Extensions algébriques.

Exercice 1.

1. Une extension de degré fini est-elle nécessairement algébrique ?
2. Une extension algébrique est-elle nécessairement de degré fini ?
3. Soit E une extension algébrique de F. Montrer que tout sous-anneau de E contenant F est un corps. Est-ce encore vrai si l'on ne suppose plus E algébrique sur F ?
4. Soit K un corps. Déterminer les éléments de $K(X)$ algébriques sur K.

Exercice 2. Soit K un corps et $\beta \in K(X)$ une fraction rationnelle non constante. Montrer que l'extension $K(X)/K(\beta)$ est algébrique.

Exercice 3. Donner les degrés des extensions suivantes et en donner des bases.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}]/\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]/\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Comparer $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ et donner le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{Q}[j]/\mathbb{Q}$, pour $j = e^{2i\pi/3}$. A-t-on $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[j]$? $i \in \mathbb{Q}[j]$? $j \in \mathbb{Q}[i]$?
4. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, j]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}, i, j]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3}+i]/\mathbb{Q}$.
5. $\mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\sin\frac{2\pi}{3}\right]/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\left[\cos\frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}\left[\sin\frac{2\pi}{5}\right]/\mathbb{Q}$.

Exercice 4.

1. Soit $K = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2. Montrer qu'un carré dans $K^\times$ a exactement deux racines carrées. En déduire que tous les éléments de K sont des sommes de deux carrés dans K.
2. Qu'en est-il pour K corps fini de caractéristique 2 ?

Exercice 5.

1. Soit L/K une extension algébrique. Montrer que si $f : L \to L$ est un morphisme de corps K-linéaire, f est un automorphisme.
2. Soit $K \subset K' \subset K''$ trois corps. On suppose que l'extension K'/K est algébrique. Montrer que tout élement $a \in K''$ algébrique sur K' est algébrique sur K.
3. Soit L/K une extension et $x \in L$ algébrique sur K, de degré impair. Montrer que x^2 est également algébrique sur K et que $K[x^2] = K[x]$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ possède des extensions de tout degré.
5. Charles Hermite a démontré en 1873 que e est un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$; en 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π. En admettant ces résultats, montrer que $e+\pi$ et $e\pi$ ne peuvent pas être simultanément algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 6. Soient K un corps, P un polynôme de $K[X]$ de degré n et de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans une clôture algébrique de K. On pose $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Montrer que $[K : L] \leqslant n!$.