépendamment des trivialisations).

La composition évidente des chaînes nous permet d'affirmer que :

$h \quad H_{yx}$, $h' \quad H_{zy} \quad h^{-1} \quad H_{xy}$ et $h'h \quad H_{zx}$.

En particulier $H_x = H_{xx}$ est un groupe qu'on appellera le **groupe d'holonomie de T en x**. Si $h \quad H_{yx}$ alors $H_y = h\, H_x\, h^{-1}$.

Remarque. Pour des chaînes (triviales) de longueur 1, on peut se "passer" des trivialisations et du transport parallèle approximatif de la manière suivante. Il s'agit en effet d'une chaîne représentée par un point z voisin de x et un point $z' = \varphi^{t} z$ voisin de y. Considérons une suite de telles chaînes représentées par $z_n \to x$, $z'_n = \varphi^{t_n} x_n \to y$ et $t_n \to \infty$. On dira qu'une isométrie $R : E_x \to E_y$ est la limite de la suite d'isométries (transports parallèles) $T^{t_n} : E_{z_n} \to E_{z'_n}$, si pour tout $v \quad E_x$ tel que $v = \lim v_n$ où $v_n \quad E_{z_n}$; on a $\lim T^{t_n} v_n = R(v)$. Toutes ces limites R appartiennent à H_{yx}. Cette méthode ne permet cependant pas de retrouver pour x = y, le groupe d'holonomie H_x.

6.3. Holonomie et Lipschitz-ergodicité. Soit $St^k(E)$ le fibré des k-repères orthonormés de E où k = dimE. Le transport parallèle agit sur $St^k(E)$ et détermine donc un flot ψ au-dessus de φ, commutant avec l'action principale de O(k). La proposition suivante se démontre sans difficulté.

Proposition. Soit r $St^k(E)$ et x sa projection dans M. Notons C(r) (resp. C(x)) la composante lipschitz-ergodique de r (resp x) par ϕ(resp φ). Alors C(r) fibre sur C(x). La fibre en x est **l'orbite** de r par le groupe **d'holonomie H_x** agissant sur $St^k(E_x)$.   Û

6.4. Flots sans holonomie

6.4.1. Définition. On dira que le transport parallèle T est **sans holonomie** (ou à holonomie triviale) si H_x est le groupe trivial pour tout x   M. On dira qu'un flot autonome est sans holonomie si c'est le cas de son transport parallèle.

La proposition précédente indique qu'alors , sur G = {(x,y)   M x M / x Gy}(le graphe de la relation G ou F du § 5) , est définie et continue une application H telle que H(x,y) = H_{yx} est l'(unique) holonomie transportant E_x à E_y.

6.4.2. Remarque. Lorsque (M,φ) est lipschitz-ergodique et T est sans holonomie, la donnée des applications H_{yx} ressemble à une connexion (métrique) plate mais (éventuellement) à torsion non-triviale. Malheureusement H n'est pas assez régulière pour donner un sens à un tel énoncé. On va tout de suite montrer un résultat crucial pour la preuve du théorème C, affirmant que cette connexion est Lipschitz (si φ est Lipschitz-ergodique). Mais d'abord, regardons des exemples d'holonomie.

6.4.3. Flots algébriques . Un flot algébrique de type homogène est sans holonomie. la connexion (6.4.2) existe bien. Par contre un flot algébrique de type localement homogène c'est-à-dire sur un quotient double $\Gamma \backslash G / H$ peut avoir de l'holonomie. Au point projection de 1   G, c'est un sous-groupe de Ad (H) agissant sur le quotient des algèbres de Lie de G / H. C'est généralement Ad(H) tout entier!

6.4.4. Flots géodésiques. Le transport parallèle usuel (4.2) sur le fibré des n-repères d'une variété riemannienne V à n dimensions est sans holonomie. La connexion dont il était question en 6.4.2 existe bien. Ce n'est rien d'autre que le parallélisme canonique des fibrés de repères.
Ce n'est pas le cas sur T^1V. Soit v $T^1_x V$, K le groupe d'holonomie (au sens usuel) en x de la connexion de V et K_v le stabilisateur de v dans K. Après identification de l'horizontal et le vertical dans $T_x V$ on a : H_v $\overline{K}_v$ (adhérence de K_v). Il semble qu'en général $H_v = K_v$!

6.5. Régularité Lipchitz de l'holonomie. On démontre dans ce qui reste de ce §, le résultat suivant qui sera l'ingrédient principal de la preuve du théorème C (§8).

Définition (champs parallèles). Supposons (M,φ) Lipschitz-ergodique et le transport parallèle sans holonomie. Une section X de $St^k(M) \to M$ est dite (un champ de repères) parallèle si pour tous x et y on a $X(y) = H_{yx}(X(x))$.

6.5.1. Théorème (régularité des champs parallèles). Supposons le transport parallèle sans holonomie et le flot (M,φ) Lipschitz-ergodique. Alors tout champ parallèle est Lipschitz.

Preuve. Notons $M' = St^k(M)$ et d la distance déterminée par la structure riemannienne naturelle (déduite de la métrique riemannienne sur le fibré $E \to M$). Pour $r \in M'$, on note $C(r)$ sa composante lipschitz-ergodique (pour ψ). Soit $\overline{M}$ l'espace quotient des composantes lipschitz-ergodiques. Considérons la distance $\overline{\rho}$ sur $\overline{M}$ (5.4) . C'est une structure de longueur (5.6), **invariante** par l'action principale de O(k) puisque cette dernière action conserve toutes les données.
Considérons également d^v, la distance "verticale" définie pour deux points r et r' dans **une même fibre** par :

$d^v(r,r')$ = la distance le long de la fibre entre r et r'.

Ceci permet de définir une distance $\overline{d}$ sur $\overline{M}$ par :

$\overline{d}(C(r),C(r')) = d^v(r,r')$, où r et r' sont choisis dans une même fibre. Ceci est bien défini car :
i) Une composante ergodique coupe toute fibre exactement en un point (car (M,φ) est Lipschitz ergodique et à holonomie triviale)
ii) Le transport parallèle envoie isométriquement fibre en fibre et préserve les composantes ergodiques.

L'espace quotient $\overline{M}$ s'identifie au groupe orthogonal O(k). La distance $\overline{d}$ correspondra à la distance bi-invariante sur O(k)

6.5.2. Lemme. Soit $\overline{\rho}$ une distance invariante (à gauche par exemple) sur O(n) telle que $\overline{\rho} \leq \overline{d}$. Alors $\overline{\rho}$ est équivalente à $\overline{d}$, c'est-à-dire qu'il existe c tel que $\overline{d} \leq c\,\overline{\rho}$.

Preuve. Les deux distances définissent la même topologie à cause de l'inégalité $\overline{\rho} \leq \overline{d}$ et la compacité de l'espace métrique (O(k), $\overline{d}$). Supposons le lemme faux. Il existera donc $g_n \in O(k)$ tendant vers 1 telle que $\overline{\rho}(1, g_n) = \varepsilon_n \overline{d}(1, g_n)$, avec $\varepsilon_n \to 0$. Par équivalence topologique, $\overline{d}(1, g_n) \to 0$. Soit δ un réel tel que toute géodésique de $\overline{d}$, passant par 1, et de longueur δ soit minimisante (i. e. la boule B

(1, δ) au sens de $\bar{d}$ est convexe).Soit t(n) tel que $\bar{d}\,(1, g_n^{t(n)}) = \delta$ et l(n) la partie entière de t(n). Par invariance de $\bar{\rho}$, on a : $\bar{\rho}\,(1, g_n^{l(n)}) \leq \varepsilon_n\,\delta$ et $\bar{d}\,(1, g_n^{l(n)}) \geq \delta - \bar{d}\,(1, g_n)$. Ceci contredit l'équivalence topologique car $\bar{d}\,(1, g_n)$ tend vers 0.

Û

6.5.3. Corollaire. Pour r et r' dans une même fibre on a : $d^v(r',r) \leq c\, d(r', C(r))$ où d(r', C(r)) est la distance de r' à C(r) (c est la constante précédente).

Preuve. Remarquons d'abord que le lemme s'applique bien, c'est-à-dire que $\bar{\rho} \leq \bar{d}$ car la semi-distance ρ (celle qui définit $\bar{\rho}$ sur $\bar{M}$) vérifie bien $\rho \leq d$ (§5.4). Donc sur une fibre $\rho \leq d^v$. Maintenant d'après 5.7 on a $\rho(r',r) \leq d(r', C(r))$. Donc d'après le lemme : $d^v(r',r) \leq c\, d(r', C(r))$.

Û

6.5.4. Fin de la preuve. Remarquons d'abord que si r $St_X^k(M)$, alors C(r) est le graphe du champ parallèle X valant r en x. Le corollaire précédent indique que "C(r) ne s'incline pas trop sur la verticale" , ce qui s'interprète usuellement , justement par le fait que le champ X est lipschitz.

Notons d_M la distance dans M (d étant la distance associée à la métrique naturelle sur $St_X^k(M)$). On va montrer que pour tous x et y appartenant à M, on a $d(X(x), X(y)) \leq (1+c)d_M(x, y)$. Soit en effet g une géodésique de M réalisant la distance $d_M(x,y)$ et $\tilde{g}$ le relèvement horizontal de g, d'origine X(x). Elle coupe la fibre de y en un point r'. Il est connu [Bes] que $d(X(x), r') = d_M(x, y)$ (car le relèvement est horizontal). On a donc: $d(X(x), X(y)) \leq d_M(x,y) + d(r', X(y))$. Appliquons 6.5.3 à r = X(y), on obtient : $d(X(y), r') \leq c\, d(X(x), r')$ (car par définition X(x) C(r)) = $c d_M(x, y)$. Il s'ensuit que $d(X(x), X(y)) \leq (1+c)d_M(x, y)$ (remarquons que le théorème de Pythagore permet d'améliorer 1+c en $\sqrt{(1+c^2)}$). Û

§ 7 . Sous-flots

Soit (E, M, φ, F) un flot fibré linéaire T-autonome.

7.1. Définition. Soit N M et Kc E. On dira que (K, N, φ, F) est un sous-flot de (E, M, φ, F) si N (resp. K) est φ (resp. F)-invariant et K est un sous-fibré (d'une certaine classe de régularité, par exemple mesurable, continu,...) de E / N.

7.2. Problème d'autonomie des sous-flots

Soit (K, N, φ, F) un sous-flot du flot T-autonome (E, M, φ, F).

Définition. On dira qu'il est **autonome** (comme sous-flot) si K est T-invariant.

Le problème qu'on se pose ici est justement de savoir dans quelle mesure un sous-flot (c'est à dire F-invariant) est autonome (donc également T-invariant) ?

Remarque. Pour tout t, (T^t K, N, φ, F) est également un sous-flot : F^s (T^t K) = T^t (F^s K) = T^t K. Ceci entraîne par exemple que si K est un sous-fibré sur M, correspondant à la décomposition en espaces caractéristiques de l'endomorphisme structural ou au scindement de Lyapunov (1.4), alors (K, M, φ, F) est un sous-flot autonome.-

7.3. Cas sans holonomie. On va supposer dans la suite de ce § que le transport parallèle est **sans holonomie** et pour simplifier que (M,φ) est Lipschitz-ergodique.

7.3.1. Définition. On dira qu'un sous-flot (K, N, φ, F) est **parallèle** si pour tous x, y N on a $K_y = H_{yx} (K_x)$ où $H_{yx} : E_x \rightarrow E_y$ est l'holonomie (6.4.1).

7.3.2. Définition. Lorsque E = T M, F = D φ, N une sous-variété C^1 et K = T N, on dira que N est **parallèle** si (TN, N, φ, Dφ) est un sous-flot parallèle.

7.3.3. Exemple. Pour un flot algébrique homogène (4.1) sur M = $\Gamma \setminus G$, N M est parallèle exactement si elle est projection dans M d'une partie ouverte d'un translaté gG' d'un sous-groupe de Lie G' de G.

Preuve. On peut raisonner dans G au lieu de $\Gamma \setminus G$. Le fait que N soit parallèle signifie que son espace tangent est invariant à gauche. Considérons le champ de plans invariant à gauche prolongeant l'espace tangent de N. Les translatés à gauche de N sont des sous-variétés intégrales de ce champ. Ce champ est donc intégrable. Or les feuilles d'un champ invariant à gauche sont des translatés d'un sous-groupe (immergé) de G. La sous-variété N est donc une sous-variété de codimension zéro (donc ouverte) dans un tel translaté. Û

On a également la généralisation suivante de cet exemple qui nous sera utile au §9.3.

7.3.4. Lemme. Soient $E_1,\ldots, E_k$ des champs de plans parallèles au dessus d'une sous-variété topologique N de M = $\Gamma \setminus G$. Supposons ces champs intégrables et tangents à

N au sens que : pour tout i et tout $x \in N$, passe une sous-variété intégrale de E_i **incluse** dans N. Supposons que dimN = dim $\sum E_i$. Alors N est la projection dans M d'un ouvert d'un translaté gG' d'un sous-groupe de Lie G' de G. (Cette fois, on remarque que le champ invariant à gauche déterminée par ΣE_i est intégrable). Û

7.4. Théorème. Soit (K, N, φ, F) un sous-flot mesurable du flot autonome (E, M, φ, F) (supposé sans-holonomie et tel que (M,φ) soit Lipschitz-ergodique). Supposons que N est une sous-variété de volume fini.
i) Supposons que l'endomorphisme structural est à spectre réel. Alors le sous-flot est autonome.
ii) Supposons le sous-flot C^0. Il est alors parallèle le long des classes de la relation d'équivalence $\overline{W^{su}}$ dans N.
ii) Supposons (N, φ) mixing (pour la mesure de Lebesgue qui est conservée). Alors le sous-flot est parallèle.

D'abord :

7.4.1. La relation $\overline{W^{su}}$. On dira que deux points x et y de N sont W^{ss} équivalents si $d(\varphi^t x, \varphi^t y) \to 0$ quand $t \to +\infty$ (W^{ss} pour dire variété stable forte). On définit de la même façon la relation W^{uu} en faisant $t \to -\infty$. La relation W^{su} est la relation d'équivalence engendrée par W^{ss} et W^{uu} (su ne signifie pas super-stable!) et $\overline{W^{su}}$ est sa fermeture.

7.4.2. Application de Gauss. L'ingrédient principal de la démonstration est "l 'application de Gauss" qui se définit comme suit. Choisissons une fois pour toute un point base $e \in M$. Considérons l'application :

$Ga : x \in N \to H_{ex}(K_x) \in Gr^d(E_e)$, où H_{ex} est l'holonomie amenant de E_x à E_e, et $Gr^d(E_e)$ est la Grassmannienne des d-plans de E_e. Cette application est aussi régulière que le sous-fibré K.
Notons $S^t = S_e^t$ (le flot structural en e) et P^t le flot (linéaire) qu'il induit sur $Gr^d(E_e)$.

7.4.3. Affirmation (équivariance de Ga). On a : $P^t Ga(x) = Ga(\varphi^t x) = Ga(S_x^t(K_x)) = Ga(T^t(K_x))$ pour tout $x \in N$. En particulier le sous-flot est autonome (resp. parallèle) si et seulement si Ga est φ-invariante (resp. constante).

Preuve. On utilise pour cela l'invariance de K par F^t (par définition de sous-flot) et le fait évident suivant : pour tout $x \in M$, S^t (= S_e^t) = $H_{ex}S_x^tH_{xe} = (H_{ex})^{-1}S_x^tH_{xe}$. Û

On est donc ramené à étudier la :

7.5. Dynamique des flots "linéaires" sur les Grassmanniennes. Identifions E_e à R^n et étudions la récurrence de $(Gr^d(R^n), P^t)$. Pour toutes les preuves de cette section, on peut supposer que d = 1. En effet soit $\Lambda^d R^n$, la dième-puissance extérieure de R^n, alors $Gr^d(R^n)$ se plonge canoniquement dans $P(\Lambda^d R^n)$, le projectifié de $\Lambda^d R^n$. Écrivons S^t = exp tA = exp tB exp tN où B (resp. N) est la partie semi-simple (resp. nilpotente) de A.

7.5.1. Lemme. Soit L $Gr^d(R^n)$ un point récurrent. Alors exp tN(L) = L (pour tout t). Pour étudier la récurrence on peut ainsi se restreindre a Ker(N) ; autrement dit on peut simplement supposer que A est semi-simple.

Preuve. Supposons d = 1 et soit v un vecteur de R^n représentant L. Il s'agit de montrer que N(v) = 0. En projetant sur des espaces propres de B, on peut supposer que B admet une seule valeur propre λ. On peut supposer que λ est de norme égale à 1 puisqu'on est dans le projectif. En particulier exp tB est périodique. Notons $v(t) = S^t v$, donc exp tN(v) = exp -tB(v(t)). Soit k le plus grand entier tel que $N^k(v)$ soit non nul (k est fini par nilpotence). En divisant par t^k, on voit que dans le projectif, exp tN(v) tend vers $N^k(v)$. Par périodicité de exp tB et récurrence de v, exp tB(v(t)) admet une valeur ω-limite de la forme exp sB(v). Donc N^k induit une rotation sur le plan engendré par v et exp sB(v) car N et B commutent (le cas où ce plan est de dimension 1 signifie que v est un vecteur propre non-trivial de N^k). Ceci contredit le caractère nilpotent de N à moins que k = 0. Donc par définition de k : N(v) = 0. Û

7.5.2. Lemme. Supposons A à spectre réel. Alors tout point récurrent est fixe.

Preuve. Soit en général (A quelconque) E_r (resp. E^-_r, resp. E^+_r) la somme des espaces caractéristiques correspondants aux valeurs propres à partie réelle égale (resp. inférieure, resp. supérieure) à r. Notons PE_r, PE^-_r, et PE^+_r les sous-espaces correspondants dans PR^n. Il est facile de voir que pour tout L PE^-_r (resp. PE^+_r), $P^t(L) \to PE_r$ quand $t \to +\infty$ (resp. $-\infty$). Un point récurrent appartient donc à un certain PE_r. Û

7.5.3. Lemme. Soit L $Gr^d(R^n)$ un point P^t-récurrent qui n'est pas fixe. Alors il existe un voisinage V, P^t-invariant de L dans $Gr^d(R^n)$ et une application $\pi : V \to S^1$, qui semi-conjugue (V, P^t) à un flot naturel (isométrique) (S^1, ψ^t) sur le cercle S^1 (en d'autres termes $\pi(P^t(L')) = e^{i\alpha t}\pi(L')$ pour un certain réel α et tout L' V).

Preuve. On peut supposer comme toujours que d = 1. Soit v R^n, un vecteur représentant L. Le lemme précèdent entraîne que v n'est pas inclus dans un sous-espace-caractéristique où A est à spectre réel. Donc v se projette non-trivialement sur un sous-espace λ-caractéristique tel que $\lambda = \rho e^{i\alpha}$ et α non-nul. On peut supposer que A est semi-simple (d'après 7.5.1) et que $\rho = 1$ puisque on est dans le projectif. Ainsi le sous-espace $\lambda-$caractéristique s'identifie à un certain C^m et exp tA, restreinte à cet espace, s'identifie à la multiplication complexe par $e^{i\alpha}$. Supposons par exemple que la projection de v sur le premier facteur de $C^m = CxC^{m-1}$ soit non-trivial. Considérons la projection $p : R^n \to C$. Elle détermine bien une application π répondant à la question. Û

7.6. Preuve du théorème. La sous-variété N étant de volume fini, (N, φ) préservera donc une mesure de Lebesgue finie (théorème A). Presque tout point de N est donc récurrent. il en va de même pour leur images par Ga (à cause de L'équivariance 7.4.3).

i) Supposons que A est à spectre réel. D'après 7.5.2 pour presque tout point x   N, Ga(x) est fixe (par P^t). Cela veut dire d'après 7.4.3 que Ga est presque partout φ-invariante. Donc le sous-flot est autonome.

ii) Il s'agit de montrer que Ga est constante le long des classes de $\overline{W^{su}}$. Il suffit pour cela de montrer que Ga est W^{ss} (resp. W^{uu})-constante (on passera ensuite à la fermeture $\overline{W^{su}}$ car Ga était supposée continue). Il suffit pour cela de montrer que les relations W^{ss} et W^{uu} sont triviales dans l'ensemble des points récurrents de $(Gr^d(R^n), P^t)$. A l'aide du lemme 7.5.3, on se ramène au cas d'un flot de rotations sur le cercle S^1. Pour ce dernier comme pour tout flot isométrique, les relations W^{ss} et W^{uu} sont évidemment triviales.

iii) Si (N, φ) est mixing, alors, par définition [Wal], une application telle que celle du lemme, n'existe pas. Û

§ 8. Flots autonomes sans holonomie. Théorème C.

On montre ici un résultat de rigidité (algébricité) des flots autonomes. Comme il se formule naturellement pour des variétés non-nécessairement compactes (donc éventuellement non-complètes), on est obligé de revenir à la définition des flots algébriques à l'aide de structures géométriques (1.1). Rappelons que dans le cas homogène (qui nous intéresse ici), un flot (M,φ) est algébrique (de type homogène) si M est une variété riemannienne recouverte par des cartes isométriques à valeurs dans un groupe de Lie G (muni d'une métrique invariante à gauche). Les applications de transitions sont des restrictions de translations à gauche, et le flot φ s'exprimant dans ces cartes comme un champ invariant à gauche.

Théorème C. Un flot autonome sans holonomie et mixing (pour la mesure de Lebesgue) sur une variété de volume fini est algébrique (de type homogène).

La même démonstration donne :

Théorème C'. Un flot autonome sans holonomie, ergodique (pour la mesure de Lebesgue) sur une variété de volume fini et dont l'endomorphisme structural est à spectre réel est algébrique (de type homogène).

Question. Un flot autonome (pas nécessairement sans-holonomie) sur une variété de volume fini qui est mixing, est algébrique (de type localement homogène) ?

Le théorème C découle essentiellement du :

Lemme. Soit P l'espace des champs parallèles sur M (§6.4). Dans les hypothèses du théorème C, P est une algèbre (pour le crochet de Lie sur les champs de vecteurs).

Le présent § est consacré à la preuve de ce lemme, mais d'abord :

8.1. Preuve du théorème d'après le lemme (ceci fournit une preuve de l'affirmation de 1.1 dans le cas homogène et qui s'étend directement au cas localement homogène). Soit G le groupe de Lie simplement connexe (abstrait) engendré par l'algèbre P. Tout point x M admet un voisinage U_x et une application $f_x : V_x \to U_x$ où V_x est un voisinage de l'élément neutre de G. Cette application s'obtient simplement en intégrant les champs parallèles qui sont Lipschitz d'après 6.5 dans U_x. Elle envoie champs invariants à gauche sur V_x en champs parallèles sur U_x. Elle est donc bien un difféomorphisme local. Elle fournit donc, quitte à restreindre U_x, une carte locale au voisinage de x. Le passage entre deux cartes au voisinages de deux points de M est un difféomorphisme local de G respectant les champs invariants à gauche. C'est donc une translation à gauche. Munissons G d'une métrique invariante à gauche telle qu'en l'élément neutre 1, $D_1 f_x : T_1 G \to T_x M$, soit isométrique. Il en résulte que f_x est isométrique (dans V_x) car l'holomonie (dans M) est isométrique (le produit scalaire de deux champs parallèles est constant). Il résulte de tout ce qui précède que cette métrique de G ne dépend pas de x. Le flot est donc bien algébrique. Û

8.2. Notons $S_x{}^t$ et A_x les flots et endomorphismes structuraux de (M,φ) en x. Soit X un champ parallèle. Son image par $D\varphi^t$ ou par le transport parallèle T^t sont également parallèle. En particulier le champ $X'(x) = A_x(X(x))$ est parallèle. On le note simplement A(X). Ainsi $A : P \to P$ est un endomorphisme. On définit de même S^t comme groupe à un paramètre linéaire de P.

Pour X un champ sur M, notons L(X) le crochet [φ,X]. Ce crochet existe dès que X est un champ mesurable presque partout différentiable le long de φ (on le définit comme dérivé en t = 0 de $D\phi^{-t} X (\phi^t(x))$).

Affirmation. Pour X parallèle, on a : LX = - A(X) .

Preuve : Soit x M, on a : $D\phi^{-t} X (\phi^t(x)) = (D\phi^{-t}. T^t)X (x) = S_X^{-t} (X(x))$. En dérivant on obtient $[\varphi, X] (x) = - A_x (X(x))$. Û

8.3. Identité de Jacobi. Rappelons l'identité de Jacobi : L[X,Y] = [LX,Y] + [X,LY], valable classiquement pour des champs C^2.

Affirmation. Les champs parallèles vérifient l'identité de Jacobi : Si X P, Y P, alors L[X,Y] = [LX,Y] + [X,LY].

Preuve. C'est un principe d'analyse, standard : Les champs X et Y et par suite LX et LY étant parallèles, donc Lipschitz d'après 6.5.1, les crochets du second membre de l'identité existent et sont par ailleurs mesurables et bornés (en particulier localement intégrables), donc le second membre existent également et vérifient l'identité. Pour le voir, il suffit d'approximer au sens Lipschitz, les champs X et Y par des champs C^2. Û

La preuve du lemme, c'est-à-dire X P, Y P [X, Y] P, se fait en supposant que X et Y appartiennent à des espaces caractéristiques de A, et en analysant tous les cas qui se présentent. Pour ne pas trop compliquer les notations, on va se restreindre à quatre d'entre eux qui illustrent parfaitement l'idée de la démonstration.

8.4. Un premier cas. Soit X, Y P tels que AX= λ X et AY = - λY où λ R. Donc LX = - λX et LY = λY. Montrons que le champ Z = [X,Y] est parallèle. L'identité de Jacobi donne LZ = L[X,Y] = $(-\lambda + \lambda)$ [X,Y] = 0. Donc $D\varphi^t Z(x) = Z(\varphi^t(x)$ pour presque tout x M. En particulier le sous-fibré mesurable de dimension 1 engendré par Z est Dφ-invariant (i.e. un sous-flot). Il est donc parallèle d'après l'hypothèse de mixing (7.4). Pour montrer que Z est un champ parallèle, il suffit maintenant de montrer que sa norme est constante. Trivialisons justement le sous-fibré de dimension 1 engendré par Z à l'aide d'un champ unitaire Z'(donc parallèle). La restriction du flot structural S_X^t s'identifiera alors à la multiplication par exp ta, pour un certain a (i.e. $S_X^t (Z'(x))$ = exp ta Z'(x)). Donc $\| Z(\varphi^t x) \| = \exp t a. \| Z (x) \|$. Si a = 0, Z est unitaire et la preuve sera achevée. Montrons maintenant que si a n'est pas égal à 0 (disons positif), alors Z est nul. Soit en effet $M(\varepsilon) = \{x \in M \,/\, \| Z(x) \| \leq \varepsilon \}$. L'égalité précédente entraîne que $\varphi^t(M(\varepsilon)) \subset M((\exp -ta)\varepsilon)$. Or φ préserve le volume, donc presque tout point appartient à $M(0)$. Û

8.5. Un deuxième cas. Gardons les mêmes notations que précédemment et supposons cette fois que $AX = \lambda X$ et $A(Y) = \mu Y$ où λ et μ sont des réels quelconques.On a alors: $L[X,Y] = (-\lambda - \mu)[X,Y]$. Ce qui entraîne que $\varphi^t_* Z(x) = \exp -(\lambda + \mu)t\, Z(\varphi^t(x))$. On démontre cette fois par la même méthode que si $\lambda \neq \mu$, alors $Z = 0$. Û

8.6. Un troisième cas. Regardons ce cas : $AX = \lambda Y$ et $AY = -\lambda X$ (X et Y sont dans un espace caractéristique de A correspondant à une valeur propre imaginaire). On a alors : $LZ = -2\lambda Z$. On démontre comme précédemment que $Z = 0$. Û

8.7. Un Quatrième cas. Considérons maintenant des champs dans l'espace 0-caractéristique de A, et supposons pour simplifier que A est en fait nilpotente : $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Soient X et Y deux champs parallèles et $X' = A^{n-1}(X)$, $Y' = A^{n-1} Y$. L'identité de Jacobi entraîne que $L[X',Y'] = 0$. Donc comme dans les cas précédents $[X', Y'] = [A^{n-1} X, A^{n-1} Y]$ est parallèle et φ-invariant.
Considérons maintenant $X'' = A^{n-2}(X)$ (et toujours $Y' = A^{n-1}(Y)$). On a : $L[X'',Y'] = [-A(A^{n-2}(X), A^{n-1} Y] + [A^{n-2} X, -A^n Y] = -[A^{n-1} X, A^{n-1} Y]$. Ainsi d'après ce qui précède $L[X'',Y']$ est parallèle et φ-invariant.. On peut maintenant considérer le sous-fibré φ-invariant (de dimension 2) engendré par $[X'',Y']$ et $L[X'',Y']$. On peut évidemment continuer notre raisonnement comme précédemment. Les notations s'avérent cependant compliqués, on préfère pour cela raisonner "analytiquement" comme suit . Notons $Z = [X'', Y']$ et $Z' = LZ$, qui est d'après ce qui précède parallèle. Dans une base $X_1, \ldots X_k$ de champs parallèles, écrivons : $Z = \Sigma f_i X_i$, $Z' = \Sigma C_i X_i$ où les C_i sont constants. On a $L(Z) = [\varphi, Z] = \Sigma f_i' X_i + f_i LX_i = \Sigma f_i' X_i - f_i A(X_i)$ où f_i' est la dérivée (temporelle) de f_i suivant φ. On a donc le système linéaire non homogène suivant :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}' = A.\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

On l'écrira de façon compacte $f' = A(f) + C$.

Affirmation. A étant nilpotente, toute solution bornée de cette équation est constante. Toute autre solution est à croissance (exactement) polynomiale.

Preuve.
i) Montrons que s'il existe une solution bornée f, alors C est dans l'image de A . Écrivons $C = C^1 + C^2$ où C^1 est dans l'image et C^2 lui est orthogonale. Donc $< f', C^2> =$

$< Af + C^1 + C^2, C^2> = < C^2, C^2>$ (ici < > note le produit scalaire). Donc $< f, C^2> (t) = t <C^2, C^2> + < f, C^2> (0)$. Par suite $C^2 = 0$ puisque f est bornée.

ii) Ainsi , on a C = A(b) pour un certain b. Soit g une solution de l'équation , alors h = g-b est solution de l'équation homogène h' = A(h). On a donc : h(t) = exp(t A) h(0). La nilpotente de A entraîne que ou bien h est constante ou bien elle croit polynomialement. Û

Dans notre cas, on montre facilement comme à la fin de 8.4, que f ne peut pas être à croissance polynomiale. Ainsi f est constante, ce qui signifie exactement que Z est parallèle.

Maintenant, ayant trouvé que [X",Y'] est parallèle, on fera la même chose [X", Y"] où X" = A^{n-2}(X') et Y" = A^{n-2}(Y"), et ainsi de suite jusqu'au crochet [X,Y], lui même. Û

§ 9. Preuve du théorème B.

Soit ($M = \Gamma \backslash G/H$, φ) un flot algébrique de type Anosov. Cela veut exactement dire que ad(α) agissant sur G /H n'admet pas de valeurs propres imaginaires pures [Tom]. Soit Nc M une sous-variété invariante de classe C^1 et de volume fini.

9.1 Structure d'Anosov de (N,ϕ). D'après le théorème A, (N, φ) conserve une mesure de Lebesgue finie. D'après [Hir,Pug], [Mañ]$_3$ ou [Sel], cela suffit pour en déduire que (N, φ) est de type Anosov. Dans notre contexte (de flots autonomes), l'affirmation plus simple et générale suivante se démontre facilement :

Affirmation. Soit (K, N, φ, F) un sous-flot de classe C^0 d'un flot autonome (E, M, φ, F). Supposons (N, φ) non-errant. Soit E_x (r) le r-espace de Lyapunov (1.4). Alors : $K_x = \Sigma\, K_x \cap E_x(r)$ (en d'autres termes la projection de K_x sur $E_x(r)$ est égale à son intersection avec celui-ci).

Preuve. Pour x N, soit r_x^{max} le plus grand exposant de Lyapunov (la plus grande valeur absolue des valeurs propres de l'endomorphisme structural A_x) et E^{max} le sous-espace correspondant. Notons E^{-max} la somme des autres sous-espaces de Lyapunov et $p : E \to E^{max}$ la projection.

Soit U l'ouvert (dense) de N où toutes les données : E^{max}, $p(K_x)$, K_xUE^{max} et K_xUE^{-max}, sont continues (i.e. de dimensions localement constantes). Choisissons x dans U et positivement récurrent. Soit u K_x tel que v = p(u) soit non nul. On va montrer que v K_x.

Considérons l'angle ∡ (F^tv, K). Il est plus petit que ∡ (F^tv, F^tu). Ce denier angle est équivalent à exp-t r_x^{max}|| F^tu-F^tv ||, car || F^tu || et || F^tv || sont équivalentes à exp t r_x^{max}

(par définition de r^{max} et à cause du fait que $v \neq 0$). Mais u-v E^{-max}, donc $\| F^t u - F^t v \|$ croît exponentiellement strictement moins vite que exp t r_x^{max}. Il en résulte que l'angle $\measuredangle$ $(F^t v, K)$ décroît exponentiellement quand $t \to +\infty$ (en particulier, par récurrence positive de x, $K_x U E^{max}$ est non-trivial).

Par continuité de tous, dans un voisinage de x, l'angle entre un vecteur v' E^{max} et K est équivalent à l'angle entre v' et $K_x U E^{max}$. Il s'ensuit que pour les t tels que $\varphi^t x$ soit dans ce voisinage de x, l'angle $\measuredangle$ $(F^t v, F^t K_x)$ est équivalent à $\measuredangle$ $(F^t v, F^t (K_x) U E^{max})$.

Mais par définition du flot structural S_x^t et du fait que le transport parallèle est isométrique, on a : $\measuredangle$ $(F^t v, F^t (K_x) U E^{max})$ = $\measuredangle$ $(S_x^t v, S_x^t (K_x) U E^{max})$. Ainsi sous la restriction S'^t_x de S_x^t à E_x^{max}, l'angle entre la droite déterminée par le vecteur v et le plan $K_x U E_x^{max}$ décroît exponentiellement. Ceci est impossible sauf si cet angle est nul. En effet, ces angles ne changent pas en remplaçant S'^t_x par exp t B_x où B_x est la restriction de $(r_x^{max})^{-1} A_x$ à E_x^{max}. Or par définition de E^{max}, B_x est à valeurs propres imaginaires. la décroissance des angles sous exp tB_x est donc au pire polynomiale. Cet angle est donc nul, i. e. $v = p(u)$ $K_x U E^{max}$. Par conséquent : $p(K_x) = K_x U E^{max}$

On refait le même raisonnement pour le quotient E / E^{max}. Tenant compte du fait que l'on sait déjà que $p(K_x) = K_x U E^{max}$, on obtient la même égalité pour E^{max-1}, qui est l'espace correspondant au second exposant de Lyapunov. En répétant ce raisonnement le temps qu'il faut, on obtient : $K_x = \Sigma K_x \cap E_x(r)$, pour un sous-ensemble résiduel. Ceci s'étend par continuité de K à tous les points de N. Û

9.2. Affirmation (la relation $\overline{W^{su}}$ pour les flots d'Anosov). Pour un flot d'anosov non-errant (N, φ), on a : ou bien la relation $\overline{W^{su}}$ (7.4.1) est triviale (une seule classe), ou bien le flot est une suspension (à temps de retour constant) dont toute classe de $\overline{W^{su}}$ est une section. La relation $\overline{W^{su}}$ coïncide en fait dans ce cas avec le feuilletage défini par la somme des sous-fibrés stable et instable (qui sera en particulier intégrable).

Preuve. C'est un fait standard de la théorie des systèmes d'Anosov (sur les variétés compactes) [Ano] [Pla]. Sa preuve s'étend au cas non-errant, mais non-nécessairement compact de la façon suivante. Pour x N, considérons A(x) =){φ^t $\overline{W^{su}}$ (x) / t R}. Il est facile de se convaincre que cela définit une partition de N en ouverts. Cette partition est donc triviale par (l'hypothèse implicite de) connexité de N. Il est également facile à voir, en choisissant x récurrent, que cette réunion se réduit à une réunion pour t parcourant un intervalle borné de R. Pour achever la preuve, il suffit maintenant de montrer qu' ou bien $\overline{W^{su}}$ est triviale ; ou bien ses classes sont des sous-variétés (fermées par définition de $\overline{W^{su}}$) tangentes à la somme des espaces stable et instable. Identifions l'orbite de x à

R. La restriction de la relation à cette orbite y détermine une relation d'équivalence invariante par translation et à classes fermées. Elle est donc, soit triviale, soit définie par un sous-groupe discret de R. Regardons donc ce dernier cas. On peut l'interpréter simplement par le fait que : localement, les classes de $\overline{W^{su}}$ sont transverses aux orbites de φ (au sens qu'une telle classe coupe une orbite de φ au plus une fois). Considérons le feuilletage L suivant, défini au voisinage de x : si y = $\varphi^t x$, alors L_y = $\cup\{W^{uu}(z)$ / $z \in W^{ss}(y)\}$. Ce feuilletage est plus fin que $\overline{W^{su}}$: une classe de $\overline{W^{su}}$ est réunion de feuilles de L. On a nécessairement égalité L = $\overline{W^{su}}$, à cause de la transversalité (de $\overline{W^{su}}$ à φ). Û

9.3. Relèvement dans un flot sans holonomie. Soit M' = $\Gamma \backslash G$ et φ le flot algébrique dessus, $\pi : M' \to M$ la projection et N" l'image réciproque de N dans M'. Notons E^s et E^u les sous-fibrés respectivement stable et instable de (N", φ) , W^s et W^u, les feuilletages qu'ils déterminent. Ils se projettent sur les objets correspondants dans N. On en déduit que la relation $\overline{W^{su}}$ dans (N", φ) se projette sur la relation homologue dans N. Le sous-groupe H respecte la relation $\overline{W^{su}}$ dans N" puisqu'il respecte φ. Il en résulte qu'une classe N' de la relation $\overline{W^{su}}$ dans N" est un fibré principale au dessus de la classe correspondante dans N. En particulier N' est une sous-variété topologique (9.2).

Affirmation. Une classe de $\overline{W^{su}}$ dans (N", φ) est parallèle (i.e. un ouvert dans un transtaté gG' d'un sous-groupe de G).

Preuve. Les sous-fibrés stables et instables E^s et E^u de N" ne sont rien d'autre que les traces des fibrés stable et instable de M' sur le fibré tangent à N". Ils sont donc C°. Pour $x \in$ N", soit V_x l'espace vertical de la fibration principale $\overline{W^{su}}(x) \to \overline{W^{su}}(\pi(x))$. C'est un sous-fibré au dessus de N", continu et φ-invariants. Appliquons le théorème 7.4, ces trois sous-fibrés sont donc parallèles le long de $\overline{W^{su}}$. Le lemme 7.4.3 s'applique directement et entraîne que N' est parallèle.
Û

9.4. Fin de la preuve. Deux cas se présentent :

i) **Le flot (N, ϕ) n'est pas une suspension :** Dans ce cas la relation $\overline{W^{su}}$ est triviale dans N. D'après ce qui précède la classe N' (de la relation $\overline{W^{su}}$ dans N") se projette surjetivement sur N. Ainsi d'après l'affirmation précédente N est la projection dans M d'une partie ouverte d'un translaté gG'. Pour montrer maintenant que ($\overline{N}$, φ) est sous-algébrique, il suffit de montrer qu'en fait $\overline{N}$ est égal à la projection de gG' dans M. Ceci équivaut au fait que dans M'= $\Gamma \backslash G$, on a : $\overline{N'}$ = gG' (on regarde ici G' comme agissant à droite sur M').

D'abord, pour montrer que gG' est fermé dans M', il suffit de montrer que gG'(ou sa projection dans M) est de volume fini (car si gG' n'est pas fermé, alors sa trace au voisinage d'un point d'accumulation aura une infinité de composantes connexes ; ce qui contredira la finitude du volume).

Une fois, cette finitude du volume (et par suite le caractère fermé) démontré, la projection de gG' dans M sera un flot d'Anosov algébrique de volume fini. Il sera donc ergodique [Ano]. Notre partie N sera donc de mesure totale dans cette projection . Il en découle que cette projection est exactement $\overline{N}$.

Maintenant la question de finitude du volume (et même l'ergodicité) se résoud à l'aide de l'affirmation générale suivante :

Affirmation. Considérons un flot d'Anosov algébrique sur $\Gamma' \backslash G'/H'$. Supposons qu'il existe une partie invariante N, ouverte et de volume (de Haar) fini. Alors $\Gamma' \backslash G'/H'$ est de volume fini. En fait N est de mesure totale dans $\Gamma' \backslash G'/H'$.

Preuve. Considérons la sous-algèbre stable G'^{ss} = la somme des sous-espaces caractéristiques correspondant aux valeurs propres à parties réelles négatives de ad(α). Soit G'^{ss} le sous-groupe stable qu'elle engendre. On définit de la même façon le sous-groupe instable G'^{uu}. Soit N' le relèvement de N dans $\Gamma' \backslash G'$ et $f : \Gamma' \backslash G' \to R$, sa fonction caractéristique.

On montre de façon standard que si x est un point de N, négativement récurrent, alors xG'^{ss} c N. Ainsi comme presque tout point de N est récurrent ; pour presque tout point x de $\Gamma' \backslash G'$ on a : soit xG'^{ss} c N, soit xG'^{ss} c le complémentaire de N. Cela entraîne, en regardant f comme distribution (fonction généralisée) sur $\Gamma' \backslash G'$ que les dérivées partielles (premières) de f par rapport aux champs invariants à droite et tangent à G'^{ss} (à l'origine), sont nulles. Le même raisonnement appliqué à G'^{uu}, entraîne le même résultat pour G'^{uu}.

De plus, f est H'-invariante, on a donc la même conclusion pour la sous-algèbre de Lie H' de H'.

Ainsi toutes les dérivées partielles premières de f par rapport aux champs tangents à la somme (vectorielle) des sous-algèbres H', G'^{ss} et G'^{uu} sont nulles. Or ces algèbres engendrent (en tant qu'espaces vectoriels) l'algèbre G' de G'. Ainsi toutes les dérivées partielles premières de f sont nulles. Donc f est presque partout constante. Donc N' (et par suite N) est de mesure totale dans Γ' \ G' (resp. dans Γ'/G' / H'). Û

ii) Le flot (N, ϕ) est une suspension. Avec les notations précédentes , la projection de N' dans N est une section, à temps de retour, disons τ. Donc φ^{τ}(N') a la même projection que N' dans N. Donc φ^{τ}(N') se déduit de N' en appliquant un élément de H. Ainsi quitte à changer le groupe à un paramètre définissant φ en un groupe à un paramètre équivalent, on peut supposer que φ^{τ}(N') = N'. D'après 9.3, N' est ouverte dans un certain gG'. On constate maintenant (comme au premier cas) que pour achever la preuve du théorème , en montrant que (N, φ) est semi sous algébrique ; il suffit de montrer que $\overline{N'}$ = gG'. Cela se fait comme au premier cas. Û

Bibliographie.

[Ano} D.V. Anosov : "Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature", Trud. Math. Inst. Steklova 90 (1967).

[Bes] A. Besse : "Manifolds all of whose geodesics are closed", Springer-Verlag (1978).

[Ebe] P. Eberlein : "When is a geodesic flow of Anosov type? ", J. Diff. Geom. (1973), 8, 437-463.

[Fat] A. Fathi : "Some compact invariant sets for hyberbolic linear automorphisms of torri", Erg. Th. Dynam. Sys.(1988), 8, 205-213.

[Fed] H. Federer : "Geometric measure theory", Springer Verlag (1969).

[Fra] J. Franks : "Invariant sets of hyperbolic toral automorphisms", Amer. J. Math. (1977), 99. 1089-1095.

[Ghy]$_1$ E. Ghys : "Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables", Ann. Scien. Ec Norm. Sup., 20 (1987), 251-270.

[Ghy]$_2$ E. Ghys : "Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes", Sém.Bourbaki. (Nov 1991), Exposé 747.

[Han] S. Hancock : "Construction of invariant sets for Anosov diffeomorphisms", J. London. Math. Soc.(1978), 18, 339-348.

[Hel] S. Helgason : "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Academic.Press (1978).

[Hir] M. Hirsch : "On invariant subsets of hyperbolic sets", Essays in topology and related topics. (1970), 126-146.

[Hir,Pug] M. Hirsch-C. Pugh : "Stable manifolds and hyperbolic sets", Proceeding. Symp in pure mathematics, Vol. 14.

[Mañ]$_1$ R. Mañé; "Orbits of paths under toral automorphisms", Proc. Amer. Soc. (1979), 73, 121-125.

[Mañ]$_2$ R. Mañé : "Invariant sets of Anosov diffeomorphisms", Invent. Math. (1978), 46, 147-152.

[Mañ]$_3$ R. Mañé : "Quasi Anosov diffeomorphisms and hyperbolic manifolds",Trans. Amer. Math. Soc. (1977), 229, 351-370.

[Mar] G. Margulis : "Dicrete subgroups of semisimple Lie groups", Springer-Verlag (1991).

[Mol] P. Molino : "Riemannian Foliations", Birkhauser (1988).

[Pla] J. Plante : "Anosov flows", Amer. J. Math. (1972), 94, 729-754.

[Sel] I. Selgrade : "Isolated invariant sets for flows on vector bundles", Trans of the AMS, Vol 203 (1975) p 359.

[Thu] W. Thurston : "Geometry and topology of 3-manifolds", Princeton University (1978)

[Tom] P. Tomter : "Anosov flows on infra-homogeneous spaces", Poc. Symp. in. pure. Math.14 (1970), 299-327.

[Wat] P. Walters : "An introduction to ergodic theory", Springer-Verlag, (1982).

[Wol] J. Wolf : "Spaces of constant curvature" Publish or Perish.

[Zeg]$_1$ A. Zeghib : "Subsystems of Anosov systems", Preprint. ENS Lyon.

[Zeg]$_2$ A. Zeghib : "Ensembles invariants des flots géodésiques des variétés localement symétriques", Preprint. ENS Lyon. A paraître dans Erg. Th. Dynam. Sys.

[Zim] R. Zimmer : "Ergodic Theory and Semisimple Groups" , Birkhauser. Boston, (1984).

Remerciements. Je remercie tous mes collègues qui m'ont aidé à améliorer ce texte : V. Baladi, T. Barbot et F. Bosio. La contribution d'Etienne Ghys était sans égale. Je lui suis très reconnaissant pour tout.