Anneaux, morphismes, idéaux.

Exercice 1.

1. On considère l'anneau $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal. Est-il principal ?
   (b) Que se passe-t-il si on considère $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$? $\mathbb{R}[X]$? $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
   (c) Identifier le quotient $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/\mathfrak{m}_x$.
2. Identifier les éléments nilpotents de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un anneau, intègre si et seulement si U est connexe.

Exercice 2.

Soit $\varphi\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Montrer que l'image réciproque par φ d'un idéal de B est un idéal de A. Qu'en est-il pour un idéal premier ? Pour un idéal maximal ? Donner une condition sous laquelle l'image directe de tout idéal de A est un idéal de B.
2. Soient I et J idéaux de A et B respectivement, telles que $\varphi(I) \subset J$. Montrer que φ induit un morphisme d'anneaux $\overline{\varphi}\colon A/I \to B/J$. Dans quelle condition φ est injectif ?

Exercice 3.

Soit A un anneau et soient I, J deux idéaux de A.

1. Décrire les idéaux (quelconques, puis premiers et maximaux) de l'anneau quotient A/I.
2. Donner un isomorphisme naturel entre l'anneau $A/(I+J)$ et un quotient de A/I.

Exercice 4.

Soit A un anneau commutatif.

1. Soient I et J deux idéaux de A premiers entre eux. Montrer que pour tous entiers $n, m \geqslant 1$, les idéaux I^n et J^m sont premiers entre eux.
2. Soit I un idéal non premier de A. Montrer qu'il existe des idéaux I_1, I_2 de A distincts de I et A tels que l'on ait $I_1 I_2 \subset I \subset I_1 \cap I_2$.

Exercice 5.

1. Dans l'anneau $\mathbb{Q}[X]$, calculer le pgcd de $P = 2X^4 - 3X^2 + 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$. Déterminer U et V tels que $UP + VQ = \mathrm{pgcd}(P,Q)$. Même question dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $X^3 - X + 1$ est inversible dans $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X + 1)$, et déterminer son inverse.
3. Déterminer $\mathrm{pgcd}(X^n - 1, X^m - 1)$.
4. Montrer que $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$ si et seulement si m est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 6.

Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$.

1. Montrer que a est inversible dans A si et seulement si $(a) = A$.
2. Montrer que a est un diviseur de b dans A si et seulement si $(b) \subset (a)$.
3. Supposons que A soit intègre.
   (a) Montrer que a est premier dans A si et seulement si (a) est un idéal premier de A.
   (b) Montrer que a est irréductible dans A si et seulement si (a) est maximal parmi les idéaux principaux de A. En déduire que lorsque tout idéal de A est principal, a est irreductible dans A si et seulement si (a) est un idéal maximal de A.