Anneaux noetheriens. Extension de corps.

Exercice 1.

Un idéal $I \subset A$ est dit irréductible si dès que $I = I_1 \cap I_2$ avec I_1, I_2 idéaux, alors $I = I_1$ ou $I = I_2$. Montrer que dans un anneau noethérien, tout idéal est une intersection finie d'idéaux irréductibles.

Exercice 2.

Soit A un anneau noethérien.

1. Soit I un idéal propre de A. Montrer qu'il existe des idéaux premiers non nuls $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ contenant I tels que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n \subset I$.
2. En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers non nuls minimaux pour l'inclusion.

Exercice 3.

Le but de cet exercice est de déterminer la forme des idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{Z}[X]$. Soit I un idéal premier.

1. Montrer que $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = 0$ et on note $\widetilde{I} = I\mathbb{Q}[X]$ l'idéal engendré par I dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $\widetilde{I} \cap \mathbb{Z}[X] = I$. En déduire que I est principal engendré par un polynôme non constant irréductible et primitif.
3. On suppose que $I \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Montrer que I/pI est un idéal premier de $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que I est engendré soit par p, soit par p et un polynôme unitaire dont la réduction modulo p est irréductible.
4. Parmi les idéaux trouvés, lesquels sont maximaux ?
5. En s'inspirant de cette méthode, montrer que les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont soit principaux, soit de la forme $(X - a, Y - b)$. Quels sont les idéaux maximaux ?

Exercice 4.

Donner les degrés des extensions suivantes et en donner des bases.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
   Comparer $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ et donner le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Q}[j]/\mathbb{Q}$, pour $j = e^{2i\pi/3}$. A-t-on $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[j]$? $i \in \mathbb{Q}[j]$? $j \in \mathbb{Q}[i]$?
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i, j]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3} + i]/\mathbb{Q}$.
5. $\mathbb{Q}\left[\cos \frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\sin \frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\cos \frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}\left[\sin \frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$.

Exercice 5.

On considère le nombre de Liouville $\ell = \sum_{n \geqslant 0} 10^{-n!}$.

1. Soit $x \in \mathbb{C}$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$, alors $|x - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{C}{q^n}$.
2. En déduire que ℓ est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 6.

1. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.
2. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élement $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
3. Soit L/K une extension et $x \in L$ algébrique sur K, de degré impair. Montrer que x^2 est également algébrique sur K et que $K[x^2] = K[x]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ possède des extensions de tout degré.
5. Charles Hermite a démontré en 1873 que e est un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$; en 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que $e+\pi$ et $e\pi$ ne peuvent pas être simultanément algébriques sur $\mathbb{Q}$.