

TD 3 : Terminaison et Confluence

1 Plongement d'un ordre

Q 1.1 Montrez le lemme suivant :

Une relation à branchement fini termine ssi il existe un plongement¹ dans $(\mathbb{N}, >)$.

Q 1.2 Montrez que la restriction aux relations à branchement fini est nécessaire en analysant l'exemple suivant, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(i + 1, j) \rightarrow (i, k)$$

$$(i, j + 1) \rightarrow (i, j)$$

Q 1.3 Donner un plongement dans \mathbb{N} pour l'exemple suivant, sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$(i + 1, j) \rightarrow (j, i)$$

$$(i, j + 1) \rightarrow (j, i)$$

Q 1.4 Soit \rightarrow une relation, et $(X, >)$ un ordre bien fondé. Montrez le lemme suivant :

S'il existe un plongement de \rightarrow dans $(X, >)$, alors \rightarrow termine.

Q 1.5 Avec un plongement dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec l'ordre lexicographique, prouvez que la relation suivante sur les mots est terminante :

— Pour tout mots w, u , on a $waau \rightarrow wbbabbu$

— Pour tout mots w, u , on a $wabbu \rightarrow wbau$

2 Terminaison

Pour toutes les questions suivantes, indiquez si la relation termine. Si oui, prouvez le, sinon, donnez un contre-exemple.

Q 2.1 Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(i + 1, j) \rightarrow (i, i)$$

$$(i, j + 1) \rightarrow (i, j)$$

Q 2.2 On donne la définition suivante :

$$\rightarrow_{1 \cup 2} := \{(x, y) \mid x \rightarrow_1 y \vee x \rightarrow_2 y\} .$$

On suppose \rightarrow_1 et \rightarrow_2 terminantes. $\rightarrow_{1 \cup 2}$ est-elle terminante ?

Q 2.3 Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(i + 1, j) \rightarrow (i, j + 1)$$

$$(i, j + 3) \rightarrow (i + 1, j)$$

Q 2.4 Qu'en est-il pour la relation suivante sur les mots de l'alphabet $\{a, b\}$?

Pour tout mots w, u , on a $wababu \rightarrow waaau$

Pour tout mots w, u , on a $waabu \rightarrow wabbu$

Q 2.5 Qu'en est-il pour la relation suivante sur les mots de l'alphabet $\{a, b\}$?

Pour tout mots w, u , si $w \neq a^n$, alors on a $wau \rightarrow awbu$

Pour tout mots w, u , si $u \neq b^n$, alors on a $wbu \rightarrow waub$

1. Ici un plongement est une fonction f telle que $x > y$ implique $f(x) > f(y)$ (on utilise ainsi le fait que $>$ est terminante sur \mathbb{N})

Q 2.6 Qu'en est-il pour la relation suivante sur les mots de l'alphabet $\{a, b\}$?

Pour tout mots w, u , on a $wabu \rightarrow wbbu$

Pour tout mots w, u , on a $wbau \rightarrow waau$

3 Définitions des paires critiques pour les SRM

On rappelle la définition d'un système de réécriture de mots (*SRM*). Un SRM est donné par :

— un alphabet Σ

— un ensemble fini R de couples de la forme (l, r) , où l, r sont des mots sur Σ

La relation R détermine la relation \rightarrow entre mots, définie par :

$m \rightarrow m'$ ssi il existe $(l, r) \in R$, il existe $x, y \in \Sigma^*$ tels que $m = xly$ et $m' = xry$.

Notre objectif est de déterminer si \rightarrow est confluent.

Q 3.1 Montrer que si $w \rightarrow^* w'$ alors pour tout u, v , $uwv \rightarrow^* uw'v$ (passage au contexte (admissibilité) de \rightarrow^*).

Q 3.2 On dit que deux mots u, v sont *joignables* si et seulement si il existe un mot w tel que $u \rightarrow^* w$ et $v \rightarrow^* w$. Montrez que si u et v sont joignables alors pour tout w_1, w_2 , w_1uw_2 et w_1vw_2 sont joignables.

Q 3.3 Donnez une définition de la confluence et de la confluence locale.

Q 3.4 Quelles hypothèses sur \rightarrow sont nécessaires pour l'équivalence suivante : \rightarrow est confluent si et seulement si \rightarrow est localement confluent. Vous donnerez le théorème utilisé.

Q 3.5 Supposons ces hypothèses. Il nous suffit donc de déterminer si \rightarrow est localement confluent pour savoir si \rightarrow est confluent. Pour déterminer la confluence locale, on doit déterminer si un ensemble de paires est joignables. Dans cet exercice, on se propose de ne regarder qu'un sous ensemble de ces paires : les paires critiques. Le but est de prouver que si les paires critiques sont joignables, alors le système est localement confluent.

On définit alors la notion de paires critiques sur les mots par :

— Si on a deux règles dans R de la forme (où l_1, l_2, l_3 sont des mots) : (l_1l_2, r_1) et (l_2l_3, r_2) , alors $(l_1l_2l_3 \rightarrow r_1l_3, l_1l_2l_3 \rightarrow l_1r_2)$ est une paire critique (rigoureusement r_1l_3 et l_1r_2).

— Si on a deux règles dans R de la forme (où l_1, l_2, l_3 sont des mots) : $(l_1l_2l_3, r_1)$ et (l_2, r_2) , alors $(l_1l_2l_3 \rightarrow r_1, l_1l_2l_3 \rightarrow l_1r_2l_3)$ est une paire critique (rigoureusement r_1 et $l_1r_2l_3$).

Intuitivement, les paires critiques correspondent aux cas pour lesquelles deux règles interfèrent.

Démontrez que le système de réécriture est localement confluent si et seulement si toutes les paires critiques sont joignables.

4 Confluence de systèmes de réécritures sur les mots

Déterminez si les systèmes de réécriture suivants sont confluent sur l'alphabet $\Sigma := \{a, b, c, d, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$, soit en utilisant les paires critiques, soit en exhibant un contre exemple.

Q 4.1

$$R = \{(aa, bb), (aa, \bar{b}), (\bar{c}, aa), (bb, \bar{a}), (d, c), (bb, \bar{c})\}.$$

Q 4.2

$$R = \{(a\bar{a}, \varepsilon), (\bar{a}a, \varepsilon), (b\bar{b}, \varepsilon), (\bar{b}b, \varepsilon), (ba, ab), (b\bar{a}, \bar{a}b), (\bar{b}a, a\bar{b}), (\bar{b}\bar{a}, \bar{a}\bar{b})\}.$$

5 Procédure de complétion : Knuth-Bendix

On peut avoir envie, lorsqu'un système de réécriture de mots (*SRT*) n'est pas localement confluent, de le rendre confluent en rajoutant des règles. C'est l'idée derrière la procédure de complétion de Knuth-Bendix (notée KB dans la suite), qui fait l'objet de cette partie.

On se donne un système de réécriture de mots $R = \{(l_j, r_j)\}$, défini sur un ensemble de mots de Σ^* .

On suppose de plus que l'on a un ordre de réduction, noté $>$, défini sur Σ^* tel que :

- $>$ est un ordre admissible : si $x < y$ alors pour tous mots u, v , on a $uxv < uyv$.
- $>$ est compatible avec R : pour tous $(l, r) \in R$, $l > r$.
- $>$ est terminant.

La procédure KB construit une suite de SRT de la manière suivante :

- Initialisation. $R_0 = R = \{(l_j, r_j)\}$.
- Itération. On calcule P_i , l'ensemble des paires critiques de R_i . On initialise R_{i+1} comme étant égal à R_i , et on l'enrichit de la manière suivante : pour toutes les $\{w \rightarrow s, w \rightarrow t\} \in P_i$:
 - calculer une forme normale \hat{s} (resp. \hat{t}) de s (resp. de t).
 - si $\hat{s} = \hat{t}$, ne rien faire ;
 - si $\hat{s} > \hat{t}$, ajouter (\hat{s}, \hat{t}) à R_{i+1} , et sinon
 - si $\hat{t} > \hat{s}$, ajouter (\hat{t}, \hat{s}) à R_{i+1} , et sinon
 - échec de KB.

Si à un certain moment $R_{i+1} = R_i$, KB s'arrête (succès), renvoyer R_i .

Q 5.1 Montrez que si R_{i+1} existe, $\longleftrightarrow_{R_{i+1}}^* = \longleftrightarrow_{R_i}^*$.

Q 5.2 Montrez que si KB n'échoue pas, alors

1. soit KB termine en temps fini, en renvoyant R_n , un SRT terminant et confluent.
2. soit KB diverge. Alors $R_\infty = \bigcup_{i \geq 0} R_i$ est un système de réécriture infini, confluent et terminant.

Q 5.3 On considère les théories suivantes. Prenez un ordre $>_l$ sur les lettres adapté, étendez-le avec tel que $u > v \equiv |u| > |v| \vee |u| = |v| \wedge u >_{lex(>_l)} v$ et donnez le résultat de KB.

•

$$R = \{(aa, \varepsilon), (bb, \varepsilon), (ab, c)\}.$$

•

$$R = \{(aba, \varepsilon)\}.$$

•

$$R = \{(a\bar{a}, \varepsilon), (\bar{a}a, \varepsilon), (\bar{b}\bar{b}, \varepsilon), (\bar{b}b, \varepsilon), (ba, ab), (b\bar{a}, \bar{a}b), (a\bar{b}, \bar{b}a), (\bar{a}\bar{b}, \bar{b}\bar{a})\}.$$

Choisir pour chacune de ces théories un ordre de réduction $>$ approprié, et appliquez l'algorithme de complétion de KB.

6 Forte normalisation

Soit (E, \rightarrow) un système de réécriture abstraite. On dit que $e \in E$ est *fortement normalisant* si toutes les réductions issues de e terminent. e est *faiblement normalisant* s'il peut être réécrit en un nombre fini d'étapes en une forme normale (fortement normalisant implique donc faiblement normalisant, mais pas le contraire). On dit que le système de réécriture (E, \rightarrow) est fortement normalisant s'il l'est pour tout $e \in E$, et de même pour la propriété de faible normalisation.

Q 6.1 Donnez un exemple de système de réécriture abstraite qui soit confluent, faiblement normalisant, et non fortement normalisant.

Q 6.2 (*plus difficile*) Le lemme de Newman dit que la forte normalisation et la confluence locale impliquent la confluence globale. On s'intéresse ici à une variante de ce résultat, où l'on exploite la faible normalisation.

On suppose que (E, \rightarrow) est localement confluent et faiblement normalisant. On suppose de plus qu'il existe une fonction $\mu: E \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tous a, b , dès que $a \rightarrow b$, on a $\mu(a) < \mu(b)$ (notez que si c'était $\mu(a) > \mu(b)$ on aurait la forte normalisation).

On se donne $a \in E$. Montrez que a est fortement normalisant.

7 Church-Rosser

Soient Σ un alphabet et Σ^* un ensemble de mots sur Σ . Étant donnée une relation \rightarrow sur Σ^* , on note par \leftrightarrow^* la clôture réflexive et transitive de $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$. Le *problème du mot* pour \rightarrow peut être formulé comme suit :

étant donnés deux mots $u, v \in \Sigma^$, est-ce que $u \leftrightarrow^* v$?*

Intuitivement, décider le problème du mot revient à déterminer si u et v sont le même mot modulo \leftrightarrow^* . Le problème du mot – qui est indécidable en général – est une motivation importante pour la théorie des systèmes de réécriture.

L'existence de formes normales uniques joue un rôle central pour résoudre “facilement” le problème du mot. Deux mots u_1 et u_2 ont la même forme normale s'il existe un mot $w \in \Sigma^*$ tel que :

$$u_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} u_2 .$$

Dans ce cas on dit que u_1 et u_2 sont *joignables* (notation $u_1 \downarrow u_2$). On dit que la relation \rightarrow a la *propriété de Church-Rosser* si :

$$u_1 \leftrightarrow^* u_2 \implies u_1 \downarrow u_2 .$$

Intuitivement, si la relation \rightarrow a la propriété de Church-Rosser, alors le problème du mot se réduit à établir si deux mots sont joignables.

Q 7.1 Montrez que \rightarrow est confluyente si et seulement si elle admet la propriété de Church-Rosser².

Q 7.2 Soient \rightarrow une relation confluyente et u_1, u_2 deux mots tels que $u_1 \leftrightarrow^* u_2$. Montrez que :

1. Si u_2 est en forme normale, alors $u_1 \xrightarrow{*} u_2$.
2. Si u_1 et u_2 sont en forme normale, alors $u_1 = u_2$.

2. Attention : à cause de cette équivalence, il existe quelques variations dans les définitions rencontrées dans la littérature (e.g. la propriété de Church-Rosser est parfois définie par notre définition de la notion de confluence, et vice-versa).