Anneaux factoriels et nœthériens.

Exercice 1.

1. Un sous-anneau (respectivement quotient par un idéal premier) d'un anneau principal/factoriel/nœthérien l'est-il encore ?
2. Donner un exemple d'anneau ...
   (a) ...nœthérien et factoriel mais pas principal
   (b) ...nœthérien mais pas factoriel
   (c) ...factoriel mais pas nœthérien

Exercice 2.

1. Montrer que dans un anneau nœthérien, tout élément non nul admet une factorisation comme produit d'une unité et d'un nombre fini d'irréductibles. *On pourra s'inspirer d'une preuve du cours.*
2. On considère des anneaux intègres. Montrer qu'un anneau nœthérien est factoriel si et seulement si ses éléments irréductibles sont premiers.

Exercice 3. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont noethériens ? Lesquels sont factoriels ?

1. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence strictement positif.
2. L'anneau des séries entières ayant un rayon de convergence infini.
3. L'anneau des polynômes à coefficients rationnels tels que $P(0) \in \mathbb{Z}$.
4. L'anneau des suites à valeur dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Équation de Mordell)**.** Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation de Mordell $y^2 = x^3 - 2$.

1. Si A est un anneau factoriel et si a, b sont deux éléments de A premiers entre eux tels que $ab = c^n$ pour un certain $c \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe alors $u, v \in A^\times$ et $\alpha, \beta \in A$ tels que $a = u\alpha^n$ et $b = v\beta^n$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation de Mordell. Montrer que $y + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $y - \mathrm{i}\sqrt{2}$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}]$.
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation de Mordell.

Exercice 5. Montrer que l'anneau $A = \mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{n}]$, avec $n \geqslant 2$ est factoriel si et seulement si $n = 2$.

Exercice 6. Soit K un corps. Déterminer le PGCD de $X^n - 1$ et $X^m - 1$ dans $K[X]$.

Exercice 7 (Dimension d'un anneau)**.**

Sur un anneau A, une chaîne de longueur n est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A

$$\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n.$$

On appelle dimension de Krull la borne supérieure des longeurs de chaînes de A (pouvant être infinie).

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est de dimension 1, et que tout corps K est de dimension 0.
2. Montrer que pour tout corps K et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim K[X_1, \cdots, X_n] \geqslant n$. Trouver un anneau de dimension infinie.
3. Montrer que pour un idéal I de A, $\dim A/I \leqslant \dim A$.