TD 2 : Réécriture

1 Induction bien fondée

Q 1.1 Prouvez par une induction bien fondée sur un ordre adapté que tout entier strictement positif admet une factorisation en nombres premiers.

Q 1.2 Prouvez grâce au principe d'induction bien fondée que l'ordre $>$ termine sur les entiers.

2 Clôtures

Soit X un ensemble quelconque, et notons $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X^2)$ l'ensemble des *relations binaires* sur X. On notera par $\rightarrow$ les éléments de $\mathcal{R}$ et par $x \rightarrow y$ l'appartenance du couple (x, y) à la relation $\rightarrow$. La composée de deux relations sera notée par la juxtaposition ($\rightarrow_1\rightarrow_2 \triangleq \{(x, z) \mid \exists y, x \rightarrow_1 y \rightarrow_2 z\}$).

Soit $\rightarrow$ une relation, on note :

$\leftarrow$	sa relation converse	$(\leftarrow\ \triangleq \{(x, y) \mid y \rightarrow x\})$;
$\rightarrow^n$	la composition de $\rightarrow$ n fois ;	
$\rightarrow^=$	sa clôture réflexive ;	
$\rightarrow^+$	sa clôture transitive ;	
$\rightarrow^*$	sa clôture réflexive et transitive ;	
$\leftrightarrow$	sa clôture symétrique ;	
$\leftrightarrow^*$	la clôture réflexive et transitive de sa clôture symétrique.	

La relation $\rightarrow$ est dite :

- *totale* si pour tous x, y, $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ ou $x = y$;
- *terminante* s'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i, $x_i \rightarrow x_{i+1}$;
- *acyclique* s'il n'existe pas d'élément x tel que $x \rightarrow^+ x$;
- *à branchement fini* si pour tout élément x l'ensemble $\{y \mid x \rightarrow y\}$ est fini ;
- *globalement finie* si pour tout élément x l'ensemble $\{y \mid x \rightarrow^+ y\}$ est fini ;
- *bornée* si pour tout x il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'existe pas de y tel que $x \rightarrow^{n_x} y$.

Q 2.1
a) Comparez les relations $\rightarrow^*$, $(\rightarrow^+)^=$ et $(\rightarrow^=)^+$.
b) Comparez $\leftrightarrow^+$ et la clôture symétrique de $\rightarrow^+$.
c) Comparez $\leftrightarrow^=$ et la clôture symétrique de $\rightarrow^=$.

Q 2.2 Dans les questions qui suivent, prouvez les affirmations correctes ou donner un contre-exemple dans le cas contraire.
a) Une relation bornée est-elle terminante ?
b) Une relation globalement finie est-elle bornée ? Est-elle terminante ?
c) On suppose que $\rightarrow$ et $\rightarrow^*$ sont à branchement fini. $\rightarrow$ est-elle terminante ?
d) On suppose $\rightarrow$ acyclique et $\rightarrow^*$ à branchement fini. $\rightarrow$ est-elle terminante ?

Q 2.3 Montrez que $\rightarrow^+$ est terminante ssi $\rightarrow$ l'est aussi.

3 Ordre lexicographique

Soit A et B deux ensembles, $\geq_A$ une relation d'ordre sur A, $\geq_B$ une relation d'ordre sur B, $>_A$ l'ordre strict associé à A et $>_B$ l'ordre strict associé à B.

Q 3.1 Rappelez la définition de l'ordre lexicographique $>_{A\times B}$ associé à $>_A$ et à $>_B$.

Q 3.2 On donne la définition suivante :

$$(x,y) \geq_{A\times B} (x',y') :\Leftrightarrow (x >_A x') \vee (x = x' \wedge y \geq_B y') \ .$$

Vérifiez que $\geq_{A\times B}$ est la clôture réflexive de $>_{A\times B}$ et qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $A \times B$, c'est à dire que $\geq_{A\times B}$ est réflexive, transitive et antisymétrique.

Q 3.3 Prouvez que si $>_A$ et $>_B$ sont bien fondées, alors $>_{A\times B}$ est bien fondée.

4 Plongement d'un ordre

Q 4.1 Montrez le lemme suivant :
Une relation à branchement fini termine ssi il existe un plongement[1] *dans* $(\mathbb{N}, >)$.

Q 4.2 Montrez que la restriction aux relations à branchement fini est nécessaire en analysant l'exemple suivant, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$(i+1, j) \to (i, k)$
$(i, j+1) \to (i, j)$

Q 4.3 Donner un prolongement dans $\mathbb{N}$ pour l'exemple suivant, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$(i+1, j) \to (j, i)$
$(i, j+1) \to (j, i)$

Q 4.4 Soit $\to$ une relation, et $(X, >)$ un ordre bien fondé. Montrez le lemme suivant :
S'il existe un plongement de $\to$ *dans* $(X, >)$*, alors* $\to$ *termine.*

Q 4.5 Avec un prolongement dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec l'ordre lexicographique, prouvez que la relation suivante sur les mots est terminante :

- Pour tout mots w, u, on a $waau \to wbbabbu$
- Pour tout mots w, u, on a $wabbu \to wbau$

5 Terminaison

Pour toutes les questions suivantes, indiquez si la relation termine. Si oui, prouvez le, sinon, donnez un contre-exemple.

Q 5.1 Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$(i+1, j) \to (i, i)$
$(i, j+1) \to (i, j)$

Q 5.2 On donne la définition suivante :

$$\to_{1\cup 2} := \ \{(x,y) \mid x \to_1 y \vee x \to_2 y\} \ .$$

On suppose $\to_1$ et $\to_2$ terminantes. $\to_{1\cup 2}$ est-elle terminante ?

1. Ici un plongement est une fonction f telle que $x > y$ implique $f(x) > f(y)$ (on utilise ainsi le fait que $>$ est terminante sur $\mathbb{N}$)

Q 5.3 Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$(i+1, j) \to (i, j+1)$
$(i, j+3) \to (i+1, j)$

Q 5.4 Qu'en est-il pour la relation suivante sur les mots de l'alphabet $\{a, b\}$?
Pour tout mots w, u, on a $wababu \to waaau$
Pour tout mots w, u, on a $waabu \to wabbu$

Q 5.5 Qu'en est-il pour la relation suivante sur les mots de l'alphabet $\{a, b\}$?
Pour tout mots w, u, si $w \neq a^n$, alors on a $wau \to awbu$
Pour tout mots w, u, si $u \neq b^n$, alors on a $wbu \to waub$

Q 5.6 Qu'en est-il pour la relation suivante sur les mots de l'alphabet $\{a, b\}$?
Pour tout mots w, u, on a $wabu \to wbbu$
Pour tout mots w, u, on a , $wbau \to waau$