Outils mathématiques pour les transformations de programme multi-dimensionnelles au niveau source

Alain Darte

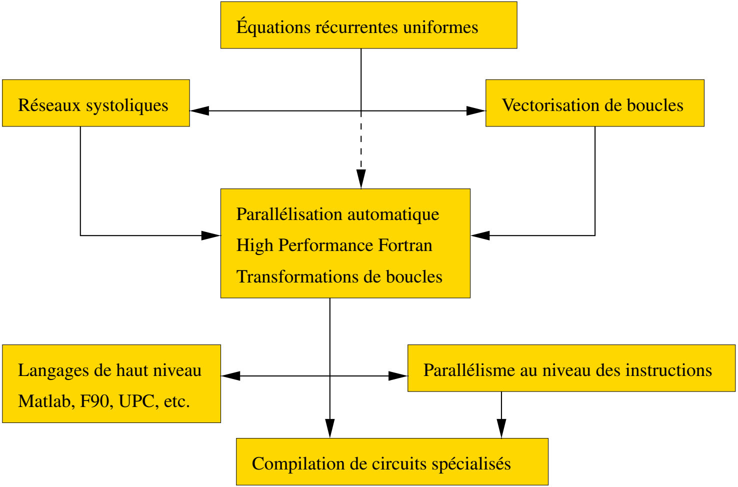
CNRS
Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme
École normale supérieure de Lyon

Outline

Problématique

- Comprendre ce qui peut se faire automatiquement dans le domaine des optimisations de programme :
  - Formalisation des problèmes (modèle, fonction objective)
  - Étude de complexité (NP-complet ? Algorithmes ?)
  - Étude des modèles (limites, contre-exemples)
- Établir des liens entre différentes théories.
- Appliquer ces études théoriques à des problèmes réels :
  - Parallélisation automatique et High Performance Fortran
  - Compilation d'accélérateurs matériels
  - ... ?

Évolution de la thématique



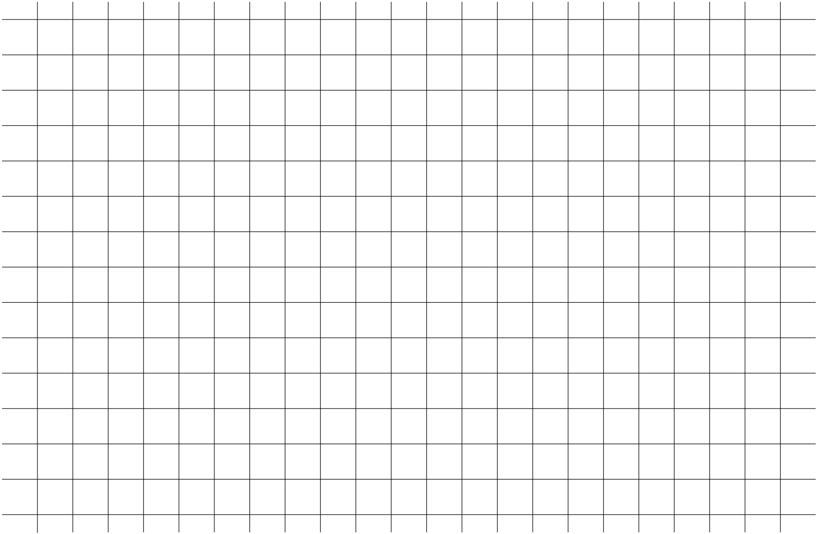
Boucles imbriquées

```
DO k=1, N
  a(k,k) = √a(k,k
  DO i=k+1, N
    a(i,k) = a(i,k)/a(k,k)
    DO j=k+1, i
      a(i,j) = a(i,j) - a(i,k)a(j,k)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
```

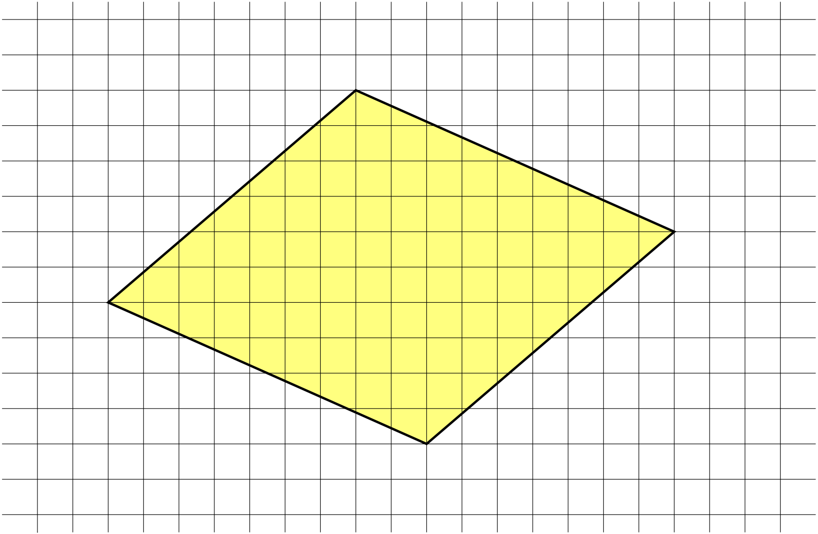
- Boucles, bornes de boucles, itérations, vecteurs d'itérations.
- Accès affines aux tableaux.
- Transformations de boucles, d'accès.

☛ Problèmes d'ordonnancement, d'allocation mémoire, d'équilibrage de charge, d'allocation de ressources.

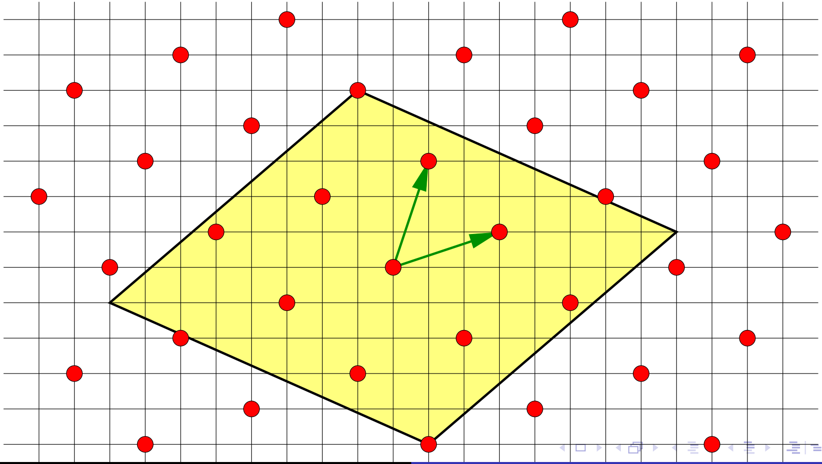
Boucles, polyèdres, réseaux



Boucles, polyèdres, réseaux



Boucles, polyèdres, réseaux



Forme de Hermite et forme de Smith

Unimodularité Matrice entière de déterminant 1 ou -1.

Forme de Hermite et forme de Smith

Unimodularité Matrice entière de déterminant 1 ou -1.

Hermite A carrée inversible : $\exists!(Q, H)$ avec $A = HQ$,
Q unimodulaire, H positive triangulaire inférieure, $h_{i,j} \leq h_{i,i}$.

- $Ax = b$, x entier, ssi $Hy = b$, y entier et $Qx = y$.
- Bases triangulaires de réseaux.
- …

▸ Ex.

Forme de Hermite et forme de Smith

Unimodularité Matrice entière de déterminant 1 ou -1.

Hermite A carrée inversible : $\exists!(Q, H)$ avec $A = HQ$,
Q unimodulaire, H positive triangulaire inférieure, $h_{i,j} \leq h_{i,i}$.

- $Ax = b$, x entier, ssi $Hy = b$, y entier et $Qx = y$.
- Bases triangulaires de réseaux.
- ...

Ex.

Smith A carrée entière : $\exists! S$ et $\exists(Q_1, Q_2)$ avec $A = Q_1 S Q_2$,
Q_1 et Q_2 unimodulaires, $S = \text{diag}(s_1, \ldots, s_n)$, s_i divise s_{i+1}.

- Manipulations plus simples de matrices entières.
- Inversion de systèmes.
- Factorisation des groupes abéliens.
- ...

Ex.

Programmation linéaire

$$\min \left\{ \begin{array}{l} 11t + 10u \mid \\ \quad 2t + 3u \geq 5 \\ \quad 3t + 2u \geq 4 \\ \quad 5t + u \geq 12 \\ \quad t >= 0,\ u >= 0 \end{array} \right. = \max \left\{ \begin{array}{l} 5x + 4y + 12z \mid \\ \quad 2x + 3y + 5z \leq 11 \\ \quad 3x + 2y + z \leq 10 \\ \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{array} \right.$$

Problème 1 du dopé acheter la proportion la moins chère de dopants t et u (de prix respectifs 11 et 10) pour un apport suffisant en 3 éléments (resp. 5, 4 et 12) connaissant l'apport dans chaque dopant.

Problème 2 du trafiquant vendre les trois éléments au prix le plus cher, tout en étant moins cher que chacun des médicaments.

Programmation linéaire

Théorème de dualité

$$\min\{c.x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\} = \max\{y.b \mid yA \leq c,\ y \geq 0\}$$

Complexité

- Solution rationnelle : temps polynomial (L. Khachiyan)
- Solution entière : NP-complet et inégalité seulement.

Algorithmes Algorithmes du simplexe, algorithmes de réduction de base en petites dimensions (Lenstra), programmation linéaire paramétrée (second membre).

Outline

Distribution et fusion de boucles

```
DO i=1, N
  a(i) = b(i)
  d(i) = a(i-1)
ENDDO
```

Distribution de boucles

$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

Fusion de boucles

```
DO i=1, N
  a(i) = b(i)
ENDDO
DO i=1, N
  d(i) = a(i-1)
ENDDO
```

Décalage de boucles

```
DO i=1, N
  a(i) = b(i)
  d(i) = a(i-1)
ENDDO
```

$\longrightarrow$

```
DO i=0, N
  IF (i > 0) THEN
    a(i) = b(i)
  ENDIF
  IF (i < N) THEN
    d(i+1) = a(i)
  ENDIF
ENDDO
```

Épluchage de boucle

```
DO i=0, N
  IF (i > 0) THEN
    a(i) = b(i)
  ENDIF
  IF (i < N) THEN
    d(i+1) = a(i)
  ENDIF
ENDDO
```

$\longrightarrow$

```
d(1) = a(0)
DO i=1, N-1
  a(i) = b(i)
  d(i+1) = a(i)
ENDDO
a(N) = b(N)
```

Déroulage de boucle

```
DO i=1, 10
  a(i) = b(i)
  d(i) = a(i-1)
ENDDO
```

Déroulage de deux

$\longrightarrow$

```
DO i=1, 10, 2
  a(i) = b(i)
  d(i) = a(i-1)
  a(i+1) = b(i+1)
  d(i+1) = a(i)
ENDDO
```

Strip mining, loop coalescing

```
DO i=1, N
  a(i) = b(i) + c(i)
ENDDO
```

Strip mining $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ Loop coalescing

```
DO Is=1, N, s
  DO i=Is, min(N, Is+s-1)
    a(i) = b(i) + c(i)
  ENDDO
ENDDO
```

Échange de boucles

```
DO i=1, N
  DO j=1, N
    a(i,j+1) = a(i,j) + 1
  ENDDO
ENDDO
```

$\longleftrightarrow$

```
DO j=1, N
  DO i=1, N
    a(i,j+1) = a(i,j) + 1
  ENDDO
ENDDO
```

Transformation : $\{(i,j) \mapsto (j,i)\}$

Torsion de boucles

```
DO i=1, N
  DO j=1, N
    a(i,j+1) = a(i,j) + 1
  ENDDO
ENDDO
```

$\longrightarrow$

```
DO i=1, N
  DO j=1+i, N+i
    a(i,j-i+1) = a(i,j-i) + 1
  ENDDO
ENDDO
```

Transformation : $\{(i,j) \mapsto (i, j+i)\}$

Transformation unimodulaire

```
DO i=1, N                 DO t=2, 2N
  DO j=1, N                 DO p=max(1,t-N), min(N,t-1)
    a(i,j) = ...   ⟷          a(p,t-p) = ...
  ENDDO                     ENDDO
ENDDO                     ENDDO
```

Transformation : $\{(i,j) \mapsto (t,p) = (j+i,i) = U(i,j)\}$

Analyse de programmes

Ordre séquentiel $\preceq$ grosso modo, ordre lexicographique sur les vecteurs d'itération.

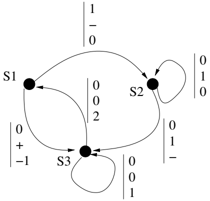
Calcul ou approximation des dépendances si 2 instructions $(S, \vec{i})$ et $(T, \vec{j})$ accèdent la même zone mémoire, l'un des accès en écriture, il y a une dépendance du 1er (selon $\preceq$) accès vers le 2ème : $(S, \vec{i}) \Rightarrow (T, \vec{j})$.

- Écriture puis lecture : dépendance de flot.
- Lecture puis écriture : anti-dépendance.
- Écriture puis lecture : dépendance en sortie.

Graphe de dépendance réduit (entre instructions) un arc de l'instruction S vers l'instruction T et une description condensée des $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que $(S, \vec{i}) \Rightarrow (T, \vec{j})$.

Exemple avec vecteurs de direction

```
DO i= 1, N
  DO j = 1, N
    DO k = 1, j
      a(i,j,k) = c(i,j,k-1) + 1
      b(i,j,k) = a(i-1,j+i,k) + b(i,j-1,k)
      c(i,j,k+1) = c(i,j,k) + b(i,j-1,k+i) + a(i,j-k,k+1)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
```



Exemple : code parallèle

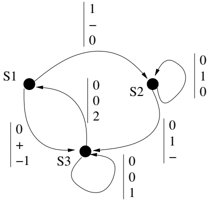
```
DOSEQ i=1, n
  DOSEQ j=1, n /* ordonnancement (2i, j) */
    DOPAR k=1, j
      b(i,j,k) = a(i-1,j+i,k) + b(i,j-1,k)
    ENDDOPAR
  ENDDOSEQ
  DOSEQ k = 1, n+1
    IF (k ≤ n) THEN /* ordonnancement (2i+1, 2k) */
      DOPAR j=k, n
        a(i,j,k) = c(i,j,k-1) + 1
      ENDDOPAR
    IF (k ≥ 2) THEN /* ordonnancement (2i+1, 2k+3) */
      DOPAR j=k-1, n
        c(i,j,k) = c(i,j,k-1) + b(i,j-1,k+i-1) + a(i,j-k+1,k)
      ENDDOPAR
  ENDDOSEQ
ENDDOSEQ
```

1. Sauter vers le fichier sure.pdf (intro)

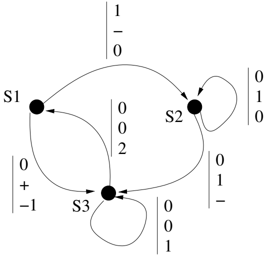
2. puis vers les transparents manuels et en anglais
   - sures_multi.pdf
   - sures_mono.pdf

Exemple avec vecteurs de direction

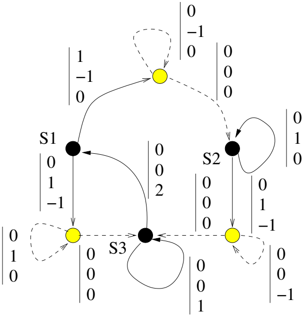
```
DO i= 1, N
  DO j = 1, N
    DO k = 1, j
      a(i,j,k) = c(i,j,k-1) + 1
      b(i,j,k) = a(i-1,j+i,k) + b(i,j-1,k)
      c(i,j,k+1) = c(i,j,k) + b(i,j-1,k+i) + a(i,j-k,k+1)
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
```



Exemple : graphes de dépendances

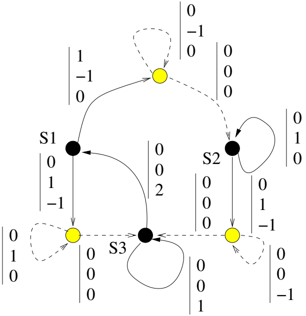


Graphe réduit initial.

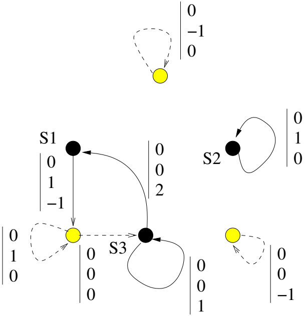


Graphe réduit uniformisé.

Exemple : G et G'



Graphe réduit uniformisé.



G' sous-graphe des multicycles de poids nul.

Exemple : ordonnancement

Contraintes pour le premier niveau

$\vec{X}.(0,1,0) = 0$, $\vec{X}.(0,0,1) = 0$, $\vec{X}.(1,0,1) \geq 2$.

Solution possible : $\vec{X} = (2,0,0)$, $\rho_{S_1} = \rho_{S_3} = 1$ et $\rho_{S_2} = 0$.

Contraintes pour le second niveau

Pour S_2

$\vec{X}.(0,1,0) \geq 1$, par exemple $\vec{X} = (0,1,0)$.

Pour S_1 et S_3

$\vec{X}.(0,1,0) \geq 0$, $\vec{X}.(0,0,1) \geq 1$, $\vec{X}.(0,1,1) \geq 2$.

Solution possible : $\vec{X} = (0,0,2)$, $\rho_{S_1} = 0$ et $\rho_{S_3} = 3$.

☛ Ordonnancement multi-dimensionnel :

$\boxed{(2i,j) \text{ pour } S_2,\ (2i+1,2k) \text{ pour } S_1 \text{ et } (2i+1,2k+3) \text{ pour } S_3.}$

Exemple : code parallèle généré

```
DOSEQ i=1, n
  DOSEQ j=1, n /* ordonnancement (2i, j) */
    DOPAR k=1, j
      b(i,j,k) = a(i-1,j+i,k) + b(i,j-1,k)
    ENDDOPAR
  ENDDOSEQ
  DOSEQ k = 1, n+1
    IF (k ≤ n) THEN /* ordonnancement (2i+1, 2k) */
      DOPAR j=k, n
        a(i,j,k) = c(i,j,k-1) + 1
      ENDDOPAR
    IF (k ≥ 2) THEN /* ordonnancement (2i+1, 2k+3) */
      DOPAR j=k-1, n
        c(i,j,k) = c(i,j,k-1) + b(i,j-1,k+i-1) + a(i,j-k+1,k)
      ENDDOPAR
  ENDDOSEQ
ENDDOSEQ
```

Génération de code

Transformation unimodulaire $\vec{j} = Q\vec{i}$

- Remplacer l'instruction $(S, \vec{i})$ par $(S, Q^{-1}\vec{j})$.
- Calculer les bornes de boucles pour $\vec{j}$ avec $\vec{i} \in P = \{\vec{x} \mid A\vec{x} \leq \vec{b}\}$, soit $\vec{j} \in P' = \{\vec{y} \mid AQ^{-1}\vec{y} \leq \vec{b}\}$.

$\min\{y_1 \mid \vec{y} \in P'\} \leq j_1 \leq \max\{y_1 \mid \vec{y} \in P'\}$
$\min\{y_2 \mid \vec{y} \in P'\} \leq j_2 \leq \max\{y_2 \mid \vec{y} \in P'\}$ avec y_1 paramètre
$\min\{y_3 \mid \vec{y} \in P'\} \leq j_3 \leq \max\{y_3 \mid \vec{y} \in P'\}$ avec y_1, y_2 paramètres
$\ldots$

Transformation non unimodulaire $\vec{j} = A\vec{i}$

- $A = HQ$ (Hermite).
- Appliquer Q (unimodulaire) puis H (torsion + steps).

Forme d'Hermite : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}$$

Forme d'Hermite : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Forme d'Hermite : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Forme d'Hermite : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme d'Hermite : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 12 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 1 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -30 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 1 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 1 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & 1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -30 \\ 1 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & 1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & 1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -17 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & 1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & 1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -17 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & -1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -17 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Forme de Smith : exemple

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & 1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & -30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & 1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -17 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -18 & -1 & -9 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -17 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 0 & 6 \\ 20 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -18 & -10 & -9 \\ -5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & -17 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$